DEC 10 1926

JUBILÄUMSBAND I

AUS ANLASS DES 100 JÄHRIGEN BESTEHENS

PERIODICAL ROOM
GENERAL LIBRARY
UNIV. OF MICH.

Journal

für die

reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826.

Herausgegeben

unter Mitwirkung der Herren

Hasse, Schäfer, Schlesinger, Schottky

von

K. Hensel.

Band 157.

Heft 1.

Mit einem Bild von C. F. Gauß.

Ausgegeben den 8. November.

Berlin und Leipzig

WALTER DE GRUYTER & CO.

VORMALS G. J. GÖSCHEN'SCHE VERLAGSHANDLUNG - J. GUTTENTAG VERLAGS-BUCHHANDLUNG - GEORG REIMER - KARL J. TRÜBNER - VEIT & COMP.

1926

Jährlich zirka 6 Hefte. Vier Hefte bilden einen Band.

Band 157. Heft 1.

(Jubiläumsband I.)

Mit einem Bild von C. F. Gauß.

Inhaltsverzeichnis.

Vorwort . . . . . Seite 1

Lorey, Wilhelm, August Leopold Crelle zum Gedächtnis . . . . . — 3

Auszug aus einem Briefe von **G. Mittag-Leffler** an den Herausgeber dieser Zeitschrift — 12

Furtwängler, Ph., Über die Reziprozitätsgesetze für Primzahlpotenzexponenten — 15

Landau, Edmund, Über Dirichletsche Reihen mit komplexen Charakteren . — 26

Study, E., Über Summen von fünf und sechs Quadraten und konforme Transformationen . . . . . — 33

An unsere Mitarbeiter!

Um ein schnelles Erscheinen der einzelnen Hefte des Journals zu ermöglichen, können wir den Herren Autoren grundsätzlich nur eine Korrektur ihrer Beiträge zustellen. Da die Korrekturen seitens der Redaktion, auch hinsichtlich ihres Inhalts, mit größter Genauigkeit gelesen werden, hoffen wir auch so, allen Wünschen gerecht zu werden.

Die Herren Verfasser erhalten von Abhandlungen bis zu 24 Seiten Umfang 100 Sonderabdrucke, von größeren Arbeiten 50 Sonderabdrucke kostenfrei, weitere gegen Berechnung.

Sendungen für das Journal erbittet die Redaktion **ausschließlich** unter der Adresse

An die Redaktion des Journals für die reine und angewandte Mathematik

Professor Dr. Kurt Hensel, Marburg (Bez. Cassel), Breiter Weg 7.

JUBILÄUMSBAND I

AUS ANLASS DES 100 JÄHRIGEN BESTEHENS

Journal

für die

reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826.

Herausgegeben

unter Mitwirkung der Herren

Hasse, Schaefer, Schlesinger, Schottky

von

K. Hensel.

Band 157.

In vier Heften.

Mit 13 Bildern auf 4 Tafeln.

Berlin und Leipzig

WALTER DE GRUYTER & CO.

VORMALS G. J. GÖSCHEN'SCHE VERLAGSHANDLUNG - J. GUTTENTAG VERLAGS-BUCHHANDLUNG - GEORG REIMER - KARL J. TRÜBNER - VEIT & COMP.

1927.

Inhaltsverzeichnis des Bandes 157.

Vorwort . . . . . Seite 1

Auszug aus einem Briefe von **G. Mittag-Leffler** an den Herausgeber dieser Zeitschrift . . . . . — 12

Bieberbach, Ludwig, Eine hinreichende Bedingung für schlichte Abbildungen des Einheitskreises . . . . . — 189

Bohr, Harald, Ein Satz über analytische Fortsetzung fastperiodischer Funktionen — 61

Brouwer, L. E. J., Virtuelle Ordnung und unerweiterbare Ordnung . . . — 255

Fraenkel, Adolf, Die Gleichheitsbeziehung in der Mengenlehre . . . . . — 79

Fueter, Rudolf, Über automorphe Funktionen in bezug auf Gruppen, die in der Ebene uneigentlich diskontinuierlich sind . . . . . — 66

Furtwängler, Ph., Über die Reziprozitätsgesetze für Primzahlpotenzexponenten — 15

Hahn, Hans, Über lineare Gleichungssysteme in linearen Räumen . . . . — 214

Hasse, Helmut, Neue Begründung der komplexen Multiplikation . . . . — 115

Hardy, G. H. und **Littlewood, J. E.,** Elementary theorems concerning power series with positive coefficients and moment constants of positive functions — 141

Hecke, E., Über das Verhalten von $\sum_{m,n} e^{2\pi i \tau \frac{|m^2-2n^2|}{8}}$ und ähnlichen Funktionen bei Modulsubstitutionen . . . . . — 159

Hölder, Otto, Über einen Grenzübergang in Abels Recherches sur les Fonctions Elliptiques . . . . . — 171

Kowalewski, Gerhard, Über die *Batemans*che Transformationsgruppe . . . — 193

Landau, Edmund, Über Dirichletsche Reihen mit komplexen Charakteren — 26

Loewy, Alfred, Über abstrakt definierte Transmutationssysteme oder Mischgruppen . . . . . — 239

Lorey, Wilhelm, August Leopold Crelle zum Gedächtnis . . . . . — 3

Mertens, Franz, Ein Satz zur Bildung algebraisch lösbarer Gleichungen . . — 199

Noether, Emmy, Der Diskriminantensatz für die Ordnungen eines algebraischen Zahl- oder Funktionenkörpers . . . . . — 82

Speiser Andreas, Naturphilosophische Untersuchungen von Euler und Riemann — 105

Study, E., Über Summen von fünf und sechs Quadraten und konforme Transformationen . . . . . — 33

Takagi, Teiji, Zur Theorie des Kreiskörpers . . . . . — 230

Ausgabedaten der Hefte von Band 157.

Heft 1 ausgegeben am 8. November 1926
Heft 2 ausgegeben am 20. Dezember 1926
Heft 3 ausgegeben am 21. März 1927
Heft 4 ausgegeben am 25. Mai 1927

C. F. GAUSS

auf der Terrasse der Göttinger Sternwarte

Das Jahr 1926 ist für das Crellesche Journal und damit auch in gewisser Weise für die Mathematik dadurch von Bedeutung, daß diese älteste deutsche mathematische Zeitschrift in diesem Jahre das Fest ihres hundertjährigen Bestehens feiern darf. Im Januar 1826 erschien in Berlin ihr erstes Heft, herausgegeben von dem Geheimen Oberbaurat Dr. phil. *August Leopold Crelle*, nachmaligem Mitglied der Berliner Akademie der Wissenschaften.

Das achtzehnte Jahrhundert hatte die formale Durchbildung und glänzende Ausgestaltung der Infinitesimalrechnung durch *Euler* und *Lagrange* gebracht und damit einer wichtigen Periode der Mathematik den natürlichen und vollständigen Abschluß gegeben. Nun bereiteten sich sowohl von der Seite der Anwendungen, als auch von der logisch-kritischen Seite her reiche neue Anregungen vor, die sich beide in dem einzigartigen Genius von *C. F. Gauß* vereinigten. Mit ihm und durch ihn begann ein neuer Aufschwung der Mathematik, der sich zum größten Teile auf deutschem Boden vollzog, und für den das neugegründete Journal von größter Bedeutung wurde.

Crelle war kein führender Geist, aber ein begeisterter Jünger seiner Wissenschaft, und er besaß im höchsten Maße die Gabe, fremdes wissenschaftliches Verdienst zu sehen und richtig zu bewerten. So erkannte er, daß die seiner Umgebung angehörigen jungen Mathematiker *N. H. Abel*, *C. G. J. Jacobi* und *J. Steiner*, denen sich sehr bald noch *P. G. Lejeune-Dirichlet*, *J. Plücker* und *A. F. Möbius* zugesellten, neues frisches Leben in der Mathematik erwecken würden, und er schuf mit seinem Journal im richtigen Augenblick den erwünschten Sammelplatz für die zu erwartenden neuen Entdeckungen.

Er selbst hat auch noch die zweite deutsche Mathematikergeneration *Eisenstein*, *Kummer*, *Weierstraß* heranreifen sehen und zu lebhafter Mitarbeit an seiner Zeitschrift gewinnen können.

So wurde das Crellesche Journal der Hauptrepräsentant dieser ganzen deutschen Mathematikerschule, und sein Begründer hat es verstanden, während dreißig Jahren bis zu seinem 1855 erfolgten Tode neben den soeben genannten nicht nur deutsche Mathematiker ersten Ranges, wie *Hesse*, *v. Staudt*, *Borchardt*, *F. Neumann*, *G. Kirchhoff*, *Dedekind* und *Clebsch*, sondern auch ausländische Gelehrte, wie *Poncelet*, *Poisson*, *Liouville*, *Tschebischeff*, *Cayley*, *Hermite* als Mitarbeiter zu gewinnen und sich zu erhalten.

Sein Nachfolger *C. W. Borchardt*, ein sehr feinsinniger und bedeutender Gelehrter, hatte mit *Crelle* die Kunst der Menschenbeurteilung und die Divinations-

auf der Terrasse der Göttinger Sternwarte

gabe für werdende große Talente gemein. In den 24 Jahren seiner bis zu seinem Tode fortgeführten Redaktionstätigkeit (1856—1880) stellte er seine ganze Arbeitskraft fast ausschließlich in den Dienst dieser seiner Lebensaufgabe. Beide Männer besaßen auch die für einen wissenschaftlichen Redakteur unschätzbaren Gaben, daß sie ein weitgehendes, durch keine Vorurteile eingeschränktes Interesse für den Gesamtbereich ihrer Wissenschaft hatten, daß sie ferner die kommenden Führer mit großem Taktgefühl und unfehlbarer Sicherheit erkannten, und daß sie es verstanden, diese Führer zur Mitarbeit im allerweitesten Umfange zu gewinnen. So ist das Crellesche Journal in dieser ersten Hälfte seines Bestehens wirklich die erste und fast die einzige Hauptstelle für die große Entwicklung der Mathematik in dieser Zeit, ganz besonders in Deutschland, gewesen.

Durch diese auch von den folgenden Redakteuren *Kronecker-Weierstraß* (1880—1892) und *Fuchs* (1892—1902) pietätvoll befolgten Grundsätze wurde erreicht, daß das Journal z. B. von jedem der Mathematiker *Abel*, *Plücker*, *Richelot*, *Schellbach*, *Mertens*, *Reye*, *H. Weber* zwischen 15 und 30 Abhandlungen enthält, von *Dirichlet*, *Möbius*, *Kummer*, *Koenigsberger*, *Fuchs* zwischen 30 und 40, von *Eisenstein*, *Gudermann*, *Hesse*, *Hermite*, *Kronecker*, *Stern*, *Frobenius* zwischen 40 und 50, während *Clebsch* mit 51, *Steiner* mit 62, *Cayley* mit 80 und endlich *Jacobi* mit 117 Abhandlungen wohl die größten Anzahlen von Beiträgen dem Journal geschenkt haben, die eine wissenschaftliche Zeitschrift jemals von so hochstehenden Autoren veröffentlichen durfte.

Daß aber *Borchardt* auch die Hauptwerke von *Bernhard Riemann* veröffentlichen konnte, soll ihm gerade in diesem Gedächtnisjahre des großen Mannes besonders gedankt werden, und ebensowenig darf ihm die Publikation der denkwürdigen Abhandlungen von *Helmholtz*, *Georg Cantor* und *Weierstraß* vergessen werden, die damals der Wissenschaft neue Richtungen und neue Ziele gaben.

Auch nach dem schweren letzten Jahrzehnt behauptet sich, wie wir mit Stolz und mit herzlichem Dank gegen unsere Mitarbeiter hervorheben dürfen, das hundertjährige Crellesche Journal in ungebrochener Frische, und wir können seinen Weg in sein nächstes Jahrhundert zuversichtlich und hoffnungsvoll verfolgen.

Die Schriftleitung des Crelleschen Journals hatte den Wunsch, dieses wichtige Jahr im langen Leben ihrer Zeitschrift durch einen Festband zu feiern, zu dem die bedeutendsten Vertreter der mathematischen Wissenschaft in Erinnerung an das, was diese Zeitschrift unserer Wissenschaft im ersten Jahrhundert ihres Bestehens gegeben hat, ein Werk ihres Geistes zur Verfügung stellen möchten.

Zu unserer lebhaften Freude hat dieser Gedanke so starke Zustimmung gefunden, daß wir vielleicht sogar hoffen dürfen, zwei Festbände, nämlich Band 157 und 158 ausgeben zu können. Diese werden mit den Bildern des princeps mathematicorum *C. F. Gauß*, der ersten Herausgeber des Journals, soweit sie zu erlangen waren, und der wichtigsten, schon dahingegangenen Mitarbeiter unserer Zeitschrift in treuer und dankbarer Erinnerung geschmückt sein.

Marburg, den 10. Oktober 1926.

K. Hensel.

August Leopold Crelle zum Gedächtnis.

Von *Wilhelm Lorey* in Leipzig.

Das Journal für die reine und angewandte Mathematik kann in diesem Jahre auf ein hundertjähriges Bestehen zurückblicken. Es gibt nicht viele wissenschaftliche Zeitschriften solchen Alters [1]). Von den heute erscheinenden mathematischen Zeitschriften ist nur das 1794 gegründete „*Journal de l'Ecole polytechnique*" älter. Aus dem Ende des 18. Jahrhunderts stammen auch die Annalen der Physik, die allerdings ihren Titel wiederholt geändert haben; sie hießen ursprünglich von 1790—1794 *Journal der Physik*. Das Organ der Astronomen, *die Astronomischen Nachrichten*, sind 1821 gegründet worden. Eine Lebensdauer von über 100 Jahren war einer populären Zeitschrift mathematischen Inhalts beschieden, die seit 1704 in London für Damen erschien unter dem Titel „*The Ladies Diary or the Womans almanac, containung many delightful and entertaining particulars, peculiarly adapted for the use and diversion of the fair sex*". Diese Zeitschrift wurde 1840 mit einer ähnlichen für Herren bestimmten vereinigt und erschien bis 1871.

Für wissenschaftliche Veröffentlichungen aus dem Gebiet der Mathematik kamen in erster Linie die Berichte und Abhandlungen der verschiedenen Akademien in Betracht. Als wissenschaftliche Zeitschrift, die wertvolle mathematische Arbeiten brachte, z. B. von Leibniz, sind die von 1682 bis 1731 in Leipzig erschienenen „*Acta eruditorum*" zu nennen. —

Gegen Ende des 18. Jahrhunderts unternahm *K. F. Hindenburg*, der seit 1781 zunächst als Extra-Ordinarius und seit 1786 als Ordinarius der Physik in Leipzig wirkte, aber auch mathematische Vorlesungen hielt, wiederholt den Versuch, eine mathematische Zeitschrift ins Leben zu rufen. So erschien von 1781 bis 1785, von ihm mit zwei anderen Professoren der Leipziger Universität herausgegeben, *das Leipziger Magazin für Naturkunde, Mathematik und Ökonomie*, in dem die Mathematik aber nur eine sehr untergeordnete Rolle spielte. 1786 gründete er mit *Johann Bernoulli* das *Leipziger Magazin für die reine und angewandte Mathematik*, das nach drei Jahren schon wieder einging. Schließlich erschien 1795, von *Hindenburg* allein herausgegeben, das *Archiv der reinen und angewandten Mathe-*

[1]) Vgl. *Felix Müller*, Abgekürzte Titel von Zeitschriften mathematischen Inhalts mit Erläuterungen und historischen Notizen. Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung Bd. 12, (1903), S. 426—444.

matik, das es aber nur bis auf drei Bände gebracht hat, und schon 1800, nach fünfjährigem Bestehen, wegen „des Krieges und der Sperrung gegen Rußland" einging. Vielleicht ist aber das Scheitern der *Hindenburg*schen Versuche mehr durch die Einseitigkeit und Engherzigkeit des Herausgebers zu erklären, der als Haupt der kombinatorischen Schule einen großen, lange nachwirkenden Einfluß besaß. Die Anmerkungen, die er als Herausgeber zu Artikeln anderer Verfasser machte, zeigen in wenig erfreulicher Weise, wie er immer mehr in seiner kombinatorischen Orthodoxie erstarrte und dadurch das an sich ganz gesunde Programm, das bei Gründung seines Magazins ausgegeben wurde, gefährdete. Sollte doch im Archiv „der gelehrte Kenner, dem die Vervollkommnung und Erweiterung seiner Wissenschaft vornehmlich am Herzen liegt, Nahrung für den Geist und Veranlassung zum weiteren Nachdenken finden". Das Archiv war aber auch für „den bloßen Liebhaber bestimmt der angenehme Blumen und eßbare Früchte nicht selbst zu ziehen versteht". Die angewandte Mathematik ist besonders durch Aufsätze über Leibrenten und ähnliches vertreten. Zu den Mitarbeitern gehören u. a. *Kästner* in Göttingen und *Pfaff* in Helmstädt, die beide *Hindenburg*s Einseitigkeit verurteilten, wie folgende Stelle aus einem Briefe *Kästner*s vom 28. April 1797 an *Pfaff* zeigt [1]).

> „Über die kombinatorische Analytik denke ich wie Sie. Seitdem die Theologen nicht mehr so streng für eine allein seelig machende Religion sind, haben die Philosophen eine allein kritische Philosophie. Und nun fehlte noch, daß die Mathematiker eine allein analytisch kombinatorische Rechnung hätten".

Nur einjährigen Bestand hatte das 1805 von dem in Cassel lebenden Lehrer der Mathematik *Breithaupt* gegründete *Magazin für das Neueste aus der Mathematik*, ebenso wie das 1823 von dem Mathematiker am Gymnasium in Neuwied *Kretzschmar* ins Leben gerufene „*Magazin für die reine und angewandte Mathematik*". Auch die 1808 gegründeten *Heidelberger Jahrbücher für Literatur, Mathematik und Physik*, sowie das 1811 unter *Bessel*s Mitleitung zum ersten Male erschienene *Königsberger Archiv für Naturwissenschaften und Mathematik* konnten sich nicht über 2 Jahre halten. Mathematische Abhandlungen erschienen wohl auch gelegentlich in Zeitschriften, die ihrem Titel nach nur rein naturwissenschaftlich waren. So zitiert z. B. *Steiner* in einer im ersten Bande des *Crelle*schen Journals veröffentlichten Abhandlung einen von dem Erlanger Professor der Mathematik *Rothe* in *Kastner*s *Archiv der gesamten Naturlehre* [2]) Bd. IV mitgeteilten Beweis des *Euler*schen Polyedersatzes.

Dieser Rückblick auf wenig geglückte Versuche, eine mathematische Zeitschrift ins Leben zu rufen, läßt schon das große Verdienst erkennen, das sich *August Leopold Crelle* durch die Gründung *des Journals für die reine und angewandte Mathematik* vor hundert Jahren erworben hat.

Crelle war nicht Mathematiker von Beruf. Geboren am 11. März 1780 zu Eichwerder bei Wriezen a. O. als Sohn eines königlichen Deichinspektors war er wesentlich Autodidakt. Äußere Verhältnisse führten ihn zum Beruf eines Wege-

---

[1]) Sammlung von Briefen, gewechselt zwischen *Johann Friedrich Pfaff*, Herzog *Karl von Württemberg*, *F. Bouterwek*, *A. v. Humbold*, *A. G. Kästner* u. a. Herausgegeben von *Karl Pfaff*, Leipzig 1853.

[2]) Dieses Archiv erschien in Nürnberg von 1824—1835.

bauers. Er trat in den preußischen Staatsdienst ein und stieg bis zum geheimen Oberbaurat und Mitglied der Oberbaudirektion auf. Unter seiner Leitung sind viele Kunststraßen entstanden; die Berlin-Potsdamer Eisenbahn wurde nach seinem Entwurfe gebaut. Über technische Dinge hat er viel publiziert. Seit 1818 gab er ein Archiv für Baukunst und ihre Hilfswissenschaft heraus, dem später ein Journal für die Baukunst folgte. Daneben zeigen sich schon früh seine starken mathematisch-theoretischen Interessen in zahlreichen mathematischen Veröffentlichungen. Es waren z. B. Lehrbücher der elementaren Mathematik zum Selbstunterricht, eine zweibändige Sammlung mathematischer Aufsätze und Bemerkungen (Berlin 1822) eine Monographie über die Anwendung des Rechnens mit veränderlichen Größen auf Geometrie und Mechanik (Berlin 1816). Auch das Parallelenproblem hat ihn beschäftigt. Nach einem später von ihm gegebenen Zitat hat er schon 1815 in einer mir nicht bekannt gewordenen Zeitschrift „Intelligenzblatt" darüber etwas veröffentlicht. Aus dieser Beschäftigung mit Grundfragen der Geometrie, die ihn auch zur Übersetzung von *Legendres* Geometrie veranlaßten, erwuchsen später Abhandlungen, zuerst von ihm in der Berliner Akademie, deren Mitglied er 1828 geworden war, vorgetragen und später in seinem Journal veröffentlicht. Er macht darin u. a. wohl zuerst darauf aufmerksam, daß die *R. Simon* zugeschriebene Definition der Ebene, die aber schon bei *Proclus* erwähnt wird und bei *Heron* vorkommt: Die Ebene ist die Fläche, welche jede Gerade, die mit ihr zwei Punkte gemein hat, ganz enthält, eine unbewiesene Voraussetzung in sich schließt. Er definiert später die Ebene als Ort aller Geraden, die durch einen beliebigen Punkt A und eine beliebige Gerade BC im Raum gehen [1]).

M. Simon, der in seiner „Entwicklung der Elementargeometrie im 19. Jahrhundert" [2]) *Crelle* 17 mal zitiert, nennt insbesondere diese Abhandlung auch heute noch lesenswert. Viele seiner Abhandlungen und selbständigen Schriften sind heute vergessen [3]). Immer wieder neu aufgelegt erscheinen aber unter seinem Namen seine großen Rechentafeln [4]). *Crelles* Haupt- und unvergängliche Bedeutung liegt in dem, was er geleitet von einer unermüdlichen Liebe zur Mathematik organisatorisch für die Pflege der mathematischen Wissenschaft geschaffen hat.

Als er im Dezember 1825 das Vorwort schrieb, mit dem er das Journal für die reine und angewandte Mathematik in zwanglosen Heften eröffnete, gehörte er dem Ministerium des Inneren an. Er weist in dem Vorwort auf die seit 1810 erscheinenden Annalen von Gergonne hin:

> „Auch in anderen Sprachen fehlt es mindestens weniger an Gelegenheit einzelnen mathematischen Gegenständen die Publizität geben.
>
> Nur im Deutschen gibt es eine solche Gelegenheit nicht. Dieses scheint nicht billig zu sein; denn die Mathematik hat unter den Deutschredenden nicht etwa weniger Freunde als unter anderen Völkern,

---

[1]) Vgl. *M. Zacharias*: Elementargeometrie und elementare nicht-euklidische Geometrie in synthetischer Behandlung. Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften Band III, 1, S. 875.

[2]) Jahresber. der Deutschen Mathematikervereinigung. Der Ergänzungsbände 1. Bd. (1906).

[3]) Ein vollständiges Verzeichnis s. *Poggendorff*: Biographisch-literarisches Handwörterbuch, Bd. 1.

[4]) In seinem Artikel „Numerisches Rechnen" (Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften I, 2, S. 945) sagt *Mehmke*: „Den größten Ruf genießen mit Recht *A. L. Crelles* Rechentafeln."

sondern die Deutschen haben, vermöge ihrer Unparteiligkeit und Neigung, die Wahrheit anzuerkennen, wo sie auch zu finden sein mag, so wie vermöge ihrer Beharrlichkeit und ihrer Vorliebe für das Ergründen, gerade für die Mathematik einen vorzüglichen Beruf, wie es auch die Geschichte ihrer Wissenschaft beweist. Da nun eine Zeitschrift in der Tat ein sehr wirksames Mittel ist, eine Wissenschaft zu fördern und zu verbreiten, sie gegen fremdartige Einflüsse zu verwahren, gegen Unterjochung unter Mode, Autoritäten, Schule und Rücksichten zu schützen und im freien Reiche des Denkens zu erhalten, so ist es wohl der Mühe wert zu versuchen, ob sich eine solche in Deutscher Sprache für die Mathematik ins Leben rufen und darin erhalten läßt".

Drei Hefte in dem auch heute noch üblichen Quartformat waren bis zum Herbst 1826 erschienen [1]), als *Crelle* sich in einer ausführlichen Eingabe vom 14. Oktober 1826 an das Kultusministerium in Berlin wandte, mit der Bitte um Unterstützung für sein Journal. Mit dieser Eingabe werden die drei Volumina umfassenden „Akta betreffend den geheimen Oberbaurat *Crelle*" im Berliner Kultusministerium (jetzt Ministerium für Kunst, Wissenschaft und Volksbildung) eröffnet [2]). *Crelle* weist auf die günstige Aufnahme hin, die seine Zeitschrift im In- und Ausland gefunden hat. *Gauß* hat Mitarbeit zugesagt. Von *Hachet* in Paris sind ihm Beiträge zur Verfügung gestellt worden. Die Annalen von Gergonne werden von der französischen Regierung unterstützt. Der Zweck seines Journals ist, nicht allein einzelne Resultate der Forschungen der Mathematiker aufzunehmen, neue Ansichten und Gedanken, welche in der Mathematik entstehen, gegenseitig mitzuteilen und zu verbreiten und diese Wissenschaft selbst zu fördern und entwickeln zu helfen, sondern auch weniger bekannte Sätze bekannter zu machen und dem Lernenden Winke und Nachweisungen für seine Studien zu geben.

Finanziell hat er von der Redaktion keinen Gewinn; werden ihm doch nur die Kosten für die Übersetzungen aus anderen Sprachen und die Besorgung der Korrekturen vergütet.

Wäre ich nicht so ganz ohne alles Geldvermögen wie ich es bin:

„Ich werde mein Letztes aus eigenen Mitteln daransetzen, um für eine Wissenschaft, welcher ich mein Leben gewidmet, und welcher ich unter dem Druck von Amtsgeschäften von niemanden weder unterstützt noch erleichtert, sondern im Gegenteil doppelt und dreifach mit Amtsarbeiten beladen fast schon meine Gesundheit und beinahe meine Augen geopfert habe, alles zu tun, was in meinen Kräften steht".

Diese Eingabe fand im Ministerium eine sehr günstige Aufnahme. Der Referent *Süvern* entwirft ein Immediatgesuch an den König und bittet den Generalleutnant und Chef des Generalstabs *von Müffling* um Unterstützung des Gesuchs. Bei der preußischen Heeresverwaltung hatte man damals unter dem Eindruck der französischen Einrichtungen großes Interesse für die Förderung des mathematischen Unterrichts und so erklärt sich *v. Müffling* auch sofort bereit, den Antrag zu unterstützen, der aber beim König keinen Erfolg hatte. In einer Kabinettsorder vom 15. Februar 1827 an den Minister *v. Altenstein* heißt es:

„Ich finde mich nicht bewogen, den Absatz des von dem geheimen Oberbaurat *Crelle* herausgegebenen Journals durch die von Ihnen in Antrag gebrachte außerordentliche Bewilligung aus der Staatskasse zu befördern".

Friedrich Wilhelm.

---

[1]) Der Verlag ist von Bd. 2 an Georg Reimer; Bd. 1 war bei Dunker und Humblot erschienen.

[2]) Für die Vermittlung der Erlaubnis, die Akten, die ich schon vor zwölf Jahren im Interesse meiner Abhandlung „Das Studium der Mathematik an den deutschen Universitäten seit Anfang des 19. Jahr-

Dafür traten nun aber die Heeresverwaltung und das Kultusministerium als Förderer ein: Für die Militärbildungsanstalten wurden 3 Exemplare bestellt und das Kultusministerium übernahm 20 Exemplare für die Universitätsbibliotheken in Bonn, Breslau, Halle, Greifswald und Münster und die Gymnasien in Paderborn, Minden, Elberfeld, Düsseldorf, Erfurt, Pforta, Frankfurt a. O., Danzig, Thorn, Elbing, Gumbinnen, Kollegium Fridericianum in Königsberg, Posen, Hirschberg i. Schles. und Stettin. Mit dem Dank an den Minister für diese Förderung beantragt *Crelle* auf den Titel des Journals als Zusatz: „Unterstützt durch die Munificenz königlich preußischer höchster Behörden". Der Minister ist mit einem solchen Zusatz grundsätzlich einverstanden und genehmigt ihn in der noch heute üblichen Form: Mit tätiger Beförderung hoher preußischer Behörden. Das Ministerium machte auch die Berliner Akademie auf das Journal aufmerksam, die drei Exemplare bestellt. Auch durch die Regierungskollegien der preußischen Provinzen und durch die Gesandtschaften an den Höfen in London, Neapel und Rom wird auf das Journal aufmerksam gemacht. Durch die Überweisung an einzelne Schulen hat z. B. *Weierstraß*, wie er *Stäckel* gelegentlich erzählt hat, „in seiner Gymnasialzeit in Paderborn große mathematische Anregungen erfahren, als er von dem Bibliothekar zur Hilfe herangezogen die unaufgeschnittenen Hefte des *Crelle*schen Journals entdeckte, mit den schönen Abhandlungen von *Steiner*, von denen auch ein Primaner etwas verstehen konnte" [1]).

Immerhin hätte die amtliche Unterstützung allein dem Journal auf die Dauer gewiß nicht die Lebenskraft und das Ansehen verschafft, deren es sich bald erfreuen sollte. Hauptsache war, daß *Crelle* in seinem Vertrauen auf die jungen Mitarbeiter sich nicht getäuscht hatte. Darin liegt gerade das unvergängliche Verdienst des damals schon bald fünfzigjährigen *Crelle*, daß er den jungen mathematischen Forschern, die in den zwanziger Jahren des vorigen Jahrhunderts in Deutschland auf einmal hervortraten, in seinem Journal eine leichte Publikationsmöglichkeit verschaffte. Im ersten Bande ist *Steiner* schon mit 5 Arbeiten vertreten, *Jacobi* mit einer. Der zweite Band bringt von *Jacobi* schon 9 Arbeiten. Vom 3. Band erscheinen auch *Dirichlet*, *Möbius* und *Plücker*, und mit den beiden letzten hervorragende Forscher, die nicht zu dem Berliner Kreis gehörten. *Gauß* ist in den Bänden drei und vier mit Beiträgen vertreten. Aber auch nichtdeutsche Mitarbeiter finden wir schon von Anfang an. Von ihnen ist natürlich in erster Linie der Norweger *Abel* zu nennen, von dem in den drei ersten Bänden 22 Artikel enthalten sind. Der 5. und 6. Band bringt Briefe *Abels*, die *Crelle* nach dem frühen Tode dieses Forschers veröffentlichte.

Crelle war eifrig bemüht, *Abel* eine Berufung nach Berlin zu verschaffen. Im Sommer 1828 hatte er beantragt, wegen seines Augenleidens aus dem Ministerium des Innern in das Kultusministerium überwiesen zu werden, was beim

---

hunderts", B. G. Teubner 1916, benutzen konnte, erneut einzusehen, bin ich Herrn Ministerialrat Professor *Metzner* zu Dank verpflichtet.

[1]) Vgl. *P. Stäckel*: Das Archiv der Mathematik und Physik, ein Geleitwort zu den 10 ersten Bänden der 3. Folge. Jahresber. d. D. Mathem. Vereinig. Bd. 15, (1906), S. 323.

Kultusminister, dem Minister des Inneren und dem Finanzminister in einer gemeinsamen Eingabe vom 28. Oktober 1828 an den König sehr befürwortet wurde. Es heißt darin:

> „Im Ministerium der geistlichen Angelegenheiten kann er sehr wesentliche Dienste leisten, indem er bei unmittelbarer genauer Kenntnisnahme von dem gegenwärtigen Zustande des mathematischen Unterrichts in allen verschiedenen Lehranstalten des Kgl. Staates auf gleiche Weise durch seine gediegenen Kenntnisse wie durch seine langjährige auch im Lehrfach geübte Erfahrung in den Stand gesetzt wird, diejenigen Mittel und Wege zu erforschen und in Vorschlag zu bringen, wodurch die großen Schwierigkeiten gründlich beseitigt werden könnten, welche diesen Zweig des öffentlichen Unterrichts bei fortwährend steigender Wichtigkeit desselben noch immer an einer allgemeinen Ausbreitung und einem überall gesicherten Erfolge hindern."

Schon wenige Tage später, am 8. November 1828, erging die Kabinettsorder, durch die *Crelle* „Zur Benutzung seiner Kenntnisse in der Mathematik" in das Kultusministerium übernommen wird [1]). Im Anschluß daran erhält er sofort den Auftrag, den mathematischen Unterricht der Gymnasien zu revidieren und dann eine Instruktion auszuarbeiten, die über Methode und Lehrplan des mathematischen Unterrichts Anordnung trifft. Am 8. August 1829 reicht er einen sehr eingehenden Bericht ein, in dem er am Schluß vorschlägt, eine Kommission zu bilden zur Beratung eines mathematischen Lehrplans. Das Ministerium geht auf den Vorschlag ein; die aus 5 Mitgliedern bestehende Kommission in der die mathematische Forschung auf *Crelles* Vorschlag durch den erst vierundzwanzigjährigen Privatdozenten und Lehrer an der Kriegsakademie *Dirichlet* vertreten war, hielt im Winter 1829/30 elf Sitzungen ab und reichte dann einen von *Crelle* verfaßten und eigenhändig geschriebenen klaren Bericht ein, aus dem hier das am Ende vorgeschlagene Preisausschreiben für ein Lehrburh des Rechnens und der Mathematik von besonderem Interesse ist. Das Buch soll z. B. enthalten:

> Theorie des Imaginären und die Entwicklung der Reihen für imaginäre Exponenzial- und Kreisgrößen, Auflösung der Gleichungen durch Näherung, Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten. Außerdem soll dieses Buch „einiges aus der darstellenden Geometrie" bringen.

Der Vorschlag eines Preisausschreibens scheint an der Enge der Finanzen gescheitert zu sein, wie diese auch größere, bedeutendere Pläne für die Organisation des mathematischen Studiums, für die *Crelle* sehr interessiert war, zu Fall gebracht hat: *Das polytechnische Institut.*

Auf die Geschichte der sich viele Jahre hinziehenden Pläne, in Berlin nach Pariser Muster ein polytechnisches Institut zu errichten, ein Plan, bei dem u. a. auch die Berufung von *Gauß* nach Berlin eine große Rolle spielte, kann hier nur

---

[1]) Allerdings wird er nicht unter den Beamten des Kultusministeriums geführt. Vgl. *Lüdicke*: Die Preußischen Kultusminister und ihre Beamten im ersten Jahrhundert des Ministeriums (Stuttgart und Berlin 1918, Cotta'sche Buchhandlung), worin auf Grund der Personalakten alle im Ministerium Angestellten vom Minister bis zu den Kanzleibeamten mit den äußeren Daten ihres Lebens aufgezählt sind; *Crelle* befindet sich nicht darunter. Er ist offenbar in der Liste des Ministeriums des Inneren weitergeführt worden.

Die Angabe von *Moritz Cantor* in seinem Artikel: *Crelle* (Allgemeine Deutsche Biographie, Bd. 4, S. 589), daß *Crelle* schon seit 1824 von Staatswegen nur zu mathematischen Arbeiten herangezogen wurde, ist nicht ganz zutreffend.

soweit eingegangen werden, als *Crelle* amtlich damit befaßt wurde [1]). In einem Brief vom 6. Januar 1828 hat der Chemiker der Berliner Universität *Mitscherlich* beim Minister die Gründung des polytechnischen Instituts beantragt. Darauf wurde ein halbes Jahr später *Crelle* in einem ausführlichen Schreiben des Ministers zu einem Gutachten aufgefordert, wobei der Minister es ausdrücklich als eine Aufgabe des zu gründenden Instituts bezeichnete, Lehrer für die mathematischen Fächer heranzubilden. Schon am 24. August 1826 reicht *Crelle* einen genauen Plan für ein mathematisches Seminar ein, das eine Bibliothek und ein mathematisches Lesezimmer besitzen soll. In einem ergänzenden Bericht vom 15. Oktober desselben Jahres entwickelt er einen eingehenden Studienplan für die Mitglieder des Seminars, für die nach der Erledigung der elementaren Studien ein zweijähriger Jahreskursus mit 18 Stunden Vorlesung und ebensoviel Stunden Repetitorien und Übungen vorgesehen werden. Dieser Studienplan zeigt unverkennbar *Jacobi*schen Einfluß. Wird doch verlangt: elliptische Funktionen, integrierender Multiplikator, höhere Differentialgleichungen, Integration der partiellen Differentialgleichungen.

Crelle war aber auch eifrig bemüht, hervorragende Mathematiker als Leiter des Seminars vorzuschlagen, und so macht er in einer denkwürdigen Eingabe vom 28. Oktober 1828 dem Minister den Vorschlag, *Abel* nach Berlin zu berufen. Es heißt darin:

> „Die Herren *Dirichlet, Abel, Jacobi und Steiner*, von welchen der erste und die beiden letzten schon im preußischen Staate sich befinden, bilden in der Tat eine Vereinigung von jungen Mathematikern, aus welchen dieser Wissenschaft die schönsten Hoffnungen aufblühen und vielleicht einst Geometer vom ersten Rang hervorgehen können, denn so jung sie sind, verdankt ihnen schon die Wissenschaft wesentliche Erweiterungen.
>
> Der preußische Staat nahm einst die verdienstvollsten Mathematiker ihrer Zeit, *Euler, Lagrange, Lambert*, auf und gewährte ihnen, was sie in andern Ländern nicht fanden: eine ehrenvolle Stellung, in welcher sie über die Wissenschaft, wie sie sie fanden, und über ihre Zeit sich emporschwingen konnten, welches vielleicht ohne diesen würdigen Schutz nicht geschehen wäre.
>
> Der preußische Staat wird auch jetzt von neuem Talente unterstützt, wie die Natur sie nur selten hervorbringt, und Ew. Exzellenz Fürsorge wird die Wissenschaft dieses verdanken.
>
> Ich meinerseits darf mich also auch der in meinem Eifer für meine Wissenschaft so erfreulichen Hoffnung überlassen, hier in meinem Vaterlande eine Epoche für die Mathematik beginnen zu sehen, die einst vielleicht in der Geschichte der Wissenschaft ruhmvoll neben der früheren Zeit genannt werden kann."

Ein halbes Jahr darauf wiederholt *Crelle* in einer Eingabe vom 2. April 1829 dringend den Antrag auf Berufung von *Abel*. Er hat beim Minister Erfolg, aber es war zu spät. Am 7. Mai 1829 muß *Crelle* berichten, daß *Abel* am 6. April gestorben ist. Nun reicht er den von ihm verfaßten Nachruf ein, den er vor der Veröffentlichung in seinem Journal dem Minister zur Genehmigung unterbreitet, weil er darin von der geplanten Berufung *Abels* spricht [2]). Im Sommer 1830 unternahm *Crelle* eine Studienreise nach Frankreich, worüber er einen zwanzig Spalten langen

---

[1]) Ausführliches über das Polytechnische Institut enthält die in Anmerkung 2, S. 4 genannte Imukabhandlung, sowie mein in der Berliner Mathematischen Gesellschaft gehaltener Vortrag: Bestrebungen für eine Organisation des mathematischen Studiums in den ersten Jahrzehnten des vorigen Jahrhunderts (Berl. Math. Ges. 15, (1916), S. 97–107).

[2]) *Crelles* Journal Bd. 4, S. 402/4.

Reisebericht einreichte. Die Organisation des mathematischen Unterrichts in Frankreich findet seinen vollen Beifall, hingegen ist er mit dem Zustand der damaligen mathematischen Wissenschaft nicht zufrieden. Es wird nach seiner Ansicht zur Zeit dort zu sehr die angewandte Mathematik getrieben:

„Man ist in Frankreich zu einem wahren Vorurteil gegen die Kultur der reinen Mathematik gekommen.

Der wahre Zweck der Mathematik ist das Mittel der innersten Aufhellung des Verstandes und Übung der Geisteskräfte."

Diese Auffassung von dem „wahren" Zweck der Mathematik, die im Jahre 1830 der mathematische Dezernent der preußischen Unterrichtsverwaltung unter dem Eindruck der Schöpfungen der jungen mathematischen Forscher mit Begeisterung vertritt, ist in den folgenden Jahrzehnten für die gesamte Organisation des mathematischen Unterrichts an Universitäten maßgebend geworden; sie hat sich als unmittelbare Folge des Aufschwungs herausgebildet, der durch die aufstrebende mathematische Jugend erreicht wurde. Übrigens entspricht diese Auffassung durchaus der damals herrschenden neuhumanistischen Denkweise. Sie trug wohl auch dazu bei, daß die angewandte Mathematik im Journal immer mehr zurücktrat und später trotz des Titels vollständig ausfiel [1]). *Crelle* selbst freilich hat auch in den letzten Jahren noch einige Arbeiten aus den Gebieten der angewandten Mathematik veröffentlicht.

Auf Grund des *Crelle*schen Reiseberichts entwarf der seit 1818 im Ministerium als vortragender Rat tätige Altphilologe *Johannes Schulze* mit ersichtlich gutem Verständnis ein Reglement für das zu errichtende Seminar. Von *Crelle* selbst liegen weitere Berichte in den Akten, die die Organisation des Studiums betreffen, nicht mehr vor. Aus mehreren Eingaben ersieht man, daß sein Gesundheitszustand und seine äußere Lage sich wenig günstig gestaltet haben. Um so mehr ist der unermüdliche Eifer anzuerkennen, mit dem er sich trotz aller Beschwerden der redaktionellen Tätigkeit widmete. Er selbst veröffentlichte 44 Aufsätze in seinem Journal, wovon seine Encyklopädische Darstellung der Theorie der Zahlen (Berlin 1845) auch als besonderes Buch erschienen ist. Auf seine Bitte vom 11. Januar 1848 hatte sich der Minister bereit erklärt, 100 Exemplare zur Verteilung an die Schulen zu bestellen. Anfangs brachte er auch einige Nachrichten von Büchern, nicht Kritiken, von denen er wenig hält, „da das geringste Bessermachen dennoch mehr nütze also die Kritik" [2]). Unter dem Titel: „Aufgaben von Anderen" hat er viele Aufgaben veröffentlicht. Er hat ihnen die Überschriften „vom Herausgeber" nicht beigefügt, ebensowenig bei manchen Artikeln, die unter „Ungenannt" veröffentlicht wurden, „weil es möglich wäre, daß ihm ohne sich dessen zu erinnern, die Idee zu dieser oder jener Aufgabe usw. durch irgend ein Buch oder ein Gespräch mitgeteilt wäre und er die Möglichkeit, etwa unbewußt fremde Ideen sich zuzuschreiben, entziehen wollte". Diese schon im Band 2 gemachte Bemerkung wiederholt er in dem

---

[1]) Geschichtlich interessant ist es, daß die erste Abhandlung im ersten Band zu der angewandten Mathematik gehört: Oberbaudirektor *Eytelwein* schrieb „Über die Bestimmung der Wassermenge eines Stromes".

[2]) *Crelles* Journal, Bd. 2, S. 399.

bibliographisch sehr genauen und wertvollen Verzeichnis des Inhalts der Bände 1—50 seines Journals. Als Besonderheit seiner redaktionellen Tätigkeit sei noch erwähnt, daß er bemüht war, die Faksimiles von Handschriften verstorbener Mathematiker zu bringen; in einer besonderen Eingabe an das Ministerium vom 10. Januar 1846 bittet er um Unterstützung in diesem Plan. So bringen die ersten 50 Bände denn auch 75 Faksimiles, darunter auch von Mathematikern des 18. Jahrhunderts. Dem 50. Bande ist ein Faksimile eines Briefes von *Gauß* an *Crelle* beigefügt. Als ein Hauptzug seiner redaktionellen Tätigkeit kann wohl hervorgehoben werden, daß er dem zu Beginn aufgestellten Programm treu bleibend sich im Gegensatz z. B. zu *Hindenburg* bemühte, Einseitigkeiten zu vermeiden. Der 51. Band im Jahre 1854 bringt die Abhandlung von *Weierstraß* „Über die Theorie der analytischen Fakultäten", die u. a. Kritik an den Arbeiten *Crelles* über diesen Gegenstand übt. Da schreibt nun der 74 jährige *Crelle* in der Anmerkung:

> „Mit wahrer wissenschaftlicher sowohl als persönlicher Befriedigung habe ich die beifolgende Abhandlung empfangen.... Meine eigenen Arbeiten über den Gegenstand betreffend, so hätte ich zur Rechtfertigung der Unvollständigkeit, die Herr *Weierstraß* daran bemerkt hat, wohl manches zu sagen, aber meine durch hohes Alter und stete Kränklichkeit geschwächte Arbeitskraft reichen zu dergleichen nicht mehr hin. Ich muß also darauf verzichten, was ohnehin sehr wohl angeht, da ich bei meinen wissenschaftlichen Bemühungen nie auf mich selbst Rücksicht genommen und nach Ruhm und Lob, sondern nur nach meinen Kräften nach Förderung der Wahrheit gestrebt habe und es mir ganz gleich gilt, wer es sei, der die Wahrheit mehren kommt: ob ich oder jemand anderes, wenn nur überhaupt eine weitere Annäherung an die Wahrheit erzielt wird."

Mit diesen Worten hat in der Tat *Crelle* sein segensreiches Wirken für die Mathematik charakterisiert. Äußere Anerkennungen sind aber nicht ausgeblieben: Er hatte den seiner amtlichen Stellung entsprechenden preußischen Orden. Daß er Mitglied der Berliner Akademie der Wissenschaften war, ist oben schon erwähnt. Die Akademie in Stockholm und die American Philosophical Society in Philadelphia hatten ihn zum auswärtigen Mitglied ernannt. Von den Akademien in Petersburg, Neapel und Brüssel war er Korrespondent, und die Hamburger Gesellschaft zur Verbreitung mathematischer Wissenschaften zählte ihn als Ehrenmitglied. Am 6. Oktober 1856 starb *Crelle*. Sein Nachfolger in der Redaktion des Journals *C. W. Borchard* sagt in dem warmen Nachruf [1]):

> Wenig Unternehmungen sind so zur rechten Zeit gekommen wie *Crelles* Journal. Es wurde der Sammelplatz für die Arbeiten jener Männer, die vor einem viertel Jahrhundert der Mathematik einen neuen Aufschwung gaben, und wenn dieser Aufschwung überall als das Werk deutscher Wissenschaft anerkannt würde, so ist dies zum großen Teil der Vereinigung zu verdanken, in welcher die neuen Entdeckungen durch *Crelles* Vermittlung erschienen.

Wenn das Journal für die reine und angewandte Mathematik jetzt in das zweite Jahrhundert seines Bestehens eingetreten ist, so war es wohl berechtigt, das neue Jahrhundert mit einem dankbaren Rückblick auf das Wirken seines für die mathematische Wissenschaft so begeisterten Begründers *August Leopold Crelle* zu eröffnen.

Juli 1926.

---

[1]) *Crelles* Journal, Bd. 53. Vorwort.

Auszug aus einem Briefe von *G. Mittag-Leffler* an den Herausgeber dieser Zeitschrift.

Hundert Jahre sind also in den nie versiegenden Strom der Zeit verronnen, hundert Jahre, seitdem Ihre Zeitschrift zum erstenmal ans Licht trat.

August Leopold Crelles unvergänglicher Ruhm bleibt es, daß er zu einem Zeitpunkt, da er nicht darauf rechnen konnte, in einer hohen Stellung der mathematischen Wissenschaft in seinem preußischen Vaterlande eine Stütze zu finden, doch das Unternehmen wagte, dort eine deutsche nationale mathematische Zeitschrift herauszugeben. Frankreich hatte ja bereits seit 16 Jahren in den „Annales de Mathématique de Gergonne" eine solche, aber das in viele verschiedene Staaten zersplitterte Deutschland hatte noch nicht daran denken können, sich um eine deutsche Zeitschrift dieser Art zu einigen und zu sammeln. *Crelle* wagte jedoch die Tat, vielleicht ohne volles Verständnis dafür, wie schwach die einheimischen Kräfte waren, über die zu verfügen er hoffen konnte.

Wohl lebte, bald 50 Jahre alt, *Carl Friedrich Gauß* in nach allgemeiner Ansicht einsamer Größe in seinem hannöverschen Lande, aber es war jedenfalls undenkbar, ihn an ein solches Unternehmen, wie *Crelle* es plante, zu binden.

Crelle verstand es indessen, für dieses sein Unternehmen ausländische Kräfte allerhöchsten Ranges zu gewinnen. Ohne dies wäre die Zeitschrift nie zu dem geworden, was sie später ward. Daß die Wichtigkeit dieses Umstandes verkannt wurde, hat dazu geführt, daß in den verflossenen 100 Jahren so viele ähnliche *nationale* Unternehmungen verkümmert sind. Die Mathematik, das mathematische Denken, seiner Natur nach mehr als alles andere international, darf und kann nicht nationalisiert werden.

Der erste Band wurde durch einen Aufsatz des jungen norwegischen Studenten *Niels Henrik Abel* eingeleitet und enthält im ganzen 7 Abhandlungen von ihm. Ein „Lehrer der Mathematik in Berlin", der Schweizer *Jakob Steiner*, steuerte 4 Abhandlungen bei, hinzu kommt jedoch auch der 22-jährige Professor der Mathematik in Königsberg *Carl Gustav Jacob Jacobi* mit einem Aufsatz. Diese, die einzigen Beiträge von bleibendem Werte in dem ersten Bande der Zeitschrift, nehmen insgesamt 215 von den 387 Seiten des Bandes ein.

August Leopold Crelle war übrigens vom sozialen Gesichtspunkte aus ein hervorragender und verdienstvoller Mann in hoher sozialer Stellung, „Geheimer Oberbaurat", Erbauer mehrerer der wichtigsten Weganlagen Preußens sowie seiner

ersten Eisenbahnen, als Mathematiker Autodidakt, aber durchdrungen von der aufrichtigsten Überzeugung von der Bedeutung der Mathematik für das Leben und erfüllt von dem brennenden Wunsche, sie einer größeren Allgemeinheit zugänglich zu machen. *Abel* berichtet in einem Brief an *Hansteen* über sein erstes Zusammentreffen mit *Crelle*: „Es dauerte lange, bis ich ihm begreiflich gemacht hatte, was der eigentliche Zweck meines Besuches war, und es sah aus, als sollte er ein klägliches Ende finden; ich schöpfte aber Mut, als er mich fragte, was ich bereits in der Mathematik gelesen hätte. Als ich ihm die Schriften einiger der hervorragendsten Mathematiker genannt hatte, wurde er sehr zuvorkommend und, wie es schien, wirklich froh. Er ließ sich in ein weitläufiges Gespräch mit mir über viele verschiedene schwierige Sachen ein, die noch nicht entschieden waren, und als ich, indem wir auf die höheren Gleichungen zu sprechen kamen, ihm sagte, ich hätte die Unmöglichkeit, die 5. Grades allgemein aufzulösen, bewiesen, wollte er es nicht glauben und sagte, er wolle dagegen opponieren. Ich überreichte ihm daher ein Exemplar; er sagte aber, er könne nicht den Grund von mehreren meiner Schlüsse einsehen. Dasselbe haben mehrere andere gesagt, und ich habe daher eine Umarbeitung davon vorgenommen". *Weierstraß* hat mir erzählt, daß *Crelle* ihm diese erste Begegnung etwas anders geschildert hätte, aber doch der Hauptsache nach auf dieselbe Weise. *Crelle* war zur Zeit des Besuches *Abels* Examinator am Gewerbe-Institut in Berlin, ein Amt, an dem er kein sonderliches Vergnügen fand. Da trat eines schönen Tages in sein Zimmer ein blonder junger Mensch mit sehr geniertem, sehr jugendlichem und sehr intelligentem Aussehen. *Crelle* glaubte, der Betreffende wünsche eine Prüfung zur Aufnahme in das Gewerbe-Institut abzulegen, und erklärte, daß hierzu eine Menge Einzelprüfungen nötig seien. Da endlich tat der junge Mann seinen Mund auf und erklärte: „Nichs Examen, nur Mathematik". *Crelle* merkte, daß er es mit einem Ausländer zu tun haben müßte, und versuchte es nun mit Französisch, das *Abel*, wie sich herausstellte, gut, wenn auch etwas mühsam sprach. Auf *Crelles* Frage nach seinen Studien sagte er, daß er unter anderem *Crelles* eigene, vor kurzem, 1823, erschienene Arbeit über „Analytische Fakultäten" gelesen habe, die, ungeachtet vieler Irrtümer, doch ihn höchlichst interessiert hätte. Bei der Erwähnung der vielen Irrtümer wurde *Crelle* ganz Ohr, und nun entspann sich das Gespräch, das später zu einem so engen Verhältnis zwischen *Crelle* und *Abel* führen sollte. Wie vorher *Holmboe* und noch mehr *Hansteen*, war auch *Crelle* weit davon entfernt, *Abels* Arbeiten verstehen zu können. Er hat selbst hierfür einen drastischen Beweis geliefert. *Abels* Arbeit über die „Binomialreihe" findet sich in dem ersten Bande von *Crelles* eigener Zeitschrift veröffentlicht und war von *Crelle* persönlich aus dem französischen Manuskript *Abels* ins Deutsche übersetzt worden. Dies hindert nicht, daß *Crelle* nach *Abels* Tod im 4. und 5. Bande seiner Zeitschrift eine Abhandlung über denselben Gegenstand veröffentlicht, in der er vollständig auf dem alten vor-*Abel*schen Standpunkt steht und sich völlig unbekannt damit zeigt, daß die ganze Frage durch *Abel* ihre endgültige Lösung erhalten hat. Wenn aber auch *Crelle* ebensowenig wie *Abels* norwegische Freunde seine Arbeit verstand, so verstand er doch *Abels* Genie, und mit diesem Verständnis wurde er *Abels* wirksamer Freund und Beschützer. Schon bei *Abels* erstem Besuch

hatte *Crelle* seinen Plan erwähnt, eine große deutsche mathematische Zeitschrift herauszugeben. Die Bekanntschaft mit *Abel* und die Aussicht, ihn zum Mitarbeiter zu erhalten, beschleunigte die Verwirklichung des Planes. Das erste Heft des „Journals für die reine und angewandte Mathematik", *Crelles* großen Lebenswerkes, das seitdem bereits seinen 155. Band erlebt hat, erschien im Februar 1826. Die 7 verschiedenen Abhandlungen von *Abel* waren von ihm in französischer Sprache redigiert worden, wurden aber von *Crelle* ins Deutsche übersetzt. *Abel* hatte nun Gelegenheit erhalten, in einem Weltorgan den zeitgenössischen Mathematikern seine Entdeckungen mitzuteilen. Daß wiederum *Crelles* Journal ein Weltorgan wurde, das während langer Zeiten eine führende Stellung innerhalb der mathematischen Publikation innegehabt hat, ist wesentlich *Abel* zuzuschreiben, dessen Arbeiten vom ersten Augenblick an der Zeitschrift den höchstmöglichen Rang verliehen.

Über die Reziprozitätsgesetze für Primzahlpotenzexponenten.

Von *Ph. Furtwängler* in Wien.

Einleitung.

Die Reziprozitätsgesetze in algebraischen Zahlkörpern sind bisher nur für Primzahlexponenten allgemein entwickelt. Zu diesen Entwicklungen haben Untersuchungen von *E. Kummer*, die zum großen Teil in diesem Journal erschienen sind, den Anstoß gegeben und die Grundlage geschaffen. Ich habe bereits während der Kriegsjahre die Theorie der Reziprozitätsgesetze für l^2-te Potenzreste (l Primzahl), die als Paradigma für die l^n-ten Potenzreste dienen kann, allgemein durchgeführt, aber bisher aus äußerlichen Gründen nicht veröffentlicht. Ich gebe im folgenden mit Rücksicht auf den beschränkten zur Verfügung stehenden Raum, der auch eine knappe Behandlung notwendig machte, den ersten Teil dieser Untersuchungen wieder, der bis zum „allgemeinen Reziprozitätsgesetz für l^2-te Potenzreste" führt; in einem zweiten Teile sollen die allgemeinen Ergänzungssätze und das Hilbertsche Reziprozitätsgesetz für l^2-te Potenzreste folgen. Bei der Behandlung der Sätze über das „zweifach primäre" Primideal habe ich zur Abkürzung des Beweises die allgemeinen Sätze von Herrn *T. Takagi* über relativ *Abel*sche Körper benutzt.

§ 1. Definitionen. Das zweifach primäre Primideal.

Wir geben zunächst einige Definitionen. Die Körper k, die wir betrachten, sollen stets den Körper der l^2-ten Einheitswurzeln $k_2(\zeta_2)$ enthalten [1]), wo l eine Primzahl und ζ_2 eine primitive l^2-te Einheitswurzel bedeutet. Wir setzen die Bedeutung des l^2-ten Potenzrestsymbols $\left(\frac{a}{\mathfrak{a}}\right)_2$ als bekannt voraus und bemerken nur, daß man für die Potenz $\mathfrak{p}^e$ eines Primideals direkt setzen kann

$$\left(\frac{a}{\mathfrak{p}^e}\right)_2 \equiv a^{\frac{n(\mathfrak{p}^e)-1}{l^2}} \quad (\mathfrak{p}). \tag{1}$$

Denn aus $n(\mathfrak{p}) = 1 + al^2$ folgt $n(\mathfrak{p}^e) = 1 + ael^2 + abl^4$, wo a, b ganze rationale Zahlen bedeuten.

[1]) Dies wird im folgenden stets vorausgesetzt, auch wenn es nicht ausdrücklich gesagt wird.

Den Begriff der zweifach primären Ideale und Zahlen legen wir durch folgende Definitionen fest:

Def. 1. *Ein zu l primes Ideal* $\mathfrak{a}$ *aus k heißt zweifach primär, wenn* $\left(\frac{\varepsilon}{\mathfrak{a}}\right)_2 = 1$ *ist, wo* ε *alle* l^2*-ten Idealpotenzen aus k durchläuft.*

Def. 2. *Eine zu l prime Zahl* a *aus k heißt zweifach primär, wenn die R. D.*[1]) *von* $\left(k, \sqrt[l^2]{a}\right)$ *bez. k zu l prim ist.*

Def. 3. *Das Klassensystem von k, das alle* l^2*-ten Potenzen von Idealklassen umfaßt, heiße der zweifache Hauptverband* H_2.

Def. 4. *Eine Zahl* ω *aus k heißt eine zweifach singuläre Primärzahl, wenn sie* l^2*-te Idealpotenz und zweifach primär ist.*

Die zweifach primären Ideale und Zahlen bilden gegenüber der Multiplikation eine Gruppe, ebenso die zweifach singulären Primärzahlen. Es wird im folgenden nötig sein, Potenzrestsymbole in verschiedenen Körpern zu betrachten, für die folgende Beziehungen gelten:

Satz 1. *Ist K ein Oberkörper von k,* a *eine Zahl aus k und* $\mathfrak{R}$ *ein Ideal aus K mit der R. N.* $\mathfrak{r}$ *in k, so gilt:*

$$\left(\frac{a}{\mathfrak{R}}\right)_{2,K} = \left(\frac{a}{\mathfrak{r}}\right)_{2,k}. \tag{2}$$

Satz 2. *Ist K ein relativ Galoisscher Oberkörper*[2]) *von k,* $\mathfrak{r}$ *ein Ideal aus k und* A *eine Zahl aus K mit der R. N.* a *in k, so ist:*

$$\left(\frac{\mathsf{A}}{\mathfrak{r}}\right)_{2,K} = \left(\frac{a}{\mathfrak{r}}\right)_{2,k}. \tag{3}$$

Die Beweise verlaufen ganz analog wie für l-te Potenzreste. Auf Grund dieser Beziehungen gelten folgende Sätze:

Satz 3. *Ist* $\mathfrak{A}$ *ein zweifach primäres Ideal des Oberkörpers K von k, so ist die R. N. von* $\mathfrak{A}$ *in k ein zweifach primäres Ideal.*

Satz 4. *Ist* $\mathfrak{a}$ *ein zweifach primäres Ideal aus k, so ist es auch in jedem relativ Galoisschen Oberkörper zweifach primär.*

Satz 5. *Ist* a *eine zweifach primäre Zahl aus k, so ist sie auch in jedem Oberkörper K zweifach primär.*

Zum Beweise des letzten Satzes beachte man, daß $\sqrt[l]{a}$ in $\left(k, \sqrt[l]{a}\right)$ und daher auch in $\left(K, \sqrt[l]{a}\right)$ einfach primär ist.

Über die zweifach primären Primideale gelten folgende Sätze:

Satz 6. *Ist* $\mathfrak{p}$ *ein zweifach primäres Primideal, so läßt sich* $\pi = \mathfrak{p}\,\bar{\mathfrak{p}}^{l^2}$ *als zweifach primäre Zahl wählen.*

---

[1]) Wir gebrauchen folgende Abkürzungen: R. D. für Relativdiskriminante, R. N. für Relativnorm, R. G. für Reziprozitätsgesetz.

[2]) Der Satz gilt auch für beliebige Oberkörper, wie Herr *T. Takagi* für l-te Potenzreste gezeigt hat. Er wird hier aber nur in dem angegebenen Umfange gebraucht.

Der Beweis ergibt sich aus den Sätzen von Herrn *T. Takagi* über relativ *Abel*sche Körper. Bestimmt man die Zahlen α der Hauptkongruenzklasse im Körper k durch die Forderung $\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{p}}\right)_2 = 1$, so ergibt sich die Existenz eines relativ zyklischen Kongruenzklassenkörpers vom Relativgrad l^2, in dessen R. D. nur $\mathfrak{p}$ aufgeht. Daraus folgt die Existenz einer Zahl π.

Satz 7. *Ist $\pi = \mathfrak{p}\bar{\mathfrak{p}}^l$, wo $\mathfrak{p}$ ein Primideal bedeutet, eine zweifach primäre Zahl, so ist (π) ein zweifach primäres Ideal.*

Beweis. In $K = \left(k, \sqrt[l]{\pi}\right)$ werden alle l^2-ten Idealpotenzen ε aus k *R. N.* von l-ten Idealpotenzen E. Es gilt daher [1]):

$$1 = \left(\frac{\mathsf{E}}{\sqrt[l]{\pi}}\right)_{1,K} = \left(\frac{\mathsf{E}}{\pi}\right)_{2,K} = \left(\frac{\varepsilon}{\pi}\right)_{2,k}.$$

Obwohl die genauere Betrachtung der zweifach hyperprimären Ideale und Zahlen erst im zweiten Teil der Arbeit folgen soll, führen wir hier folgende Definitionen und Sätze an, da wir sie zur Abkürzung der Beweise im folgenden benutzen:

Def. 5. *Eine zu l prime Zahl α heißt zweifach hyperprimär, wenn sie einer Kongruenz*

$$\alpha \equiv \beta^{l^2}(l^2 \mathfrak{l}\mathfrak{l}_1\mathfrak{l}_2 \dots \mathfrak{l}_z)$$

genügt, wo $\mathfrak{l}_1, \mathfrak{l}_2, \dots, \mathfrak{l}_z$ die verschiedenen in l aufgehenden Primideale bedeuten und $\mathfrak{l} = 1 - \zeta = 1 - \zeta_2^l$ ist.

Def. 6. *Ein zu l primes Ideal $\mathfrak{a}$ heißt zweifach hyperprimär, wenn für alle Zahlen λ, die aus Primfaktoren von l und l^2-ten Idealpotenzen zusammengesetzt sind, die Beziehung $\left(\frac{\lambda}{\mathfrak{a}}\right)_2 = 1$ gilt.*

Satz 8. *Ist $\mathfrak{p}$ ein zweifach hyperprimäres Primideal, so läßt sich $\pi = \mathfrak{p}\bar{\mathfrak{p}}^{l^2}$ als zweifach hyperprimäre Zahl wählen.*

Bezüglich des Beweises des letzten Satzes sei nur bemerkt, daß er sich auf eine Kongruenz stützt, der jede zu l prime Körperzahl α genügt [2]):

$$\alpha \equiv \varepsilon_1^{u_1} \dots \varepsilon_{m'}^{u_{m'}} \varkappa_1^{v'} \dots \varkappa_{m'}^{v_{m'}} \omega_1^{w_1} \dots \omega_{z''}^{w_{z''}} \pi_1^{y_1} \dots \pi_{z'}^{y_{z'}} \beta^{l^2} (l^2 \mathfrak{l}\mathfrak{l}_1\mathfrak{l}_2 \dots \mathfrak{l}_z)$$

$$\left(\begin{matrix} u, v, w, y = 0, 1, \dots, l^2 - 1 \\ z' + z'' = z \end{matrix}\right).$$

§ 2. Hilfssätze.

Wir führen zunächst folgenden Hilfssatz an:

Satz 9. *Ist $\mathfrak{p}$ ein Primideal, $\pi = \mathfrak{p}\bar{\mathfrak{p}}^l$ eine zweifach primäre Zahl, ω eine*

---

[1]) Es bedeutet $(-)_1$ das Potenzrestsymbol für l-te Potenzreste.

[2]) Wegen der Bezeichnung vgl. *Ph. Furtwängler*, Allgemeiner Beweis des Zerlegungssatzes für den Klassenkörper, Nachr. d. Ges. d. Wiss. zu Göttingen 1911, § 3 und § 4.

zweifach singuläre Primärzahl und τ eine l-te Idealpotenz, so ist $\{\tau, \pi\} = 1$ [1]) *und* $\left(\frac{\omega}{\tau}\right)_2 = 1$.

Zum Beweise beachte man, daß τ in $K = \left(k, \sqrt[l]{\pi}\right)$ *R. N.* einer Zahl T wird, für die $\{\mathsf{T}, \sqrt[l]{\pi}\}_1 = 1$ [1]) gilt, und daß π durch $\omega\pi$ ersetzt werden kann.

Wir werden im folgenden das Klassensystem von k durch

$$c_1^{x_1} \dots c_{e'}^{x_{e'}} d_1^{y_1} \dots d_{e''}^{y_{e''}} \begin{pmatrix} x_i = 0, 1, \dots, l^{h_i} - 1, \ h_i > 1 \\ y = 0, 1, \dots, l-1 \end{pmatrix} \quad (e' + e'' = e)$$

oder

$$c_1^{x_1} \dots c_{e'}^{x_{e'}} d_1^{y_1} \dots d_{e''}^{y_{e''}} H_2 \begin{pmatrix} x = 0, 1, \dots, l^2 - 1 \\ y = 0, 1, \dots, l-1 \end{pmatrix}$$

darstellen. Ideale aus den Basisklassen c_i, d_i, die stets als Primideale 1. Grades und prim zur Körperdiskriminante gewählt werden sollen, bezeichnen wir generell mit $\mathfrak{r}_i, \mathfrak{d}_i$ [2]). Ist $\mathfrak{q}$ ein Primideal aus k, so kann man stets

$$\varkappa = \mathfrak{q}\,\mathfrak{r}_1^{g_1} \dots \mathfrak{r}_{e'}^{g_{e'}} \mathfrak{d}_1^{h_1} \dots \mathfrak{d}_{e''}^{h_{e''}} \mathfrak{q}_1^{l^2} = \mathfrak{q}\,[\mathfrak{r}, \mathfrak{d}]_2 \text{ [3])} \begin{pmatrix} 0 \leqq g_i < l^2 \\ 0 \leqq h_i < l \end{pmatrix}$$

als Körperzahl bestimmen.

Sind speziell $\mathfrak{r}_i, \mathfrak{d}_i$ so gewählt, daß $\left(\frac{\mu}{\mathfrak{r}_i}\right)_1 = \left(\frac{\mu}{\mathfrak{d}_i}\right)_1 = 1$ ist, so sollen sie nach einer Bezeichnung von Herrn *T. Takagi* normiert gegen μ heißen. Es gilt nun

Satz 10. *Ist $\mathfrak{p}$ ein zweifach primäres Primideal mit zugehöriger Primärzahl $\pi = \mathfrak{p}\,\bar{\mathfrak{p}}^n$, so gilt, wenn $\mathfrak{r}_i, \mathfrak{d}_i$ gegen π normiert sind,*

$$(4) \qquad \left(\frac{\pi}{\varkappa}\right)_2 = \left(\frac{\varkappa}{\pi}\right)_2^n, \qquad n \equiv 1\,(l).$$

Beweis. Ist $\left(\frac{\pi}{\mathfrak{q}}\right)_1 = 1$, so wird $\varkappa$ *R. N.* einer Zahl K aus $K = \left(k, \sqrt[l]{\pi}\right)$, und aus $\{\sqrt[l]{\pi}, \mathsf{K}\}_1 = 1$ folgt dann $\{\pi, \varkappa\} = 1$. Ist $\left(\frac{\pi}{\mathfrak{q}}\right)_1 \neq 1$, so folgt die Behauptung aus dem *R. G.* für l-te Potenzreste.

Wir werden uns im folgenden fast immer auf die Betrachtung von Zahlen von der Art $\varkappa$ beschränken können. Um Wiederholungen zu vermeiden, formulieren wir in dieser Beziehung

Satz 11. *Es sei $\mathfrak{p}$ ein zweifach primäres Primideal mit zugehöriger Primärzahl π; es sei ferner $\mathfrak{q}$ ein zu l primes Primideal und $\varkappa = \mathfrak{q}\,[\mathfrak{r}, \mathfrak{d}]_2$. Gilt dann*

---

[1]) Wir setzen zur Abkürzung: $\{\alpha, \beta\} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)_2 \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)_2^{-1}$ und $\{\alpha, \beta\}_1 = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)_1 \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)_1^{-1}$.

[2]) Tritt neben k noch ein Oberkörper K auf, so bezeichnen wir in ihm Primideale aus den Basisklassen entsprechend mit $\mathfrak{R}_i, \mathfrak{D}_i$.

[3]) Wir wählen diese Abkürzung im Anschluß an Herrn *T. Takagi*.

stets $\{\pi, \varkappa\} = 1$, *so gilt auch* $\{\pi, a\} = 1$, *wenn* a *eine zu* π *und* l *prime Zahl bedeutet.*

Zum Beweise beachte man, daß $a\tau$, wenn τ eine geeignete l-te Idealpotenz bedeutet, als Produkt von Zahlen $\varkappa$ darstellbar ist.

Von fundamentaler Bedeutung für das Folgende ist

Satz 12. *Es seien* $\mathfrak{p}$ *und* $\mathfrak{p}^*$ *zweifach primäre Primideale mit den zugehörigen Primärzahlen* π *und* π^*; *ferner sei* $\mathfrak{q}$ *ein zu* l *primes Primideal und* $\varkappa = \mathfrak{q}[\mathfrak{r}, \mathfrak{d}]_2$, *wobei* $\mathfrak{r}_i$, $\mathfrak{d}_i$ *gegen* π *und* π^* *normiert seien. Ist dann* $\{\pi, \pi^*\} = \{\varkappa, \pi^*\} = 1$, *so folgt* $\{\varkappa, \pi\} = 1$, *wenn* $\left(\frac{\pi}{\mathfrak{p}^*}\right)_1 \neq 1$, $\left(\frac{\varkappa}{\mathfrak{p}^*}\right)_1 \neq 1$.

Beweis. Wir können $\left(\frac{\varkappa}{\mathfrak{p}}\right)_1 \neq 1$ annehmen, weil sonst unsere Behauptung aus Satz 10 folgt. Wir bestimmen jetzt den zu l primen Exponenten f so, daß $\left(\frac{\pi\pi^{*f}}{\mathfrak{q}}\right)_1 = 1$ wird, und betrachten den Körper $K = \left(k, \sqrt[l]{\pi\pi^{*f}}\right)$, in dem $\varkappa$ *R. N.* eines Ideals $\mathfrak{Q}$ wird. Die Zahl π^* ist singuläre Primärzahl in K, und es gilt $\left(\frac{\pi^*}{\mathfrak{Q}}\right)_1 \neq 1$, $\left(\frac{\pi^*}{\mathfrak{P}}\right)_1 \neq 1$, wenn $\mathfrak{p}$ in K gleich $\mathfrak{P}^l$ wird. $\mathfrak{P}$ liegt in K in einer Klasse C, die nicht l-te Potenz einer Klasse ist. Man kann daher das Klassensystem von K in der Gestalt $C^x U (x = 0, 1, \ldots, l-1)$ darstellen, wenn U die zu π^* gehörige Untergruppe der Klassengruppe von K ist. Man kann daher $\mathsf{K} = \mathfrak{Q}\mathfrak{P}^b \mathfrak{p}_1^{bl} \overline{\mathfrak{R}}$ setzen, wo K eine Zahl aus K, $\overline{\mathfrak{R}}$ ein Primideal aus U, $\pi = \mathfrak{p}\mathfrak{p}_1^n$ und b ein zu l primer Exponent ist. Setzt man $N_k(\mathsf{K}) = \varkappa\pi^b\varrho$, so ist $\varrho = N_k(\overline{\mathfrak{R}})$. Das *Hilbert*sche R. G. für l-te Potenzreste in K, auf $\varkappa$ und $\sqrt[l]{\pi\pi^{*f}}$ angewandt, ergibt nun

$$\{\varkappa, \pi\pi^{*f}\}\,\{\pi, \pi^*\}^{bf}\,\{\varrho, \pi\pi^{*f}\} = 1.$$

Da $\left(\frac{\pi^*}{\varrho}\right)_1 = \left(\frac{\pi}{\varrho}\right)_1 = 1$, folgt nach Satz 10: $\{\varrho, \pi\} = \{\varrho, \pi^*\} = 1$ und daher $\{\varkappa, \pi\} = 1$.

§ 3. Verallgemeinerung des Eisensteinschen Reziprozitätsgesetzes.

Satz 13. *Ist* a *eine zu* l *prime Zahl des Körpers der* l^2*-ten Einheitswurzeln* $k_2(\zeta_2)$, *die einer rationalen Zahl* mod $(1 - \zeta_2)^2$ *kongruent ist, und* q *eine zu* a *und* l *prime rationale positive oder negative Primzahl*[1]), *die der Kongruenz* $q^{l-1} \equiv 1\,(l^2)$ *genügt, so gilt in* k_2 : $\{a, q\} = 1$.

Beweis. Es sei zunächst l eine ungerade Primzahl, p eine Primzahl von der Gestalt $ml^2 + 1$, R eine Primitivwurzel für p und $\mathfrak{p}_2$ das Primideal $(p, \zeta_2 - R^{-m})$. Versteht man dann unter ζ_p eine primitive p-te Einheitswurzel und bildet die *Lagrange*sche Resolvente: $A_2 = \zeta_p + \zeta_2\zeta_p^R + \cdots + \zeta_2^{p-2}\zeta_p^{R^{p-2}}$, so wird $A_2^l = \pi_2$

[1]) Das Vorzeichen von q kommt nur für $l = 2$ in Betracht.

eine ganze Zahl aus k_2, für die

$$\left(\frac{\pi_2}{\mathfrak{q}}\right)_2 = \left(\frac{q}{\mathfrak{p}_2}\right)_2^g$$

gilt, wenn $\mathfrak{q}$ ein zu p und l primes Primideal aus k_2 mit der Norm q^g bedeutet. Es gilt ferner die Zerlegung

$$\pi_2 = \mathfrak{p}_2^{r(s)} = \mathfrak{p}_2^{r_0 + r_{-1}s + \cdots + r_{-l_2^*}s^{l_2^*}}, \qquad l_2^* = l(l-1) - 1,$$

wo r eine Primitivwurzel für l^2 ist, s die Substitution $\zeta_2 | \zeta_2^r$ bedeutet und r_{-i} der kleinste positive Rest von r^{-i} mod l^2 ist. Die Zahl π_2 genügt der Kongruenz $\pi_2 \equiv\equiv -1 \ (\mathfrak{l}_2^{l^2})$.

Es sei nun 1. a nur durch Primideale 1. Grades teilbar:

$$a = \mathfrak{p}_2^{F(s)}\, \mathfrak{p}_2^{*F^*(s)} \ldots; \ \mathfrak{p}_2 = (p, \zeta_2 - R^{-m}), \ \mathfrak{p}_2^* = (p^*, \zeta_2 - R^{*-m^*}), \ldots,$$

also

$$a^{r(s)} = \varepsilon\, \pi_2^{F(s)}\, \pi_2^{*F^*(s)} \ldots,$$

wo ε eine Einheit aus $k_2(\zeta_2)$ ist, die in der Gestalt $\zeta_2^a\, \bar{\varepsilon}$ darstellbar ist, wo $\bar{\varepsilon}$ eine reelle Einheit mit dem Quadrat 1 ist. Der Exponent a hat den Wert Null, wie aus

$$a^{r(s)} = \bar{a}^{r_0 + r_{-1}s + \cdots + r_{-l+2}s^{-l+2}}\, a^{lG(s)}$$

folgt, wo $\bar{a}$ die R. N. von a in $k_1(\zeta)$ bedeutet. Der weitere Beweis verläuft, da $g \equiv\equiv 0(l)$ ist, wie für l-te Potenzreste.

2. Ist a durch kein Primideal vom Grade l teilbar, folgt der Beweis ebenfalls wie für l-te Potenzreste, wenn man beachtet, daß aus $\{a^{1-s^i}, q\} = 1$ die Beziehung $\{a, q\} = 1$ folgt, falls $i \equiv\equiv 0(l-1)$ ist.

3. Ist a eine Zahl des Körpers der l-ten Einheitswurzeln k_1, die einer rationalen Zahl mod $(1-\zeta)^2$ kongruent ist, so folgt die zu beweisende Gleichung aus dem *Eisenstein*schen R. G. für l-te Potenzreste in $k_1(\zeta)$.

4. Ist a eine beliebige zu l und q prime Zahl aus $k_2(\zeta_2)$, so kann man $a = a_1 a_2$ setzen, wo a_1 eine Zahl aus k_2 bedeutet, die durch kein Primideal l-ten Grades teilbar ist, während a_2 eine Zahl aus k_1 ist, die einer rationalen Zahl mod $(1-\zeta)^2$ kongruent ist, womit der Beweis für ungerades l erledigt ist.

Für $l = 2$ ist der Satz bekannt [1]).

Aus unserem Satze folgt in Verbindung mit den Sätzen 1 und 2

Satz 14. *Ist k ein Galoisscher Körper, der den Körper der l^2-ten Einheitswurzeln $k_2(\zeta_2)$ enthält, und q eine rationale positive oder negative Primzahl* [2]), *die der Kongruenz $q^{l-1} \equiv\equiv 1(l^2)$ genügt, so gilt für jede zu l und q prime Zahl a aus k, die einer rationalen Zahl* mod $(1-\zeta_2)^2$ *kongruent ist, $\{a, q\} = 1$. Insbesondere gilt diese Gleichung für primäres a.*

Denn für a gilt dann eine Kongruenz $a\beta^l \equiv 1(l)$ und daher $\{a\beta^l, q\} = 1$. Andererseits ist $\{\beta^l, q\} = \{\beta, q\}_1 = 1$.

---

[1]) Man vgl. etwa *P. Bachmann,* Die Lehre von der Kreisteilung, 13. Vorlesung.

[2]) Das Vorzeichen von q kommt nur für $l = 2$ in Betracht.

§ 4. Das einfache Reziprozitätsgesetz in vollständigen Galoisschen Körpern.

Um eine kurze Bezeichnung zu haben, will ich sagen, daß in einem Körper das einfache R. G. gilt, wenn die Gleichungen $\{a, \pi\} = 1$ bestehen, wo π Primärzahl eines zweifach primären Primideals $\mathfrak{p}$ und a eine zu l und π prime Zahl ist [1]).

Einen vollständigen *Galois*schen Körper definieren wir auf folgende Art: Es sei k ein *Galois*scher Körper und $q_1, q_2, \ldots$ seien die höchstens in endlicher Zahl vorhandenen von l verschiedenen Primzahlen, die in k l-te Idealpotenzen werden und zwar möge q_i l^{n_i}-te, aber nicht l^{n_i+1}-te Idealpotenz werden. Wir wollen den Körper k dann einen vollständigen *Galois*schen Körper nennen, wenn er folgende beiden Bedingungen erfüllt: 1. er enthält $\sqrt[l^{n_1}]{q_1}$, $\sqrt[l^{n_2}]{q_2}, \ldots$, 2. er enthält eine Einheitswurzel von genügend hoher (l^m-ter) Ordnung ζ_m, so daß $\left(\frac{\zeta_m}{\mathfrak{q}}\right)_1 \neq 1$ ist, wenn $\mathfrak{q}$ ein Primideal in k bedeutet, das in einer der Primzahlen q_i oder, falls $l \neq 2$ ist, in einer Primzahl q, für die $q^{l-1} \not\equiv 1 \,(l^2)$ ist, aufgeht. Es ist leicht zu sehen, daß jeder *Galois*sche Körper in einem vollständigen *Galois*schen Körper enthalten ist. Bezüglich der ersten Bedingung ist dies evident. Es sei also k ein *Galois*scher Körper, der die erste Bedingung erfüllt, und sein Grad sei genau durch l^g teilbar. Es gibt dann eine positive ganze Zahl m von solcher Beschaffenheit, daß die Normen der genannten Primideale $\mathfrak{q}$ höchstens mod l^m der 1 kongruent sind. Denn die Primzahlen q_i und die in ihnen aufgehenden Primideale sind nur in endlicher Anzahl vorhanden; ist aber, wenn $l \neq 2$ ist, $\mathfrak{q}$ ein Primideal aus k, das in einer Primzahl q aufgeht, für die $q^{l-1} \not\equiv 1 \,(l^2)$ ist, so gilt $N(\mathfrak{q}) \equiv 1$ höchstens mod l^{g+1}. Es ist dann $K_m = (k, \zeta_m)$ ein vollständiger *Galois*scher Körper. Denn es möge k als Einheitswurzel höchster Ordnung ζ_s enthalten [2]), so daß K_m vom Relativgrad l^t bez. k ist, wenn $m = s + t$ gesetzt wird. Ist dann $\mathfrak{q}$ eins der betrachteten Primideale aus k und $N(\mathfrak{q}) - 1$ genau durch $l^{m'}$ teilbar, wo $m' \leqq m$ ist, und zerfällt $\mathfrak{q}$ in K_m in $l^{t'}$ verschiedene Primideale ($t' \leqq t$), von denen eins $\mathfrak{q}'$ sei, so gilt, wenn $t' = t$ ist,

$$\left(\frac{\zeta_m}{\mathfrak{q}'}\right)_{1, K_m} = \zeta_m^{f l^{m-1}} \neq 1, \quad f \not\equiv 0 \,(l).$$

Ist $t' < t$, so gilt

$$\left(\frac{\zeta_{s+t'}}{\mathfrak{q}'}\right)_{1, K_{s+t'}} = \left(\frac{\zeta_m}{\mathfrak{q}'}\right)_{1, K_m} \neq 1.$$

Satz 15. *In jedem vollständigen Galoisschen Körper gilt das einfache Reziprozitätsgesetz.*

Beweis. Wir wenden die Bezeichnungen von § 2 an und wollen zeigen, daß stets $\{\varkappa, \pi\} = 1$ ist, wenn π Primärzahl eines zweifach primären Primideals $\mathfrak{p}$ und $\varkappa = \mathfrak{q}[\mathfrak{r}, \mathfrak{d}]_2$ ist, wo $\mathfrak{q}$ ein Primideal bedeutet. Man sieht leicht, daß es zum

---

[1]) Mit der Gültigkeit des einfachen R. G. ist stets die Gültigkeit von $\left(\frac{\omega}{\alpha^l}\right)_2 = 1$ verbunden, wenn ω eine zweifach singuläre Primärzahl bedeutet, da man π durch $\omega\pi$ ersetzen kann.

[2]) Es kommen natürlich nur Ordnungen von Einheitswurzeln in Betracht, die Potenzen von l sind

eine ganze Zahl aus k_2, für die

$$\left(\frac{\pi_2}{\mathfrak{q}}\right)_2 = \left(\frac{q}{\mathfrak{p}_2}\right)_2^q$$

gilt, wenn $\mathfrak{q}$ ein zu p und l primes Primideal aus k_2 mit der Norm q^q bedeutet. Es gilt ferner die Zerlegung

$$\pi_2 = \mathfrak{p}_2^{r(s)} = \mathfrak{p}_2^{r_0 + r_{-1}s + \cdots + r_{-l_2^*}s^{l_2^*}}, \qquad l_2^* = l(l-1) - 1,$$

wo r eine Primitivwurzel für l^2 ist, s die Substitution $\zeta_2 | \zeta_2^r$ bedeutet und r_{-i} der kleinste positive Rest von r^{-i} mod l^2 ist. Die Zahl π_2 genügt der Kongruenz $\pi_2 \equiv -1 \ (\mathfrak{l}_2^{l^2})$.

Es sei nun 1. a nur durch Primideale 1. Grades teilbar:

$$a = \mathfrak{p}_2^{F(s)}\, \mathfrak{p}_2^{*F^*(s)} \ldots ; \ \mathfrak{p}_2 = (p, \zeta_2 - R^{-m}), \ \mathfrak{p}_2^* = (p^*, \zeta_2 - R^{*-m^*}), \ldots,$$

also

$$a^{r(s)} = \varepsilon\, \pi_2^{F(s)}\, \pi_2^{*F^*(s)} \ldots,$$

wo ε eine Einheit aus $k_2(\zeta_2)$ ist, die in der Gestalt $\zeta_2^a\, \bar{\varepsilon}$ darstellbar ist, wo $\bar{\varepsilon}$ eine reelle Einheit mit dem Quadrat 1 ist. Der Exponent a hat den Wert Null, wie aus

$$a^{r(s)} = \bar{a}^{r_0 + r_{-1}s + \cdots + r_{-l+2}s^{-l+2}}\, a^{lG(s)}$$

folgt, wo $\bar{a}$ die R. N. von a in $k_1(\zeta)$ bedeutet. Der weitere Beweis verläuft, da $g \not\equiv 0(l)$ ist, wie für l-te Potenzreste.

2. Ist a durch kein Primideal vom Grade l teilbar, folgt der Beweis ebenfalls wie für l-te Potenzreste, wenn man beachtet, daß aus $\{a^{1-s^i}, q\} = 1$ die Beziehung $\{a, q\} = 1$ folgt, falls $i \not\equiv 0(l-1)$ ist.

3. Ist a eine Zahl des Körpers der l-ten Einheitswurzeln k_1, die einer rationalen Zahl mod $(1-\zeta)^2$ kongruent ist, so folgt die zu beweisende Gleichung aus dem *Eisenstein*schen R. G. für l-te Potenzreste in $k_1(\zeta)$.

4. Ist a eine beliebige zu l und q prime Zahl aus $k_2(\zeta_2)$, so kann man $a = a_1 a_2$ setzen, wo a_1 eine Zahl aus k_2 bedeutet, die durch kein Primideal l-ten Grades teilbar ist, während a_2 eine Zahl aus k_1 ist, die einer rationalen Zahl mod $(1-\zeta)^2$ kongruent ist, womit der Beweis für ungerades l erledigt ist.

Für $l = 2$ ist der Satz bekannt [1]).

Aus unserem Satze folgt in Verbindung mit den Sätzen 1 und 2

Satz 14. *Ist k ein Galoisscher Körper, der den Körper der l^2-ten Einheitswurzeln $k_2(\zeta_2)$ enthält, und q eine rationale positive oder negative Primzahl* [2]), *die der Kongruenz $q^{l-1} \equiv 1(l^2)$ genügt, so gilt für jede zu l und q prime Zahl a aus k, die einer rationalen Zahl* mod $(1-\zeta_2)^2$ *kongruent ist,* $\{a, q\} = 1$. *Insbesondere gilt diese Gleichung für primäres a.*

Denn für a gilt dann eine Kongruenz $a\beta^l \equiv 1(l)$ und daher $\{a\beta^l, q\} = 1$. Andererseits ist $\{\beta^l, q\} = \{\beta, q\}_1 = 1$.

---

[1]) Man vgl. etwa *P. Bachmann,* Die Lehre von der Kreisteilung, 13. Vorlesung.

[2]) Das Vorzeichen von q kommt nur für $l = 2$ in Betracht.

§ 4. Das einfache Reziprozitätsgesetz in vollständigen Galoisschen Körpern.

Um eine kurze Bezeichnung zu haben, will ich sagen, daß in einem Körper das einfache R. G. gilt, wenn die Gleichungen $\{a, \pi\} = 1$ bestehen, wo π Primärzahl eines zweifach primären Primideals $\mathfrak{p}$ und a eine zu l und π prime Zahl ist [1]).

Einen vollständigen *Galois*schen Körper definieren wir auf folgende Art: Es sei k ein *Galois*scher Körper und $q_1, q_2, \ldots$ seien die höchstens in endlicher Zahl vorhandenen von l verschiedenen Primzahlen, die in k l-te Idealpotenzen werden und zwar möge q_i l^{n_i}-te, aber nicht l^{n_i+1}-te Idealpotenz werden. Wir wollen den Körper k dann einen vollständigen *Galois*schen Körper nennen, wenn er folgende beiden Bedingungen erfüllt: 1. er enthält $\sqrt[l^{n_1}]{q_1}$, $\sqrt[l^{n_2}]{q_2}, \ldots$, 2. er enthält eine Einheitswurzel von genügend hoher (l^m-ter) Ordnung ζ_m, so daß $\left(\frac{\zeta_m}{\mathfrak{q}}\right)_1 \neq 1$ ist, wenn $\mathfrak{q}$ ein Primideal in k bedeutet, das in einer der Primzahlen q_i oder, falls $l \neq 2$ ist, in einer Primzahl q, für die $q^{l-1} \not\equiv 1 \,(l^2)$ ist, aufgeht. Es ist leicht zu sehen, daß jeder *Galois*sche Körper in einem vollständigen *Galois*schen Körper enthalten ist. Bezüglich der ersten Bedingung ist dies evident. Es sei also k ein *Galois*scher Körper, der die erste Bedingung erfüllt, und sein Grad sei genau durch l^g teilbar. Es gibt dann eine positive ganze Zahl m von solcher Beschaffenheit, daß die Normen der genannten Primideale $\mathfrak{q}$ höchstens mod l^m der 1 kongruent sind. Denn die Primzahlen q_i und die in ihnen aufgehenden Primideale sind nur in endlicher Anzahl vorhanden; ist aber, wenn $l \neq 2$ ist, $\mathfrak{q}$ ein Primideal aus k, das in einer Primzahl q aufgeht, für die $q^{l-1} \not\equiv 1 \,(l^2)$ ist, so gilt $N(\mathfrak{q}) \equiv 1$ höchstens mod l^{g+1}. Es ist dann $K_m = (k, \zeta_m)$ ein vollständiger *Galois*scher Körper. Denn es möge k als Einheitswurzel höchster Ordnung ζ_s enthalten [2]), so daß K_m vom Relativgrad l^t bez. k ist, wenn $m = s + t$ gesetzt wird. Ist dann $\mathfrak{q}$ eins der betrachteten Primideale aus k und $N(\mathfrak{q}) - 1$ genau durch $l^{m'}$ teilbar, wo $m' \leqq m$ ist, und zerfällt $\mathfrak{q}$ in K_m in $l^{t'}$ verschiedene Primideale ($t' \leqq t$), von denen eins $\mathfrak{q}'$ sei, so gilt, wenn $t' = t$ ist,

$$\left(\frac{\zeta_m}{\mathfrak{q}'}\right)_{1, K_m} = \zeta_m^{f l^{m-1}} \neq 1, \quad f \not\equiv 0 \,(l).$$

Ist $t' < t$, so gilt

$$\left(\frac{\zeta_{s+t'}}{\mathfrak{q}'}\right)_{1, K_{s+t'}} = \left(\frac{\zeta_m}{\mathfrak{q}'}\right)_{1, K_m} \neq 1.$$

Satz 15. *In jedem vollständigen Galoisschen Körper gilt das einfache Reziprozitätsgesetz.*

Beweis. Wir wenden die Bezeichnungen von § 2 an und wollen zeigen, daß stets $\{\varkappa, \pi\} = 1$ ist, wenn π Primärzahl eines zweifach primären Primideals $\mathfrak{p}$ und $\varkappa = \mathfrak{q}[\mathfrak{r}, \mathfrak{d}]_2$ ist, wo $\mathfrak{q}$ ein Primideal bedeutet. Man sieht leicht, daß es zum

---

[1]) Mit der Gültigkeit des einfachen R. G. ist stets die Gültigkeit von $\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)_2 = 1$ verbunden, wenn ω eine zweifach singuläre Primärzahl bedeutet, da man π durch $\omega\pi$ ersetzen kann.

[2]) Es kommen natürlich nur Ordnungen von Einheitswurzeln in Betracht, die Potenzen von l sind

Beweise genügt, sich auf zweifach primäre, zur Diskriminante prime Primideale 1. Grades $\mathfrak{p}$ zu beschränken. Denn ist der Beweis für die genannten Primideale geführt und ist $\mathfrak{p}$ ein beliebiges zweifach primäres Primideal mit Primärzahl π, so bestimme man ein zur Diskriminante primes und zweifach primäres Primideal 1. Grades $\mathfrak{p}^*$ mit Primärzahl π^*, die gegen die $\mathfrak{r}_i$ normiert sei, so daß

$$\left(\frac{\varkappa}{\mathfrak{p}^*}\right)_1 \not\equiv 1, \quad \left(\frac{\pi}{\mathfrak{p}^*}\right)_1 \not\equiv 1, \quad \left(\frac{\delta_i}{\mathfrak{p}^*}\right)_2 = 1 \qquad (\delta_i = \mathfrak{d}_i^l).$$

Es folgt dann aus $\{\varkappa, \pi^*\} = \{\pi, \pi^*\} = 1$ nach Satz 12 $\{\pi, \varkappa\} = 1$, da π^* auch gegen $\mathfrak{d}_i$ normiert ist. Denn nach Satz 4 gilt $1 = \left(\frac{\delta_i}{\pi^*}\right)_2 = \left(\frac{\pi^*}{\delta_i}\right)_2 = \left(\frac{\pi^*}{\mathfrak{d}_i}\right)_1$.

Es sei nun $\mathfrak{p}$ ein zur Diskriminante primes zweifach primäres Primideal 1. Grades mit Primärzahl π und es mögen die $\mathfrak{r}_i$, $\mathfrak{d}_i$ gegen π normiert sein. Der Beweis zerfällt in drei Teile nach der Beschaffenheit der Primzahl $\mathfrak{q}$.

a) $\mathfrak{q}$ sei ein zur Diskriminante primes Primideal 1. Grades, das nicht mit $\mathfrak{p}$ konjugiert ist und es sei $N(\mathfrak{q}) = q$, $N(\varkappa) = qa$ [1]). Man bestimme dann ein zweifach primäres Primideal $\mathfrak{p}^*$ in k so, daß

$$\left(\frac{\varkappa}{\mathfrak{p}^*}\right)_1 \not\equiv 1, \quad \left(\frac{\pi}{\mathfrak{p}^*}\right)_1 \not\equiv 1, \quad \left(\frac{\varkappa_i}{\mathfrak{p}^*}\right)_2 = \left(\frac{\pi_i}{\mathfrak{p}^*}\right)_2 = 1 \quad (i = 2, 3, \ldots, n), \quad \left(\frac{a}{\mathfrak{p}^*}\right)_2 = 1,$$
$$\left(\frac{\delta_j}{\mathfrak{p}^*}\right)_2 = 1 \qquad (\delta_j = \mathfrak{d}_j^l),$$

wo $\varkappa_i$, π_i die konjugierten Zahlen zu $\varkappa$, π bedeuten. Ist dann π^* eine zu $\mathfrak{p}^*$ gehörige Primärzahl, die gegen die $\mathfrak{r}_i$ normiert ist, so gilt nach Satz 10

$$\left(\frac{\varkappa_i}{\pi^*}\right)_2 = \left(\frac{\pi^*}{\varkappa_i}\right)_2^{m_1}, \quad \left(\frac{\pi_i}{\pi^*}\right)_2 = \left(\frac{\pi^*}{\pi_i}\right)_2^{m_1} \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots, n \\ \varkappa_1 = \varkappa, \ \pi_1 = \pi \end{pmatrix},$$

woraus durch Multiplikation der ersten n Gleichungen

$$\left(\frac{qa}{\pi^*}\right)_2 = \left(\frac{\pi^*}{qa}\right)_2^{m_1}$$

und daher nach Satz 14 $m_1 = 1$ folgt [2]). Analog folgt $m_2 = 1$ und daher nach Satz 12 $\{\pi, \varkappa\} = 1$, da $\mathfrak{r}_i$, $\mathfrak{d}_i$ gegen π und π^* normiert ist.

b) $\mathfrak{q}$ sei ein Primideal beliebigen Grades, das nicht mit $\mathfrak{p}$ konjugiert ist, und es möge $q = (\mathfrak{q}\mathfrak{q}_2 \ldots \mathfrak{q}_f)^e$, $e \not\equiv 0 (l)$, die Zerlegung der rationalen Primzahl q in Primideale sein. Wir setzen dann $\mathfrak{q}_i[\mathfrak{r}, \mathfrak{d}]_2 = \varkappa_i$ $(i = 2, 3, \ldots, f)$ und $(\varkappa\varkappa_2 \ldots \varkappa_f)^e = q\beta$, so daß β nur durch Primideale 1. Grades teilbar ist. Darauf bestimmen wir ein zur Diskriminante primes zweifach primäres Primideal 1. Grades $\mathfrak{p}^*$ so, daß

$$\left(\frac{\varkappa}{\mathfrak{p}^*}\right)_1 \not\equiv 1, \quad \left(\frac{\pi}{\mathfrak{p}^*}\right)_1 \not\equiv 1, \quad \left(\frac{\varkappa_i}{\mathfrak{p}^*}\right)_2 = 1 \qquad (i = 2, 3, \ldots, f),$$
$$\left(\frac{\beta}{\mathfrak{p}^*}\right)_2 = 1, \quad \left(\frac{\delta_j}{\mathfrak{p}^*}\right)_2 = 1 \qquad (\delta_j = \mathfrak{d}_j^l).$$

---

[1]) Im Falle $l = 2$ ist hier und im folgenden das Vorzeichen von q so zu wählen, daß $q \equiv 1 (4)$ gilt, hier ist also q positiv.

[2]) Man beachte, daß qa, wenn man von l-ten Potenzen absieht, nur solche Primfaktoren r enthält, für die $r^{l-1} \equiv 1 (l^2)$ gilt.

Ist dann π^* eine zu $\mathfrak{p}^*$ gehörige Primärzahl, die gegen die $\mathfrak{r}_i$ normiert ist, so gilt nach a) $\{\pi, \pi^*\} = 1$, so daß es nur noch notwendig ist, die Gleichung $\{\varkappa, \pi^*\} = 1$ zu beweisen. Es folgt nun analog wie unter a)

$$\left(\frac{q\beta}{\pi^*}\right)_2 = \left(\frac{\pi^*}{q\beta}\right)_2^m.$$

und da ebenfalls nach a)

$$1 = \left(\frac{\beta}{\pi^*}\right)_2 = \left(\frac{\pi^*}{\beta}\right)_2$$

ist, schließlich

$$\left(\frac{q}{\pi^*}\right)_2 = \left(\frac{\pi^*}{q}\right)_2^m.$$

Um die Gültigkeit der Gleichung $\{\varkappa, \pi^*\} = 1$ nachzuweisen, ist zu zeigen, daß $m = 1$ ist. Ist $q^{l-1} \equiv 1\ (l^2)$, folgt nach Satz 14 $\{\pi^*, q\} = 1$ und daher $m = 1$. Ist $q^{l-1} \not\equiv 1\ (l^2)$, was nur für $l \neq 2$ eintreten kann, so gibt es nach Annahme eine Einheitswurzel ζ_m, so daß $\left(\frac{\zeta_m}{\mathfrak{q}}\right)_1 \neq 1$. Wir wählen dann ein zur Diskriminante primes Primideal 1. Grades $\bar{\mathfrak{r}}$ so, daß $\mathfrak{q}\bar{\mathfrak{r}}$ hyperprimär und $\left(\frac{\pi^*}{\mathfrak{q}\bar{\mathfrak{r}}}\right)_1 = 1$ wird. Man kann dann den Exponenten u so bestimmen, daß

$$\left(\frac{\pi^* \zeta_m^u}{\mathfrak{q}}\right)_1 = \left(\frac{\pi^* \zeta_m^u}{\bar{\mathfrak{r}}}\right)_1 = 1$$

wird. Da $\mathfrak{q}\bar{\mathfrak{r}}$ hyperprimär ist, kann man $\alpha = \mathfrak{q}\bar{\mathfrak{r}}\bar{\mathfrak{q}}^l$ so wählen, daß $\alpha \equiv 1\ (l^{m+2})$ wird. Im Körper $K = (k, \sqrt[l]{\alpha})$ wird dann $\pi^* \zeta_m^u$ R. N. einer Zahl Π^*, und da $\sqrt[l]{\alpha}$ in K primär ist, gilt dann $1 = \{\sqrt[l]{\alpha}, \Pi^*\}_{1,K} = \{\alpha, \Pi^*\}_K = \{\alpha, \zeta_m^u \pi^*\}_k$. Da $N(\alpha) \equiv 1\ (l^{m+2})$, ist $\{\alpha, \zeta_m\} = 1$ und daher auch $\{\alpha, \pi^*\} = 1$. Verfährt man mit den konjugierten Primidealen $\mathfrak{q}_2, \ldots, \mathfrak{q}_f$ analog, wobei wegen $\left(\frac{\pi^*}{\mathfrak{q}_i}\right)_1 = 1$ $(i = 2, \ldots, f)$ der Exponent u den Wert Null erhält, so folgt $\{a_i, \pi^*\} = 1$, wo $(\alpha\alpha_2 \ldots \alpha_f)^e = q\varrho$ ist und ϱ, abgesehen von l-ten Idealpotenzen, nur durch Primideale 1. Grades teilbar ist. Es ist dann $\{q\varrho, \pi^*\} = 1$ und da nach a) $\{\varrho, \pi^*\} = 1$, ist schließlich $\{q, \pi^*\} = 1$. Damit ist der Beweis erledigt.

c) Es sei drittens $\mathfrak{q}$ ein Primideal beliebigen Grades und $q = (\mathfrak{q}\mathfrak{q}_2 \ldots \mathfrak{q}_f)^{l^s e}$, also $q_s = \sqrt[l^s]{q} = (\mathfrak{q}\mathfrak{q}_2 \ldots \mathfrak{q}_f)^e$, $e \not\equiv 0\ (l)$, $s > 0$. Man kann dann die Beziehung $\{\varkappa, \pi\} = 1$ genau wie unter b) ableiten, indem man an Stelle der Hilfsgleichung $\{q, \pi^*\} = 1$ die Gleichung $\{q_s, \pi^*) = 1$ benutzt. Die Richtigkeit dieser erkennt man analog wie unter b), da nach unseren Annahmen über den Körper k eine Einheitswurzel ζ_m existiert, so daß $\left(\frac{\zeta_m}{\mathfrak{q}}\right)_1 \neq 1$ [1]).

---

[1]) Die Primzahl q gehört nämlich zu denjenigen Primzahlen, die in k eine l-te Idealpotenz werden.

Ist $\mathfrak{q}$ mit $\mathfrak{p}$ konjugiert, so bestimme man ein nicht mit $\mathfrak{p}$ konjugiertes, zur Diskriminante primes, zweifach primäres Primideal 1. Grades $\mathfrak{p}^*$ so, daß

$$\left(\frac{\varkappa}{\mathfrak{p}^*}\right)_1 \neq 1, \quad \left(\frac{\pi}{\mathfrak{p}^*}\right)_1 \neq 1, \quad \left(\frac{\delta_i}{\mathfrak{p}^*}\right)_2 = 1 \qquad (\delta_i = \mathfrak{d}_i^l).$$

Ist dann π^* eine zu $\mathfrak{p}^*$ gehörige Primärzahl, die gegen $\mathfrak{r}_i$ normiert ist, so folgt aus dem Bewiesenen $\{\varkappa, \pi^*\} = \{\pi, \pi^*\} = 1$ und daher nach Satz 12 $\{\varkappa, \pi\} = 1$.

§ 5. Das allgemeine Reziprozitätsgesetz.

Wir beweisen zunächst den folgenden Übertragungssatz:

Satz 16. *Ist K ein relativ Galoisscher Oberkörper von k und gilt das einfache Reziprozitätsgesetz in K, so gilt es auch in k.*

Beweis. Es seien $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ Primideale aus k, $\pi = \mathfrak{p}\,\bar{\mathfrak{p}}^{l^2}$ eine zweifach primäre Zahl und $\varkappa = \mathfrak{q}[\mathfrak{r}, \mathfrak{d}]_2$, wobei $\mathfrak{r}_i$, $\mathfrak{d}_i$ gegen π normiert sei.

a) *Es mögen $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ in K nicht l-te Potenzen von Idealen werden.* Wir setzen in k: $\mathfrak{d}_i^l = \delta_i$, ferner in K: $\mathfrak{D}_j^l = \Delta_j$ und $\mathfrak{r}_i[\mathfrak{R}, \mathfrak{D}]_2 = \mathsf{P}_i$, bestimmen in K ein zweifach hyperprimäres Primideal $\mathfrak{P}^*$ so, daß

$$\left(\frac{\pi}{\mathfrak{P}^*}\right)_1 \neq 1, \quad \left(\frac{\varkappa}{\mathfrak{P}^*}\right)_1 \neq 1, \quad \left(\frac{\delta_i}{\mathfrak{P}^*}\right)_2 = \left(\frac{\Delta_j}{\mathfrak{P}^*}\right)_2 = 1, \quad \left(\frac{\mathsf{P}_i}{\mathfrak{P}^*}\right)_1 = 1,$$

und wählen $\mathfrak{P}^*\mathfrak{P}_1^{l^2} = \overline{\Pi}^* \equiv 1\,(l^2\mathfrak{l})$. Man kann dann $\Pi^* = \Omega\overline{\Pi}^*$, wo Ω eine geeignete zweifach singuläre Primärzahl in K ist, so wählen, daß Π^* gegen $\mathfrak{R}_i$ normiert ist. Setzt man dann $\pi^* = N_k(\Pi)^*$, so ist π^* gegen $\mathfrak{r}_i$ und $\mathfrak{d}_i$ normiert, denn es gilt

$$1 = \left(\frac{\delta_i}{\Pi^*}\right)_2 = \left(\frac{\Pi^*}{\delta_i}\right)_2 = \left(\frac{\Pi^*}{\mathfrak{d}_i}\right)_1 = \left(\frac{\pi^*}{\mathfrak{d}_i}\right)_1, \quad 1 = \left(\frac{\Delta_j}{\Pi^*}\right)_2 = \left(\frac{\Pi^*}{\Delta_j}\right)_2 = \left(\frac{\Pi^*}{\mathfrak{D}_j}\right)_1,$$

$$1 = \left(\frac{\mathsf{P}_i}{\Pi^*}\right)_1 = \left(\frac{\Pi^*}{\mathsf{P}_i}\right)_1 = \left(\frac{\Pi^*}{\mathfrak{r}_i}\right)_1 = \left(\frac{\pi^*}{\mathfrak{r}_i}\right)_1.$$

Da, wie später gezeigt wird, die R. N. von Ω in k ebenfalls eine zweifach singuläre Primärzahl ist, ist dann π^* in k eine zweifach primäre Zahl. Es gilt nun nach Annahme in K: $\{\pi, \Pi^*\} = \{\varkappa, \Pi^*\} = 1$, daher in k: $\{\pi, \pi^*\} = \{\varkappa, \pi^*\} = 1$. Da $\mathfrak{r}_i$, $\mathfrak{d}_i$ gegen π und π^* normiert sind, folgt dann $\{\pi, \varkappa\} = 1$. Es ist noch zu zeigen, daß $\omega = N_k(\Omega)$ in k eine zweifach singuläre Primärzahl ist. Wäre sie es nicht, so müßte es eine Zahl ϱ in k geben, so daß $\left(\frac{\omega}{\varrho}\right)_2 \neq 1$. Es wäre dann auch $\left(\frac{\Omega}{\varrho}\right)_2 \neq 1$ in K, was der Annahme über K und Ω widerspricht.

b) Es sei speziell $K = \left(k, \sqrt[l]{\mu}\right)$, wo μ eine Zahl aus k ist, und $\mathfrak{p}$ werde zunächst in K nicht l-te Idealpotenz; gilt dasselbe von $\mathfrak{q}$, so ist a) anwendbar. Es möge also $\mathfrak{q}$ in K l-te Potenz eines Ideals $\mathfrak{Q}$ werden, so daß μ keine l-te Idealpotenz in k sein kann. Man bestimme dann ein zur Diskriminante primes Primideal 1. Grades $\mathfrak{Q}_1$ in K so, daß $\mathfrak{Q}\,\mathfrak{Q}_1 = \mathsf{K}$ eine Körperzahl wird, und setze $N_k(\mathsf{K}) = \varkappa\varkappa_1$. Wählt man dann ein zweifach primäres Primideal $\mathfrak{p}^*$ in k so, daß

$$\left(\frac{\mu}{\mathfrak{p}^*}\right)_1 \neq 1, \quad \left(\frac{\varkappa}{\mathfrak{p}^*}\right)_1 \neq 1, \quad \left(\frac{\pi}{\mathfrak{p}^*}\right)_1 \neq 1, \quad \left(\frac{\delta_i}{\mathfrak{p}^*}\right)_2 = 1,$$

und bestimmt $\mathfrak{p}^* \overline{\mathfrak{p}}^r = \pi^*$ als zweifach primäre und gegen die $\mathfrak{r}_i$ normierte Zahl, so gilt

$$1 = \{\pi^*, \mathsf{K}\}_K = \{\pi^*, \varkappa\varkappa_1\}.$$

Da nach a)

$$\{\pi^*, \varkappa_1\} = \{\pi^*, \pi\} = 1, \quad \text{folgt} \quad \{\pi, \varkappa\} = 1.$$

Wird $\mathfrak{p}$ in K l-te Potenz eines Ideals, so bestimme man ein zur Diskriminante von K primes Primideal $\mathfrak{p}^*$ in der gleichen Weise wie soeben mit Auslassung der ersten Bedingung. Es folgt dann aus dem schon Bewiesenen $\{\varkappa, \pi^*\} = \{\pi^*, \pi\} = 1$ und damit $\{\pi, \varkappa\} = 1$.

c) Es wird im allgemeinen zu l prime Primideale in k geben, die in K l-te Idealpotenzen werden. Man erweitere nun den Körper K zu einem *Galois*schen Körper K^* durch Adjunktion der konjugierten Körper und dann in der beschriebenen Art zu einem vollständigen *Galois*schen Körper $\overline{K} = \left(K^*, \sqrt[l^{n_1}]{q_1}, \sqrt[l^{n_2}]{q_2}, \ldots, \sqrt[l^h]{\zeta}\right)$. Es wird dann kein zu l primes Ideal des Körpers $\overline{k} = \left(k, \sqrt[l^{n_1}]{q_1}, \sqrt[l^{n_2}]{q_2}, \ldots, \sqrt[l^h]{\zeta}\right)$. in $\overline{K}$ l-te Idealpotenz. Da nach § 4 das einfache R. G. in $\overline{K}$ gilt, gilt es dann nach a) in $\overline{k}$ und nach b) in k.

Damit ist gleichzeitig gezeigt, daß das einfache R. G. in jedem algebraischen Zahlkörper gilt. Wir sind nun in der Lage, das folgende allgemeine R. G. zu beweisen:

Satz 17. *Allgemeines Reziprozitätsgesetz. Ist k ein algebraischer Zahlkörper, der den Körper der l^2-ten Einheitswurzeln enthält, so gilt*

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)_2 = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)_2,$$

wenn wenigstens eine der beiden zu einander und zu l primen Zahlen α, β zweifach primär ist.

Beweis. Nach dem Bewiesenen gilt in jedem Körper die Beziehung $\left(\frac{\omega}{\gamma}\right)_2 = 1$, wenn ω eine zweifach singuläre Primärzahl und γ eine zu l und ω prime Zahl ist. Es sei nun etwa α zweifach primär und weder α noch β l-te Potenz einer Zahl aus k, was angenommen werden kann. Im Körper $K = \left(k, \sqrt[l^2]{\alpha\beta^{-1}}\right)$ werden dann α und β l^2-te Potenzen von Idealen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ und daher gleichberechtigte zweifach singuläre Primärzahlen. Aus

$$\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{B}}\right)_{2,K} = \left(\frac{\beta}{\mathfrak{A}}\right)_{2,K}$$

folgt dann $\{\alpha, \beta\} = 1$.

Über Dirichletsche Reihen mit komplexen Charakteren.

Von *Edmund Landau* in Göttingen.

Es sei $\chi(n)$ ein nicht reeller Charakter mod k, also $k \geqq 5$ und $\chi^2(n)$ nicht der Hauptcharakter $\chi_0(n)$.

§ 1.

Herr Gronwall [1]) hat

$$(1) \qquad L(s,\chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s} \neq 0 \quad \text{für} \quad \sigma \geqq 1 - \frac{1}{c \log k}, \quad |t| \leqq \frac{1}{c \log k}$$

bewiesen, wo c eine Konstante > 1 bezeichnet.

Hierzu benutzte er die Fortsetzbarkeit von $L(s,\chi)$ in die ganze Ebene, die Funktionalgleichung zwischen $L(s,\chi)$ und $L(1-s,\bar{\chi})$, sowie die Tatsache, daß $L(s,\chi)$ das Geschlecht 1 hat.

Ich werde ohne diesen ganzen Apparat das Gronwallsche Resultat (1) und mehr beweisen, nämlich u.-a.

$$(2) \qquad L(s,\chi) \neq 0 \quad \text{für} \quad \sigma \geqq 1 - \frac{1}{c \log k}, \quad |t| \leqq 1.$$

Dies geschieht durch Heranziehung eines einfachen funktionentheoretischen Hilfssatzes, welcher lautet [2]):

Es sei $r > 0$, $f(s)$ *für* $|s - s_0| \leqq r$ *regulär*, $M > 0$,

$$\left|\frac{f(s)}{f(s_0)}\right| < e^M,$$

$f(s) \neq 0$ *im Halbkreis* $|s - s_0| \leqq r$, $\Re(s) > \Re(s_0)$.

1. *Dann ist*

$$-\Re \frac{f'}{f}(s_0) < \frac{4M}{r}.$$

---

[1]) *Sur les séries de Dirichlet correspondant à des caractères complexes* [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Bd. XXXV (1913), S. 145—159], S. 153.

[2]) Vergl. meine Arbeit *Über die Wurzeln der Zetafunktion* [Mathematische Zeitschrift, Bd. XX (1924), S. 98—104], S. 99—100 für den Beweis.

2. *Gibt es eine Wurzel ϱ zwischen $s_0 - \frac{r}{2}$ und s_0, so ist*

$$-\Re\frac{f'}{f}(s_0) < \frac{4M}{r} - \frac{1}{s_0 - \varrho}.$$

Ferner benutze ich die 7 bekannten, ganz an der Oberfläche liegenden Tatsachen (bei denen ich die Konstanten recht unsparsam abschätzen darf):

I. $$\left|\sum_{1 \leqq n \leqq u} \chi(n)\right| \leqq k, \quad \left|\sum_{1 \leqq n \leqq u} \chi^2(n)\right| \leqq k.$$

II. Für $\frac{1}{2} < \sigma < 2$ ist

$$(3)\quad \begin{cases} |L(s,\chi)| = \left| s\int_1^\infty \frac{du}{u^{s+1}} \sum_{1 \leqq n \leqq u} \chi(n) \right| < (2+|t|)\int_1^\infty \frac{k\,du}{u^{\frac{3}{2}}} = (4+2|t|)\,k, \\ |L(s,\chi^2)| < (4+2|t|)\,k. \end{cases}$$

III. Für $\sigma > 1$ ist

$$(4)\quad \frac{1}{\sigma-1} = \int_1^\infty \frac{du}{u^\sigma} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\sigma} < 1 + \int_1^\infty \frac{du}{u^\sigma} = 1 + \frac{1}{\sigma-1}$$

und (da $\frac{\log u}{u^\sigma}$ für $u > e$ fällt)

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log n}{n^\sigma} < \frac{\log 2}{2} + \frac{\log 3}{3} + \int_1^\infty \frac{\log u}{u^\sigma}\,du$$

$$(5)\quad = \frac{\log 2}{2} + \frac{\log 3}{3} + \frac{1}{(\sigma-1)^2} < 1 + \frac{1}{(\sigma-1)^2}.$$

IV. Für $1 < \sigma < 2$ ist nach (4)

$$(6)\quad \left|\frac{1}{L(s,\chi)}\right| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)\,\chi(n)}{n^s}\right| \leqq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\sigma} < \frac{2}{\sigma-1}, \quad \left|\frac{1}{L(s,\chi^2)}\right| < \frac{2}{\sigma-1}.$$

V. Für $\sigma > 1$ ist

$$(7)\quad -\frac{L'}{L}(s,\chi) = \sum_{n=1}^{\infty}{}' \frac{\Lambda(n)\,\chi(n)}{n^s},$$

wo n die zu k teilerfremden Zahlen durchläuft und $\Lambda(n) \geqq 0$ ist; entsprechend mit χ_0 und χ^2 statt χ.

VI. Da für reelles a

$$3 + 4\,\Re(e^{ai}) + \Re(e^{2ai}) = 3 + 4\cos a + \cos 2a = 2\,(1+\cos a)^2 \geqq 0$$

ist, ist nach (7) für $\sigma > 1$

$$-3\frac{L'}{L}(\sigma,\chi_0) - 4\,\Re\frac{L'}{L}(\sigma+ti,\chi) - \Re\frac{L'}{L}(\sigma+2ti,\chi^2)$$

$$(8)\quad = \sum_{n=1}^{\infty}{}' \frac{\Lambda(n)}{n^\sigma}\left(3 + 4\,\Re(\chi(n)\,n^{-ti}) + \Re(\chi^2(n)\,n^{-2ti})\right) \geqq 0.$$

VII. Nach (7), (5) und (4) ist für $1 < \sigma < 2$

$$(9) \qquad -\frac{L'}{L}(\sigma, \chi_0) \leqq -\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma) < \sigma - 1 + \frac{1}{\sigma - 1} < 1 + \frac{1}{\sigma - 1}.$$

Es sei nun

$$L(\beta + \gamma i, \chi) = 0, \qquad \beta > \frac{4}{5}, \quad \gamma \gtrless 0.$$

$\beta \leqq 1$ ist trivial; $\beta < 1$ wohlbekannt, wird sich aber nochmals ergeben. Ich setze

$$\text{Max } (|\gamma|, k) = x$$

(so daß $x \geqq 5$ ist) und behaupte den (offenbar (2) reichlich enthaltenden)

Satz:
$$1 - \beta > \frac{1}{c \log x}.$$

Beweis: Ich wende meinen Hilfssatz zweimal an; auf

$$s_0 = \sigma_0 + 2\gamma i, \quad f(s) = L(s, \chi^2) \quad \text{bzw.} \quad s_0 = \sigma_0 + \gamma i, \quad f(s) = L(s, \chi);$$

beide Male mit

$$\sigma_0 = 1 + \frac{1}{500 \log x}, \quad r = \frac{1}{2}, \quad M = 9 \log x;$$

für $|s - s_0| \leqq \frac{1}{2}$ ist nämlich

$$\frac{1}{2} < \sigma_0 - \frac{1}{2} \leqq \sigma \leqq \sigma_0 + \frac{1}{2} < 2, \quad |t| \leqq 2|\gamma| + \frac{1}{2} \leqq 2x + \frac{1}{2},$$
$$(4 + 2|t|)k \leqq (5 + 4x)x \leqq 5x^2,$$

also nach (3) und (6)

$$\left|\frac{f(s)}{f(s_0)}\right| < 5x^2 \cdot 1000 \log x < 5000\, x^3 < 5^6 x^3 \leqq x^9.$$

Wegen $\sigma_0 - \frac{r}{2} < 1 + \frac{1}{500} - \frac{1}{4} < \beta \leqq 1 < \sigma_0$ folgt aus dem Hilfssatz, (8) und (9)

$$0 < 3 + 1500 \log x + 4\left(72 \log x - \frac{1}{\sigma_0 - \beta}\right) + 72 \log x < 1864 \log x - \frac{4}{\sigma_0 - \beta},$$

$$1 - \beta = \sigma_0 - \beta - \frac{1}{500 \log x} > \left(\frac{1}{466} - \frac{1}{500}\right)\frac{1}{\log x}.$$

§ 2.

Ich schreibe jetzt kurz $L(s)$ statt $L(s, \chi)$ und verstehe unter $c_1, \ldots, c_{17}$ positive Konstanten.

Unter Benutzung von (1) hatte Herr Gronwall

$$\frac{1}{|L(1)|} < c_1 \log k \, (\log \log k)^{\frac{3}{8}}$$

bewiesen. Ich werde unter Benutzung von (2) und eines weiteren funktionen-

theoretischen Hilfssatzes endlich das genaue Gegenstück zur wohlbekannten Abschätzung

$$|L(1)| < c_2 \log k$$

beweisen können, nämlich den

Satz:
$$\frac{1}{|L(1)|} < c_3 \log k\,.$$

Hilfssatz: *Es sei* $0 < \varepsilon < \frac{1}{8}$; *für* $|s - s_0| \leqq \frac{1}{2}$ *sei* $f(s)$ *regulär und*

$$\left|\frac{f(s)}{f(s_0)}\right| < e^M, \qquad \Re \frac{f'}{f}(s_0) < M;$$

es sei $f(s) \neq 0$ *im Kreissegment* $\sigma \geqq \sigma_0 - 2\varepsilon$, $|s - s_0| \leqq \frac{1}{2}$. *Dann ist für* $-\varepsilon \leqq s - s_0 \leqq 0$

$$\Re \frac{f'}{f}(s) < 50\, M\,.$$

Beweis des Hilfssatzes: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $s_0 = 0$. Für die beim Beweise des in § 1 genannten Hilfssatzes (wo jetzt $s_0 = 0$, $r = \frac{1}{2}$ ist) mit $h(s)$ bezeichnete Funktion galt für $|s| \leqq \frac{1}{4}$

$$\Re h(s) < M, \qquad h(0) = 0.$$

Hieraus folgt bekanntlich für $-\varepsilon \leqq s \leqq 0$

$$\left|\frac{f'}{f}(s) - \sum_{\varrho} \frac{1}{s - \varrho}\right| = |h'(s)| < \frac{\frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{4} + s\right)^2} M < 32\, M\,,$$

$$\left|\frac{f'}{f}(0) + \sum_{\varrho} \frac{1}{\varrho}\right| < 8\, M.$$

Wegen $|\varrho| \geqq -\Re\varrho > 2\varepsilon$ ist für $-\varepsilon \leqq s \leqq 0$

$$\Re \frac{1}{s - \varrho} = -\Re \frac{1}{\varrho} + \Re \frac{s}{(s - \varrho)\varrho} \leqq -\Re \frac{1}{\varrho} + \frac{\varepsilon}{\frac{1}{2}|\varrho||\varrho|} < -\Re \frac{1}{\varrho} + \frac{-\Re\varrho}{|\varrho|^2}$$
$$= -2\,\Re \frac{1}{\varrho}\,,$$

$$\Re \frac{f'}{f}(s) < -2 \sum_{\varrho} \Re \frac{1}{\varrho} + 32\, M < 2\,\Re \frac{f'}{f}(0) + 2 \cdot 8\, M + 32\, M < 50\, M.$$

Beweis des Satzes: Das c in (2) darf > 8 angenommen werden. Für $s_0 = 1 + \frac{1}{c \log k}$ ist offenbar

$$\Re \frac{L'}{L}(s_0) < c_4 \log k, \qquad \frac{1}{|L(s_0)|} < c_5 \log k$$

und auf $|s-s_0| \leqq \frac{1}{2}$ nach (3)

$$|L(s)| < 5k.$$

Wegen (2) ist also der vorige Hilfssatz mit $\varepsilon = \frac{1}{c \log k}$, $M = c_6 \log k$ anwendbar und liefert für $1 \leqq s \leqq s_0$

$$\Re \frac{L'}{L}(s) < c_7 \log k.$$

Daher ist

$$\log \frac{1}{|L(1)|} = -\Re \log L(1) = -\Re \log L(s_0) + \int_1^{s_0} \Re \frac{L'}{L}(s)\, ds$$

$$< \log \zeta(s_0) + \frac{1}{c \log k} c_7 \log k < \log \log k + c_8,$$

$$\frac{1}{|L(1)|} < e^{c_8} \log k = c_3 \log k.$$

Anhang.

Nun sei $\chi(n)$ ein reeller Charakter mod k und vom Hauptcharakter verschieden, also $\chi^2(n) = \chi_0(n)$, $k \geqq 3$. Wie gut kann man dann $\frac{1}{|L(1,\chi)|}$ nach oben abschätzen? Jedenfalls war in § 2 die Voraussetzung, daß $\chi(n)$ nicht reell ist, nur insofern benutzt, als (2) angewendet wurde (indem alle anderen Überlegungen für jeden Nicht-Haupt-Charakter gelten). (2) kann man leider für reelle Charaktere beim heutigen Stande der Wissenschaft nicht beweisen. Immerhin beweise ich den

Satz: *$L(s,\chi) \neq 0$ für $\sigma \geqq 1 - \frac{1}{c_9 \log k}$, $0 < |t| \leqq 1$.*

(Herr Gronwall hatte dies mit der Einschränkung $|t| \leqq \frac{1}{c_9 \log k}$ ähnlich wie (1) schon bewiesen.)

Falls also für alle unsere χ oder gewisse von ihnen

$$L(s,\chi) \neq 0 \quad \text{für} \quad 1 - \frac{1}{c_{10} \log k} \leqq s < 1$$

ist, so gilt

$$\frac{1}{|L(1,\chi)|} < c_{11} \log k$$

für jene χ. Jedenfalls habe ich so insbesondere einen einfachen Beweis der Tatsache erhalten, die Herr Hecke [1]) mit tieferen Mitteln bewiesen hat: Falls für einen imaginär-quadratischen Zahlkörper der Grundzahl $-k$

---

[1]) In meiner Abhandlung *Über die Klassenzahl imaginär-quadratischer Zahlkörper* [Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, mathematisch-physikalische Klasse, Jahrgang 1918, S. 285—295], S. 287—290.

$$\zeta_\varkappa(s) \neq 0 \quad \text{für} \quad 1 - \frac{1}{c_{12} \log k} \leqq s < 1$$

ist, so ist seine Klassenzahl $> \dfrac{\sqrt{k}}{c_{13} \log k}$.

Beweis des Satzes: An Stelle von (8) tritt

$$-3\frac{L'}{L}(\sigma, \chi_0) - 4\Re\frac{L'}{L}(\sigma + ti, \chi) - \Re\frac{L'}{L}(\sigma + 2ti, \chi_0) \geqq 0 \quad \text{für} \quad \sigma > 1. \tag{10}$$

Hierin ist für $1 < \sigma < 2$, $0 < t \leqq 1$

$$-\Re\frac{L'}{L}(\sigma + 2ti, \chi_0) = -\Re\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma + 2ti) - \Re\sum_{p|k}\frac{\log p}{p^{\sigma+2ti} - 1}$$

$$< c_{14} + \Re\frac{1}{\sigma - 1 + 2ti} + \sum_{p|k}\log p$$

$$< c_{14} + \log k + \operatorname{Min}\left(\frac{1}{\sigma - 1}, \frac{1}{2t}\right). \tag{11}$$

Es sei nun

$$L(\beta + \gamma i, \chi) = 0, \quad \beta > \frac{4}{5}, \quad 0 < \gamma \leqq 1.$$

(Die Betrachtung solcher Wurzeln genügt offenbar.) Ich setze

$$\sigma_0 = 1 + \frac{1}{200 \log k}, \quad s_0 = \sigma_0 + \gamma i.$$

Nach (10), (9) und (11) ist

$$0 < \frac{3}{4} + 150 \log k - \Re\frac{L'}{L}(\sigma_0 + \gamma i, \chi) + \frac{c_{14}}{4} + \frac{\log k}{4} + \operatorname{Min}\left(50 \log k, \frac{1}{8\gamma}\right)$$

$$< 151 \log k + \operatorname{Min}\left(50 \log k, \frac{1}{8\gamma}\right) - \Re\frac{L'}{L}(\sigma_0 + \gamma i, \chi) \quad \text{für} \quad k > c_{15}. \tag{12}$$

Im Kreise $|s - s_0| \leqq \dfrac{1}{2}$ ist nach (3) und (6)

$$\left|\frac{L(s, \chi)}{L(s_0, \chi)}\right| < k^2 \quad \text{für} \quad k > c_{16} > c_{15}.$$

Es sei fortan $k > c_{16}$; für $k \leqq c_{16}$ ist ja die Behauptung trivial, da $L(s, \chi)$ für $\sigma = 1$ bekanntlich nicht verschwindet.

Nach der Formel auf S. 100, Z. 4 der in Anm. 2 zitierten Arbeit (mit $r = \dfrac{1}{2}$, $M = 2 \log k$) ist also

$$-\Re\frac{L'}{L}(\sigma_0 + \gamma i, \chi) < 16 \log k - \frac{1}{\sigma_0 - \beta} \tag{13}$$

und, falls $\gamma < \dfrac{1}{200}$,

$$(14)\quad -\Re\frac{L'}{L}(\sigma_0+\gamma i,\chi)<16\log k-\frac{1}{\sigma_0-\beta}-\Re\frac{1}{s_0-(\beta-\gamma i)};$$

denn jedenfalls ist

$$\sigma_0-\frac{1}{4}<\frac{4}{5}<\beta<\sigma_0,$$

und für $\gamma<\frac{1}{200}$ gehört wegen

$$|\beta-\gamma i-s_0|=|\beta-\sigma_0-2\gamma i|\leqq\sigma_0-\beta+2\gamma<\frac{1}{200}+\frac{1}{5}+\frac{1}{100}<\frac{1}{4}$$

auch die Wurzel $\beta-\gamma i$ dem Kreise $|s-s_0|\leqq\frac{1}{4}$ an. Für $\gamma\leqq\frac{1}{200\log k}$ ist

$$\gamma\leqq\sigma_0-1\leqq\sigma_0-\beta,$$

also in (14)

$$(15)\qquad \Re\frac{1}{s_0-(\beta-\gamma i)}=\frac{\sigma_0-\beta}{(\sigma_0-\beta)^2+4\gamma^2}\geqq\frac{1}{5}\frac{1}{\sigma_0-\beta}.$$

1. Es sei $\gamma>\frac{1}{200\log k}$. Dann ist nach (12) und (13)

$$(16)\quad 0<151\log k+25\log k+16\log k-\frac{1}{\sigma_0-\beta}=192\log k-\frac{1}{\sigma_0-\beta}.$$

2. Es sei $\gamma\leqq\frac{1}{200\log k}$. Dann ist nach (12), (14) und (15)

$$0<151\log k+50\log k+16\log k-\frac{6}{5}\frac{1}{\sigma_0-\beta}=217\log k-\frac{6}{5}\frac{1}{\sigma_0-\beta},$$

$$0<\frac{5}{6}217\log k-\frac{1}{\sigma_0-\beta}<192\log k-\frac{1}{\sigma_0-\beta}.$$

(16) gilt also in beiden Fällen und liefert

$$1-\beta=\sigma_0-\beta-\frac{1}{200\log k}>\left(\frac{1}{192}-\frac{1}{200}\right)\frac{1}{\log k}=\frac{1}{c_{17}\log k}.$$

Göttingen, den 29. März 1926.

RUDOLFO LIPSCHITZ IN MEMORIAM

Über Summen von fünf und sechs Quadraten und konforme Transformationen.

Von *E. Study* in Bonn.

Die Theorie der orthogonalen Transformationen, in der man den wesentlichsten Fortschritt *Lipschitz* verdankt, fällt bekanntlich verschieden aus, je nachdem die Zahl n der Veränderlichen gerade oder ungerade ist. Immer gibt es zwei Scharen oder *Schichten* $\mathfrak{G}_N$, $\mathfrak{H}_N$ solcher Transformationen mit $N = \frac{n(n-1)}{2}$ wesentlichen Parametern, und zwar steht es so im reellen wie im komplexen Gebiete. Entsprechend dem Werte 1 oder -1 der Transformationsdeterminante werden *eigentliche* und *uneigentliche orthogonale Transformationen* unterschieden. Die der *Hauptschicht* $\mathfrak{G}_N$ bilden, wenn $n > 2$ ist, für sich eine im Sinne von *S. Lie* „einfache" Gruppe, ausgenommen den Fall $n = 4$. Ist indessen n gerade, so ist diese Gruppe nicht auch einfach in einem engeren Sinne des Wortes. Sie enthält dann eine involutorische Transformation, die mit allen Transformationen von $\mathfrak{G}_N$ (und $\mathfrak{H}_N$) vertauschbar ist: *Die Diametralspiegelung*, die in einem Vorzeichenwechsel aller Veränderlichen besteht. Bei ungeraden Werten von n liegt die Diametralspiegelung in der Nebenschicht $\mathfrak{H}_N$. In beiden Fällen sind alle Transformationen von $\mathfrak{G}_N$, $\mathfrak{H}_N$ invariant-gepaart, derart, daß jede von zwei zusammengehörigen Transformationen aus der anderen durch Zusammensetzung mit der Diametralspiegelung entsteht.

Ähnlich verhalten sich dann auch Summen von Quadraten, deren einige mit dem Faktor -1 multipliziert sind. Wir reden dann von *pseudorthogonalen* Transformationen und bedienen uns ebenfalls der Bezeichnung $\mathfrak{G}_N$, $\mathfrak{H}_N$. Nur bilden dann die reellen Transformationen einer jeden der Scharen $\mathfrak{G}_N$, $\mathfrak{H}_n$ selbst schon zwei Schichten.

Ordnet man nun die Gruppen $\mathfrak{G}_n$, $\mathfrak{H}_n$ nach steigenden Werten von n in eine Reihe, so kennt man einige Fälle, die eine Sonderstellung einnehmen. Es sind (abgesehen von den trivialen Werten $n = 1, 2$) die Gruppen, die den Werten $n = 4, 6, 8$ entsprechen. In dem schon erwähnten Falle $n = 4$ gibt es in $\mathfrak{G}_N = \mathfrak{G}_6$ zwei invariante Untergruppen $\mathfrak{G}_3^l$ und $\mathfrak{G}_3^r$, und diese sind bei geradem Trägheitsindex reell. Im Falle $n = 6$, also $N = 15$, lassen sich neben die von *Lipschitz* be-

handelten Parameterdarstellungen noch zwei andere und einfachere stellen, mit halb so vielen (16) Parametern, die durch keine Gleichung verknüpft sind. Sie sind reell bei ungeradem Trägheitsindex. Ist endlich $n = 8$, also $N = 28$, so läßt sich, durch Einführung weiterer Raumelemente, die Gruppe $\mathfrak{G}_{28}$, $\mathfrak{H}_{28}$ zu einer Gruppe erweitern, die sechs analytisch getrennte Scharen (Schichten) von Transformationen umfaßt, und diese umfassen je ∞^{28} reelle Transformationen, wenn der Trägheitsindex den Wert 4 hat [1]).

Gegenstand der folgenden Untersuchung ist der singuläre Fall $n = 6$. Das früher darüber Vorgetragene soll, übrigens in einer für sich lesbaren Darstellung, in verschiedenen Punkten ergänzt werden.

Es werden hier „pseudorthogonale" Transformationen betrachtet, und zwar in der Hauptsache solche, die eine *Quadratsumme vom Trägheitsindex Eins* in Ruhe lassen. Dieser Fall nimmt, nach einem Satze von *E. Cartan*, zusammen mit dem auch schon erwähnten des Trägheitsindex Drei in bezug auf die reellen Transformationen eine Sonderstellung ein. Der zweite dieser Fälle tritt in der Liniengeometrie auf, die, in Gestalt vierreihiger Matrizen, auch ein brauchbares Rechnungsmittel liefert. Im ersten Fall sind das entsprechende Mittel *zweireihige Matrizen*, deren Elemente Quaternionen sind, entsprechend der Zahl 16 der homogenen Parameter. Es übernimmt dann eine von mir *Nablafunktion* genannte für reelle Argumente nicht negative Funktion der sechzehn Koordinaten von vier Quaternionen,

$$\begin{Bmatrix} p\,q \\ r\,s \end{Bmatrix} = p\tilde{p}\,.\,s\tilde{s} - p\tilde{r}s\tilde{q} - q\tilde{s}r\tilde{p} + q\tilde{q}\,.\,r\tilde{r}$$

dieselbe Rolle, die in der projektiven Geometrie des Raumes R_3 der Determinante einer vierreihigen Matrix zukommt. Die Theorie leistet dann ohne Weiteres auch die Darstellung und Zusammensetzung der reellen oder komplexen konformen Transformationen in einem geeigneten Kontinuum M_4^2: Diese werden ausgeschnitten durch *eine zur Gruppe* $\mathfrak{G}_{15}$, $\mathfrak{H}_{15}$ *meromorphe Kollineationsgruppe* G_{15}, H_{15}. M_4^2 ist dann das (einzige) zu der ausgeschnittenen Gruppe gehörige „natürliche" Punktkontinuum [2]). Es ist ein Seitenstück zum Punktkontinuum der projektiven Geometrie im Raume R_4. Es wird von mir als *Möbiussches Kontinuum* bezeichnet.

Die zu besprechende Darstellung der Gruppe $\mathfrak{G}_{15}$, $\mathfrak{H}_{15}$ durch explizite Formeln

---

[1]) Auf diese besonderen Werte von n und auf ihr Auftreten in Anwendungen beziehen sich, unter anderem, die folgenden Arbeiten des Verfassers:

$n = 4$: American Journal of Mathematics, v. 19, 1906, p. 116. (Dort noch einige weitere Literatur.)

$n = 6$: Mathematische Zeitschrift, Bd. 18 und 21; I und II, 1923, S. 55, 201, III und IV, 1924, S. 45, 174, wo nebenbei auch der Fall $n = 5$ abgehandelt wird.

$n = 8$: Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft, Jahrgang XII, 1913. (Grundlagen und Ziele der analytischen Kinematik.)

Hier kommt die zweite dieser Arbeiten in Betracht, deren Titel ist: Ein Seitenstück zur Theorie der linearen Transformationen einer komplexen Veränderlichen. Hierauf beziehen sich die Zitate im Texte.

[2]) Wegen dieses Begriffs siehe mein Buch Geometrie der Dynamen (1903), S. 272 u. ff.

habe ich bereits angegeben (M. Z., I, S. 81, 85). Es ist mir aber damals entgangen, daß diese selben Formeln viel übersichtlicher geschrieben werden können. In der nun vorzuführenden Gestalt (§ 2) sind sie so einfach, daß man ihnen alles Wesentliche ansieht, und daß sie sich sogar dem Gedächtnis leicht einprägen lassen. Ich komme übrigens auch noch aus einem anderen Grunde auf diesen Stoff zurück. Ich habe mich nämlich davon überzeugen müssen, daß meine frühere zum Teil wohl etwas knapp gehaltene Darlegung nicht ganz verstanden worden ist. Ich setze daher, einleitungsweise, den Begriff des *Möbius*schen Kontinuums (M_4^2) und seinen Zusammenhang mit der Elementargeometrie in R_4 nochmals und eingehender auseinander (§ 1) und behandle dann auch noch einige Untergruppen der Gruppe $\mathfrak{G}_{15}$, $\mathfrak{H}_{15}$ ausführlicher (§§ 3—5).

Freilich muß ich annehmen, daß der Leser mit Quaternionenmatrizen und mit der Nablafunktion umzugehen versteht; auch können nicht wohl alle zu gebrauchenden Zeichen nochmals erklärt werden. Man findet alles Nötige bequem zusammengestellt in den Paragraphen 2 und 3 der zitierten älteren Arbeit (M. Z. I, S. 62—78).

1.
Das Möbiussche Kontinuum.

Was zunächst zu sagen sein wird, erstreckt sich auf eine unbestimmte Dimensionenzahl, soll aber gleich auf den nachher zu behandelnden besonderen Fall zugeschnitten werden.

Wir gehen aus von einer im projektiven Kontinuum R_5 gelegenen quadratischen Mannigfaltigkeit M_4^2 vom Trägheitsindex Eins, die dargestellt werden soll durch die Gleichung

$$Z_a^2 - Z_0^2 - Z_1^2 - Z_2^2 - Z_3^2 - Z_\omega^2 = 0. \tag{1}$$

Verstehen wir dann unter Z — ohne Index — eine Quaternion mit den Koordinaten Z_0, Z_1, Z_2, Z_3, so kann die Gleichung (1) auch in Gestalt einer Proportion geschrieben werden:

$$Z_a + Z_\omega : Z = \tilde{Z} : Z_a - Z_\omega. \tag{2}$$

Wir betrachten nun — was uns freisteht — M_4^2 als eine *sphärische Mannigfaltigkeit* (Kugel von vier komplexen Dimensionen) und projizieren sie, nach bekanntem Verfahren, stereographisch, und zwar aus dem Punkte

$$1 : 0 : 0 : 0 : 0 : -1 \tag{3}$$

— dem *Projektionszentrum* — in das projektive Kontinuum R_4^*, das durch die Gleichung $Z_\omega = 0$ dargestellt wird. Dies geschieht durch die Substitution

$$\frac{Z}{Z_a + Z_\omega} = \frac{Z_a - Z_\omega}{\tilde{Z}} = z, \tag{4}$$

die jedem Punkte von M_4^2, für den $Z_a + Z_\omega \neq 0$ ist, eindeutig-umkehrbar eine Quaternion z zuordnet, mit rechtwinkligen kartesischen Koordinaten z_0, z_1, z_2, z_3. Da der Ansatz (4) für $Z_a + Z_\omega = 0$ versagt, so ergeben sich als *singuläre*

Stellen der bewirkten Abbildung auf der einen Seite alle Punkte von M_4^2, in denen diese Mannigfaltigkeit von dem *Tangentialflach* des Projektionszentrums, nämlich eben dem R_4

$$Z_\alpha + Z_\omega = 0 \tag{5}$$

getroffen wird, und auf der anderen alle Stellen oder Punkte z des Flachs R_4^* oder $Z_\omega = 0$, für die mindestens eine der Koordinaten $z_0 \ldots z_3$ unendlich wird — es ergeben sich mithin als singuläre Stellen in R_4^* die Punkte des zugehörigen „uneigentlichen" Flachs R_3^*, für das die Gleichungen $Z_\alpha + Z_\omega = 0$ und $Z_\omega = 0$ zusammen bestehen. Von dem Projektionszentrum geht ein ganz auf M_4^2 verlaufender Kegel aus, dessen *Spur* in R_3^* eine nicht-singuläre Fläche 2. Ordnung, *die absolute Fläche* im Raume R_4^* ist. Diese wird berührt von $\infty^{2\cdot 3}$ in R_4^* gelegenen Flachen R_3.

$$\varphi_0\xi_0 + \varphi_1\xi_1 + \varphi_2\xi_2 + \varphi_3\xi_3 + \varphi_\omega\xi_\omega = 0 \quad \left\{x_k = \frac{\xi_k}{\xi_\omega}\right\}, \tag{6}$$

deren Koordinaten der Gleichung

$$\varphi_0^2 + \varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2 = 0 \tag{7}$$

genügen, den *isotropen Flachen* oder „*Nullflachen*" des Raumes R_4^*. Betrachten wir jetzt die anderen Schnitte von M_4^2 mit Tangentialflachen R_4, so können deren Berührungspunkte entweder der Gleichung $X_\alpha + X_\omega = 0$ genügen oder nicht. Im ersten Falle werden diese Schnittfiguren (Kegel) in isotrope Flache projiziert, und zwar jede in ein anderes Flach. Die Koordinaten dieses Flachs sind denen des Punktes (X) zu entnehmen:

$$\begin{aligned}\varphi_0 : \varphi_1 : \varphi_2 : \varphi_3 : \varphi_\omega = \\ = X_0 : X_1 : X_2 : X_3 : X_\omega .\end{aligned} \tag{8}$$

Im zweiten Falle erhalten wir als Projektion der Schnittfigur einen *isotropen Kegel* oder eine *Nullkugel* (Kugel vom Radiusquadrat Null),

$$(z_0 - x_0)^2 + (z_1 - x_1)^2 + (z_2 - x_2)^2 + (z_3 - x_3)^2 = 0, \tag{9}$$

wobei der Zusammenhang zwischen den Koordinaten X_k, Z_k und den Koordinaten $x_k = \xi_k : \xi_\omega$, $z_k = \zeta_k : \zeta_\omega$ beidemale durch die Gleichung (4) vermittelt wird. Rückt der Berührungspunkt auf das Tangentialflach des Projektionszentrums, so geht die Gleichung (9) im allgemeinen in eine der Gleichungen (6) über. Die Nullflache sind also Grenzlagen von Nullkugeln. Hinzu kommt aber noch das Projektionszentrum selbst, das dem uneigentlichen Flach R_3^* von R_4^* ($\omega_0 = \omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 0$) entspricht.

Was sonstigen Schnitten von M_4^2 mit „Flachen" R_4, R_3 und R_2 (Ebenen) entspricht, braucht wohl nicht auseinandergesetzt zu werden.

Aus dem Gesagten entnimmt man, daß trotz der singulären Stellen der Abbildung zwischen den Mannigfaltigkeiten M_4^2 und R_4^* doch in diesem letzten Raume Figuren zur Verfügung stehen, die den Punkten von M_4^2 eindeutig-umkehrbar und stetig (genauer: projektiv und zwar *korrelativ*) zugeordnet sind; wobei allerdings die Stetigkeit erst dann zum Vorschein kommt, wenn man sich statt der kartesischen Koordinaten $z_0 \ldots z_3$ der schon eingeführten homogenen Koordinaten

$\zeta_0 : \zeta_1 : \zeta_2 : \zeta_3 : \zeta_\omega$ bedient. Diese Figuren sind eben die Nullkugeln oder isotropen Kegel mit ihren Grenzlagen. Von jedem eigentlichen Punkt (x) oder (ξ) geht ein solcher Kegel aus, der einem der Gleichung $X_\alpha + X_\omega = 0$ nicht genügenden Punkt (X) von M_4^2 entspricht. Ferner entspricht jedem isotropen Flach φ ein Punkt (X) von M_4^2, der dem zum Projektionszentrum gehörigen Kegel angehört. Drittens entspricht dem (doppelt zählenden) uneigentlichen Flach R_3^*, $\varphi_0 : \varphi_1 : \varphi_2 : \varphi_3 : \varphi_\omega = 0 : 0 : 0 : 0 : 1$, das Grenzfall isotroper Flache ist, wie schon gesagt, das Projektionszentrum selbst. Man kann also von den Nullkugeln und ihren Grenzlagen aus sich die Mannigfaltigkeit M_4^2 verschaffen, auf ähnliche Art, wie man etwa von den gegenwärtig „eigentlich" genannten Punkten eines Euklidischen Raumes R_3 aus zum Punktbegriff der projektiven Geometrie kommen kann und tatsächlich auch zuerst gekommen ist. Dieses jetzt etwas obsolet gewordene Verfahren besteht darin, daß man zunächst jedem Punkt, d. h. jedem der nachher „eigentlich" genannten Punkte, das durch ihn bestimmte Geradenbündel zuordnet. Grenzlagen dieser Bündel mit Scheitel sind dann Parallelenbündel, Bündel ohne Scheitel. Man erfindet sich „Scheitel" auch für diese Bündel hinzu, was durch Einführung der homogenen Punktkoordinaten ξ_k geschieht. Die so erhaltenen „uneigentlichen Punkte" werden dann mit den „eigentlichen Punkten" als „Punkte" schlechthin zusammengefaßt. Das entstandene Punktkontinuum ist das der projektiven Geometrie. Es ist abgeschlossen, im Gegensatz zu dem offenen Punktkontinuum der Elementargeometrie. Die Gesamtheit der neu eingeführten „Punkte" bildet eine weitere Figur, die „uneigentliche Ebene". *Genau so* kann man nun auch hier zu Werke gehen. Erst werden dann den allein vorhandenen „Punkten", die sich von denen der Elementargeometrie in nichts unterscheiden (abgesehen von der Dimensionenzahl und der hier schon von vornherein vorzunehmenden Ausdehnung der ganzen Betrachtung auf das komplexe Gebiet) die Nullkugeln zugeordnet, als deren Doppelpunkte oder Scheitel dann jene Punkte erscheinen. Zweitens erfindet man sich zu Grenzlagen der Nullkugeln, den Nullflachen, ebenfalls „Scheitel", was durch Einführung der homogenen und durch eine quadratische Gleichung verbundenen Koordinaten X_a, $X_0, \ldots X_3$, X_ω geschieht. Drittens bemerkt man, daß das so erhaltene Punktkontinuum noch nicht abgeschlossen ist, daß es aber durch Hinzufügung eines einzigen weiteren „Punktes" abgeschlossen wird, nämlich des Punktes, der vorhin, bei anderem Verfahren, als Projektionszentrum gedient hatte. Man hat dann wiederum eine lückenlose algebraische Punktmannigfaltigkeit, eben unsere Mannigfaltigkeit M_4^2 vor sich, auf die man ganz ebenso unbeschränkt die Methoden der Algebra anwenden kann, wie man es herkömmlicher Weise im Falle des projektiven Kontinuums $\zeta_0 : \zeta_1 : \zeta_2 : \zeta_3 : \zeta_\omega$ eines Raumes R_4 tut; nur daß dieses weitere Kontinuum M_4^2 einen anderen Zusammenhang hat.

Ich möchte dieses Verfahren zur Einführung der Mannigfaltigkeit M_4^2 keineswegs empfehlen. Heute, wo man die projektive Geometrie, im reellen wie im komplexen Gebiet, und für alle Dimensionenzahlen, nun einmal zur Verfügung hat, erscheint es als zu schwerfällig. Wir können aber, wenn wir es noch nicht wissen sollten, daraus lernen, daß die Erweiterung des Punktbegriffs der Elementargeometrie zum Punktbegriff der projektiven Geometrie nichts Alleinseligmachendes

ist. Vielmehr ist die vorgetragene Erweiterung des elementaren Punktbegriffs zum Punktbegriff einer quadratischen Mannigfaltigkeit als mit jener anderen *ungefähr gleichwertig* anzusehen. Bei einer Weiterführung unserer Betrachtung würde sich das auch noch darin zeigen, daß auf M_4^2 ebenfalls Figuren nachgewiesen werden können, die den Punkten von R_4^* eindeutig und stetig zugeordnet sind.

Natürlich bedarf man nun auch einer Terminologie, analog der in der projektiven Geometrie üblichen. Ich habe für die Erweiterung M_4^2 des elementaren Punktkontinuums von R_4 den Namen *Möbiussches Kontinuum* eingeführt und habe die bei der Erweiterung hinzugefügten Punkte, unter Ausschluß des Projektionszentrums, *akzessorische Punkte* (des Möbiusschen Kontinuums) genannt. Für den Vorschlag einer solchen Terminologie ist die Sonderstellung des Projektionszentrums maßgebend gewesen. Dieses ist der Scheitel, also Doppelpunkt des Kegels, der von ihm und den akzessorischen Punkten gebildet wird. Es tritt bei dem geschilderten Erweiterungsprozeß zuletzt und dann allein auf. Es ist aber auch der einzige reelle Punkt des genannten Kegels. Geht man also von der Geometrie im reellen Gebiete aus, so hat man zunächst überhaupt nur diesen einen (uneigentlichen) Punkt den „eigentlichen" Punkten hinzuzufügen, die anderen — also die „akzessorischen" — Punkte kommen erst hinzu, wenn man nachträglich auch auf Imaginäres Rücksicht nehmen will.

Eine Bevorzugung des Reellen ist aber in unserem Falle besser motiviert als bei vielen anderen geometrischen Untersuchungen, wo sie öfter hemmend gewirkt hat. Es beruht das auf dem bekannten Satz von *C. S. Peirce* und *Frobenius*, wonach die reellen Quaternionen außer den gemeinen komplexen Zahlen das einzige System komplexer Zahlen sind, bei dem es keine von Null verschiedenen Teiler der Null gibt. Beschränkt man sich auf die Betrachtung reeller Figuren, so hat man im Rechnen mit Quaternionen z eine naturgemäße Rechnungsmethode, ähnlich der des Rechnens mit gewöhnlichen komplexen Zahlen. Wie man bei diesen eine uneigentliche Zahl ∞ einführen und dann mit Brüchen der Form

$$\frac{az+b}{cz+d}$$

mechanisch rechnen kann, so auch im Falle der Quaternionen, nur daß derartige Brüche jetzt zweigestaltig sein werden, da bei nicht-kommutativer Multiplikation eine vordere und eine hintere Division unterschieden werden müssen. Man kann die Koordinatensysteme reeller Quaternionen z, vermöge der stereographischen Projektion, einzeln den Punkten des reellen Zugs von M_4^2 zuordnen, man kann die reellen Quaternionen auf diesen reellen Zug verteilen oder „auf ihm aufpflanzen", ganz so, wie man bei Einführung der nach *B. Riemann* benannten „Zahlenkugel" verfährt, die eben nichts anderes ist als der reelle Zug des einfachsten Möbiusschen Punktkontinuums ($n = 2$). Ähnlich wie in allen Fällen $n > 2$, gehen im unsrigen aus den automorphen Kollineationen von M_4^2, d. i. aus deren automorphen konformen Transformationen, alle konformen Transformationen in dem Raume R_4^* hervor, in den man projiziert hat. Diese Kollineationen bilden die zuvor genannte Gruppe G_{15}, H_{15}, und soweit sie die Punkte von M_4^2 selbst vertauschen, erscheinen

sie nun, bei Gebrauch der Veränderlichen z, als Transformationen eben dieser Veränderlichen, in doppelter Form

$$\frac{az+b|}{|cz+d} = z' = \frac{|za+\beta}{z\gamma+\delta|}, \qquad \frac{l\tilde{z}+m|}{|n\tilde{z}+r} = z' = \frac{|\tilde{z}\lambda+\mu}{\tilde{z}\nu+\varrho|},$$

wobei jedesmal die Nablafunktionen

$$\left\{\begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix}\right\}, \quad \left\{\begin{matrix} a & \gamma \\ \beta & \delta \end{matrix}\right\}; \qquad \left\{\begin{matrix} l & m \\ n & r \end{matrix}\right\}, \quad \left\{\begin{matrix} \lambda & \nu \\ \mu & \varrho \end{matrix}\right\}$$

von Null verschieden sein müssen. Im reellen Gebiete gibt es dann keine singulären Stellen, da die uneigentliche Quaternion $z = \infty$ hier so wenig eine Sonderstellung einnimmt als bei den linearen Transformationen einer gewöhnlichen komplexen Veränderlichen der uneigentliche „Wert“ ∞ dieser Veränderlichen. Insofern diese reellen Transformationen nur einen Ausschnitt aus den entsprechenden Transformationen von G_{15}, H_{15} bilden (die sich ja auch auf Punkte beziehen, die nicht auf M_4^2 liegen), haben wir es mit einer weiteren Gruppe zu tun, der ich die Zeichen Γ_{15}, H_{15} zugeordnet habe. Die Transformationen von Γ_{15}, H_{15} sind also im reellen Gebiete völlig singularitätenfrei, und nur formal meistens mit Unstetigkeiten (bei $z = \infty$ und $z' = \infty$) behaftet; Γ_{15}, H_{15} ist im Reellen *holomorph* zu G_{15}, H_{15}. Für das komplexe Gebiet gilt das ebenfalls, wenn man nicht auf dem ursprünglichen Gruppenbegriff besteht, der nur vollkommen-eindeutige Zuordnungen kennt, sondern mit *S. Lie* das Wort Gruppe in einem erweiterten Sinne zulassen will.

Durch die stereographische Projektion werden also auf M_4^2 ausgezeichnet: 1. das Projektionszentrum, 2. der von ihm ausgehende Kegel. Dieser wird auf zwei Arten von $\infty^{2\cdot 1}$ Ebenen beschrieben, die auf der Spur des Kegels im Raume oder Flach R_4^* die beiden Scharen von $\infty^{2\cdot 1}$ Geraden auf der absoluten Fläche ausschneiden, die sogenannten Erzeugenden dieser Fläche. Die $\infty^{2\cdot 2}$ Schnittlinien verschiedenartiger (linkseitiger, rechtseitiger) Ebenen des Kegels haben zu Spuren die Punkte der absoluten Fläche. Der Kegel ist *projektiv* (korrelativ) bezogen auf die durch die Gleichung (7) bestimmte Schar von $\infty^{2\cdot 3}$ Flachen, und zwar so, daß den Punkten einer Erzeugenden immer ein Büschel *paralleler* isotroper Flache im Raume R_4^* entspricht ($\varphi_0 : \varphi_1 : \varphi_2 : \varphi_3 = \varphi_0' : \varphi_1' : \varphi_2' : \varphi_3'$), solcher mit gemeinsamer Berührungsebene der absoluten Fläche. (Vgl. Nr. 8.) Dem Scheitel des Kegels entspricht das uneigentliche Flach ($\varphi_0 = \varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = 0$) R_3^* des Raumes oder Flachs R_4^*.

Alles dieses, und was sonst noch daraus folgt, hat natürlich mit der Geometrie der Gruppe G_{15}, H_{15} gar nichts zu tun. In dieser handelt es sich ja um Eigenschaften von Figuren auf M_4^2, die durch Transformationen der genannten Gruppe oder wenigstens ihrer invarianten Untergruppe G_{15} *nicht* zerstört werden können. Das Interesse, das solche Überlegungen immerhin haben können, entspringt lediglich dem Bedürfnis, die Geometrie auf M_4^2 mit Untersuchungen in Zusammenhang zu bringen, die sich auf die Euklidische oder projektive Geometrie in einem Raume R_4^* beziehen.

2.
Die Gruppe $\mathfrak{G}_{15}$, $\mathfrak{H}_{15}$.

Verlangen wir nun nicht mehr nur automorphe Transformationen der *Gleichung* (1), sondern solche, die auch den algebraischen Ausdruck (die quadratische *Form*) reproduzieren, der auf ihrer linken Seite steht, so erhalten wir die weitere Gruppe $\mathfrak{G}_{15}$, $\mathfrak{H}_{15}$, von der in der Einleitung schon die Rede war. Auf diese Gruppe ist, wie schon gesagt wurde, die Gruppe G_{15}, H_{15} meromorph bezogen, so nämlich, daß jeder Transformation von G_{15} oder H_{15} *zwei* Transformationen von $\mathfrak{G}_{15}$ oder $\mathfrak{H}_{15}$ zugeordnet sind, deren jede aus der anderen durch Zusammensetzung mit der Diametralspiegelung hervorgeht. Ich nenne die Transformationen von $\mathfrak{G}_{15}$, $\mathfrak{H}_{15}$, aus evidentem Grunde, *pseudorthogonale Transformationen.* Diese sind also in ihrer Gesamtheit ebenfalls auf zwei analytisch-getrennte Schichten verteilt, die — wie bei den orthogonalen Transformationen — durch den Wert 1 oder — 1 der Transformationsdeterminante unterschieden werden können.

Setzen wir demnach an Stelle der Gleichung (1) etwa die Gleichung

$$Z_a^2 - Z_0^2 - Z_1^2 - Z_2^2 - Z_3^2 - Z_\omega^2 = 1, \tag{10}$$

so haben wir damit eine nicht reell-geradlinige *pseudosphärische* Mannigfaltigkeit M_5^2 definiert, deren reeller Zug aus zwei nur durch unendliche Koordinatenwerte zusammenhängenden Stücken besteht, sogenannten Mänteln oder Schalen, wie der reelle Zug eines zweischaligen Hyperboloids[1]). Diese beiden Stücke werden dann, ebenso wie bei dem Hyperboloid, durch die Diametralspiegelung miteinander vertauscht. Die automorphen linearen Transformationen der Gleichung (10), d. h. eben die Transformationen der Gruppe $\mathfrak{G}_{15}$, $\mathfrak{H}_{15}$ definieren dann eine Art Nicht-Euklidischer Geometrie, die ich *pseudosphärische Geometrie* (auf M_5^2) nenne, und die von der sogenannten hyperbolischen Geometrie, die aus ihr durch Zusammenfassung von je zwei diametral-gegenüberliegenden Figuren entsteht, zu unterscheiden ist[2]). Die eigentlichen und uneigentlichen Transformationen von $\mathfrak{G}_{15}$, $\mathfrak{H}_{15}$ liefern dann die zugehörigen „*Bewegungen*“ und „*Umlegungen*“. Die Gruppe $\mathfrak{G}_{15}$, und ebenso die Schar $\mathfrak{H}_{15}$, hat also *zwei* reelle Züge. Unterscheidet man dann die zwei Stücke der Mannigfaltigkeit (10) etwa durch die Worte *zugänglich* ($Z_a \geqq 1$) und *unzugänglich* ($Z_a \leqq 1$), und betrachtet man als *zugängliche* Transformationen von $\mathfrak{G}_{15}$ und $\mathfrak{H}_{15}$ nur die, die das zugängliche Gebiet von M_5^2 in Ruhe lassen (und dann natürlich auch das andere), so wird dadurch die durch die Zuordnung G_{15}, H_{15} $\rightarrow$ $\mathfrak{G}_{15}$, $\mathfrak{H}_{15}$ verloren gegangene Eindeutigkeit wieder hergestellt: Jeder reellen Transformation von G_{15}, H_{15} entspricht eine einzige zugängliche Transformation von $\mathfrak{G}_{15}$, $\mathfrak{H}_{15}$. *Die beiden geschichteten Gruppen, die von den reellen Transformationen von G_{15}, H_{15} und den reellen zugänglichen Transformationen von $\mathfrak{G}_{15}$, $\mathfrak{H}_{15}$ gebildet werden, sind zueinander holomorph.*

---

[1]) Ebenso kann man natürlich auch das (übrigens keineswegs uninteressante) Analogon

$$-Z_a^2 + Z_0^2 + Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_\omega^2 = 1$$

eines einschaligen Hyperboloids betrachten, wovon indessen nicht weiter die Rede sein soll.

[2]) Diese Unterscheidung ist schon sehr oft außer acht gelassen worden.

Ich wende mich jetzt zur analytischen Darstellung der Transformationen von $\mathfrak{G}_{15}$, $\mathfrak{H}_{15}$, ohne auf die pseudosphärische Geometrie weiter einzugehen.

Mit Hilfe von Quaternionenmatrizen lassen sich alle Transformationen der Gruppe $\mathfrak{G}_{15}$ durch sechzehn homogene Parameter mit bilinearer Zusammensetzung ausdrücken, und zwar jede auf zwei wesentlich-verschiedene Arten:

$$(11,l)\qquad \boxed{\begin{pmatrix} Z'_a - Z'_\omega, & Z' \\ \tilde{Z}', & Z'_a + Z'_\omega \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{\nabla_l}} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_a - Z_\omega, & Z \\ \tilde{Z}, & Z_a + Z_\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{a} & \tilde{c} \\ \tilde{b} & \tilde{d} \end{pmatrix},}$$

$$(11,r)\qquad \boxed{\frac{1}{\sqrt{\nabla_r}} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{\alpha} & \tilde{\beta} \\ \tilde{\gamma} & \tilde{\delta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_a - Z_\omega, & \tilde{Z} \\ Z, & Z_a + Z_\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z'_a - Z'_\omega, & \tilde{Z}' \\ Z', & Z'_a + Z'_\omega \end{pmatrix},}$$

$$(12)\qquad \nabla_l = \begin{Bmatrix} a & b \\ c & d \end{Bmatrix}, \qquad \nabla_r = \begin{Bmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{Bmatrix}.$$

Die Zusammensetzung zweier nacheinander auszuführender Transformationen T, T' der Gruppe zu einer dritten T'' erfolgt dann nach den Regeln:

$$(13,l)\qquad \boxed{\begin{pmatrix} a'' & b'' \\ c'' & d'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \qquad \sqrt{\nabla''_l} = \sqrt{\nabla'_l}\sqrt{\nabla_l},}$$

$$(13,r)\qquad \boxed{\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha' & \gamma' \\ \beta' & \delta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha'' & \gamma'' \\ \beta'' & \delta'' \end{pmatrix}, \qquad \sqrt{\nabla_r}\sqrt{\nabla'_r} = \sqrt{\nabla''_r}.}$$

Insbesondere werden auch die reellen Transformationen von $\mathfrak{G}_{15}$ durch reelle Quaternionenmatrizen erschöpfend dargestellt, und zwar werden die zugänglichen erhalten, wenn man

$$(14)\qquad \sqrt{\nabla_l} > 0, \qquad \sqrt{\nabla_r} > 0$$

annimmt.

Die zweierlei Formeln stellen dieselbe Transformation dar, wenn

$$(15)\quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} \delta, & -\beta \\ -\gamma, & \alpha \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \text{oder, was} \\ \text{dasselbe} \\ \text{ist,} \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} d, & -c \\ -b, & a \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix}$$

reziproke Matrizen sind und außerdem

$$\boxed{\sqrt{\nabla_l} \cdot \sqrt{\nabla_r} = 1}$$

ist.

(15) hat zu bedeuten, daß

$$(16,l)\qquad \begin{aligned} &\tilde{a}\,a\,.\,\tilde{d} - \tilde{b}\,a\;\;\tilde{c} = \nabla_l\,.\,a, \qquad \tilde{d}\,c\;\;\tilde{a} - \tilde{c}\,c\,.\,\tilde{b} = \nabla_l\,.\,\gamma, \\ &\tilde{a}\,b\;\;\tilde{d} - \tilde{b}\,b\,.\,\tilde{c} = \nabla_l\,.\,\beta, \qquad \tilde{d}\,d\,.\,a - \tilde{a}\,d\;\;\tilde{b} = \nabla_l\,.\,\delta, \end{aligned}$$

$$(16,r)\qquad \begin{aligned} &\nabla_r\,.\,a = \tilde{\delta}\,.\,a\,\tilde{a} - \tilde{\gamma}\;\;a\,\tilde{\beta}, \qquad \nabla_r\,.\,b = \tilde{\delta}\;\;\beta\,\tilde{a} - \tilde{\gamma}\,.\,\beta\,\tilde{\beta}, \\ &\nabla_r\,.\,c = \tilde{\alpha}\;\;\gamma\,\tilde{\delta} - \tilde{\beta}\,.\,\gamma\,\tilde{\gamma}, \qquad \nabla_r\,.\,d = \tilde{\alpha}\,.\,\delta\,\tilde{\delta} - \tilde{\beta}\;\;\delta\,\tilde{\gamma} \end{aligned}$$

(Vgl. Nr. 86—88.)

ist, woraus $\triangle_l \triangle_r = 1$ folgt, so daß (15) möglich wird. Die zu $(11, l)$ oder $(11, r)$ entgegengesetzte Transformation stellt sich zunächst in der Form $(11, r)$ oder $(11, l)$ dar; man erhält sie aber in derselben Form, wenn man a, b, c, d durch $\delta, -\beta, -\gamma, \alpha$ oder $\alpha, \gamma, \beta, \delta$ durch $d, -c, -b, a$ ersetzt.

Ich habe die Quaternionenmatrizen

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix},$$

die zur Darstellung derselben Transformation dienen und reziproke Nablafunktionen haben, *verschwisterte Matrizen* genannt. Verschwistert und zu eben derselben Nablafunktion gehörig sind dann auch die Matrizen

$$\begin{pmatrix} \tilde{a} & \tilde{c} \\ \tilde{b} & \tilde{d} \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} \tilde{\alpha} & \tilde{\beta} \\ \tilde{\gamma} & \tilde{\delta} \end{pmatrix}.$$

Man wird beachten, daß in dem aufgestellten Lehrsatz die Koordinaten des einen Quaternionenquadrupels die Bedeutung bloßer Verhältnisgrößen haben, daß aber, nach Verfügung über einen Wurzelwert, die des anderen dann eindeutig bestimmt sind: Ersetzt man a, b, c, d und $\sqrt{\triangle_l}$ durch $\varrho a, \varrho b, \varrho c, \varrho d, \varrho^2 \sqrt{\triangle_l}$, so sind $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ durch $\varrho^{-1}\alpha, \varrho^{-1}\beta, \varrho^{-1}\gamma, \varrho^{-1}\delta, \varrho^{-2} \sqrt{\triangledown_r}$ zu ersetzen, und es bleiben dann nicht nur die dargestellten Transformationen dieselben, sondern es bleibt auch die Reziprozität der zwei Nablafunktionen erhalten.

Um nun unseren Satz zu erweisen, bemerken wir zunächst, daß die Gleichungen (11), jede einzeln, *widerspruchsfrei* sind: Die daraus abzuleitenden Quaternionen Z' und $\tilde{Z}'$ sind tatsächlich zueinander konjugiert, und ebenso sind Z'_α und Z'_ω numerisch. Zweitens bemerken wir, daß

$$(17) \qquad \begin{Bmatrix} Z_\alpha - Z_\omega, Z \\ \tilde{Z}, Z_\alpha + Z_\omega \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Z_\alpha - Z_\omega, \tilde{Z} \\ Z, Z_\alpha + Z_\omega \end{Bmatrix} = \{Z_\alpha^2 - Z\tilde{Z} - Z_\omega^2\}^2$$

ist. Aus dem Multiplikationssatz der Nablafunktion folgt dann allerdings nur, daß jede der Transformationen (11) das Quadrat des Ausdrucks $Z_\alpha^2 - Z\tilde{Z} - Z_\omega^2$ reproduziert. Da aber die beiden Quaternionenquadrupel nur je einer Ungleichung ($\triangledown_l \neq 0$ oder $\triangledown_r \neq 0$) zu genügen haben, also je ein Kontinuum erfüllen, so zeigt der Spezialfall der Einheitsmatrix, daß die quadratische Form selbst reproduziert wird. Es ergeben sich dann die Zusammensetzungsformeln (13), und aus diesen folgt, daß beide Darstellungen lückenlos sind: Anderenfalls könnten solche Formeln nicht bestehen. Nunmehr folgt, wenn $a = d = \varrho$, $b = c = 0$, $\sqrt{\triangledown_l} = \varrho^2$ angenommen wird, daß sich a', b', c', d' und a'', b'', c'', d'' nur in der soeben schon beschriebenen Art voneinander unterscheiden können: Die Parameterdarstellung einer bestimmten Transformation $(11, l)$ ist *im wesentlichen eindeutig*. Ferner ergibt sich auch, daß bei Gebrauch reeller Quaternionen beide unsere Formeln die reellen Transformationen von $\mathfrak{G}_{15}$ erschöpfend darstellen, und aus den Spezialisierungen

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sqrt{\nabla_l} = \pm 1, \quad \begin{pmatrix} a & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sqrt{\nabla_r} = \pm 1,$$

deren erste (+) die identische Transformation, und deren zweite (—) die Diametralspiegelung liefert, folgt dann auch das über die zugänglichen Transformationen Gesagte. Endlich findet man, nach leichter Rechnung, auch den angegebenen Zusammenhang zwischen den zweierlei Darstellungen derselben Transformation.

Will man nur die Transformationen der Gruppe G_{15} haben, so kann man in (11) die Nenner weglassen. Man sieht, daß jeder Transformation von G_{15} zwei Transformationen von $\mathfrak{G}_{15}$ entsprechen, deren eine aus der anderen durch Zusammensetzung mit der Diametralspiegelung erhalten wird, daß also, im Falle reeller Transformationen, immer eine davon zugänglich und eine unzugänglich ist. Nennt man $\triangle_l$ und $\triangle_r$ die Determinanten der zuletzt genannten linearen Transformationen (derer ohne die Nenner), so folgt

(18) $$\boxed{\triangle_l = \nabla_l^3, \qquad \triangle_r = \nabla_r^3,}$$

was nochmals aussagt, daß die Gleichungen (11) eigentliche Transformationen darstellen. Statt der Transformationsdeterminanten $\triangle_l$, $\triangle_r$ erscheinen in unserem Lehrsatz die sehr viel einfacher gebildeten und für die Rechnung zugänglicheren Nablafunktionen, oder vielmehr ihre Quadratwurzeln.

Schließlich kann man auch noch, durch die stereographische Projektion, die Veränderliche z einführen. Die Gleichung (4), oder also die Proportion

(19) $$Z_\alpha + Z_\omega : Z : \tilde{Z} : Z_\alpha - Z_\omega = 1 : z : \tilde{z} : z\tilde{z}$$

liefert dann z. B.

$$\sigma . \begin{pmatrix} (az+b)(\tilde{z}\tilde{a}+\tilde{b}), & (az+b)(\tilde{z}\tilde{c}+\tilde{d}) \\ (cz+a)(z\tilde{a}+\tilde{b}), & (cz+d)(\tilde{z}\tilde{c}+\tilde{d}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z'\tilde{z}', & z' \\ \tilde{z}', & 1 \end{pmatrix},$$

wo $\sigma = \tilde{\sigma}$. So kommt man zu einer *Darstellung der eigentlichen konformen Transformationen im Raume* R_4^*, die noch viel einfacher ist als das System der Gleichungen (11), aber allerdings (wie gesagt) im komplexen Gebiete nicht ebensoviel leistet:

(20) $$\boxed{\frac{az+b|}{|cz+d} = z' = \frac{|z\alpha+\beta}{z\gamma+\delta|}.}$$

Auch diese Formeln, die also zur Darstellung der Transformationen von Γ_{15} dienen, sind demnach *in zwei Exemplaren* vorhanden. Sie sind schon seit längerer Zeit bekannt gewesen, und sie haben dem Verfasser ursprünglich zur Ableitung mit (11) gleichbedeutender Formeln gedient (M. Z. I, § 4). Man hatte indessen verabsäumt, die zu korrekter Abfassung unerläßlichen Bedingungen ($\triangle_l \neq 0, \triangle_r \neq 0$) anzugeben, unter denen sie *Transformationen* darstellen [1]). Es fehlte die Nablafunktion, die im Mittelpunkt dieser kleinen Theorie steht.

---

[1]) Wegen des hier ausgeschlossenen Grenzfalles siehe M. Z., I, S. 78 und IV. S. 182.
Eine Verifikation dafür, daß man — natürlich nur, wenn $\nabla_l \neq 0$, $\nabla_r \neq 0$ ist — konforme Transformationen vor sich hat, ebenda, I, S. 77.

Alles dieses bezieht sich unmittelbar nur auf *eigentliche* pseudorthogonale und konforme Transformationen. Man erhält aber auch die uneigentlichen, wenn man in (11) auf der Seite, wo die ursprünglichen Veränderlichen stehen, die Zeichen Z und $\tilde{Z}$ vertauscht. Schreibt man dann l, m, n, r an Stelle von a, b, c, d und $\lambda, \mu, \nu, \varrho$ an Stelle von $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, so erhält man an Stelle von (20) Formeln

$$\frac{l\tilde{z} + m|}{|n\tilde{z} + r} = z' = \frac{|\tilde{z}\lambda + \mu}{\tilde{z}\nu + \varrho|}. \tag{21}$$

Das System der Zusammensetzungsformeln wird dadurch erweitert. Man findet dieses erweiterte System in der zitierten älteren Abhandlung angegeben (M. Z., II, S. 222).

3.

Einige Untergruppen der Gruppe $\mathfrak{G}_{15}$.

In den angeführten Formeln kommen zwei voneinander abhängige Quadratwurzeln vor, die im allgemeinen nicht entbehrt werden können. Dies kann sich aber bei besonderen Transformationen der Gruppe $\mathfrak{G}_{15}$ (oder $\mathfrak{G}_{15}, \mathfrak{H}_{15}$) ändern, da unter Umständen solche Wurzelgrößen sich werden rational ermitteln lassen. Da dieser Stoff in meiner älteren Arbeit, wenn auch, wie ich glaube, in genügender Vollständigkeit, immerhin etwas summarisch behandelt worden ist, so nehme ich jetzt zwei der dort betrachteten Gruppen nochmals auf.

Wir wollen zuerst verlangen, daß die Gleichung $Z_a = 0$ ungeändert bleiben, also die Gleichung $Z'_a = 0$ nach sich ziehen soll.

Setzen wir — der Kürze halber — von vornherein $Z_a = 0$, $Z'_a = 0$, so erhalten wir schon dann, wenn wir in der Gruppe $\mathfrak{G}_{15}$ bleiben, alle eigentlichen *und* uneigentlichen automorphen linearen Transformationen einer quinären quadratischen Form, nämlich der Quadratsumme

$$Z_0^2 + Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_\omega^2.$$

Diese Transformationen bilden eine geschichtete Gruppe $\mathfrak{G}_{10}, \mathfrak{H}_{10}$, die Gruppe der orthogonalen Transformationen in fünf Veränderlichen, die in jeder ihrer zwei Transformationenschichten einen einzigen reellen Zug hat, und hier als Ausschnitt aus einer analytischen (kontinuierlichen) Untergruppe $\overline{\mathfrak{G}}_{10}$ von $\mathfrak{G}_{15}$ erscheint. Die Diametralspiegelung (in den fünf Veränderlichen $Z_0 \ldots Z_\omega$) liegt in der Nebenschicht $\mathfrak{H}_{10}$. Je zwei *gepaarte* unter den Transformationen von $\overline{\mathfrak{G}}_{10}$ liefern *gepaarte* Transformationen von $\mathfrak{G}_{10}, \mathfrak{H}_{10}$, also immer eine eigentliche und eine uneigentliche orthogonale Transformation in fünf Veränderlichen. Die Transformationen von $\mathfrak{G}_{10}, \mathfrak{H}_{10}$ aber haben die Bedeutung von *Bewegungen* und *Umlegungen* in der sphärischen Mannigfaltigkeit

$$Z_0^2 + Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_\omega^2 = 1, \tag{22}$$

einer M_4^2.

In den Quaternionensymbolen z ausgedrückt, besagt nun unsere Forderung,

daß das (natürlich nur im Komplexen mögliche) Bestehen der Gleichung $\tilde{z}z + 1 = 0$ durch die auszuführenden Transformationen nicht gestört werden soll; sie besagt also, daß die Gleichung

$$\frac{|\tilde{z}\tilde{a} + \tilde{b} \quad az + b|}{\tilde{z}\tilde{c} + \tilde{d}|\,|cz + d} + 1 = 0$$

eine Folge von $\tilde{z}z + 1 = 0$ sein soll. Dies liefert die Einschränkungen, denen jetzt die Quaternionen a, b, c, d zu unterwerfen sind, in Gestalt einer Relation zwischen Quaternionenmatrizen,

$$(23) \qquad \begin{pmatrix} \tilde{a} & \tilde{c} \\ \tilde{b} & \tilde{d} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_l & 0 \\ 0 & D_l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{a} & \tilde{c} \\ \tilde{b} & \tilde{d} \end{pmatrix},$$

wobei D eine *numerische* Quaternion bedeutet. Das heißt, wir erhalten, je nach der Reihenfolge der beiden Faktoren unseres Produktes von Matrizen, das eine oder das andere System von Gleichungen

$$(24, l) \qquad \boxed{\begin{array}{ll} \tilde{a}a + \tilde{c}c = D_l\,, & \tilde{a}b + \tilde{c}d = 0\,, \\ \tilde{b}a + \tilde{d}c = 0\,, & \tilde{b}b + \tilde{d}d = D_l\,, \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} a\tilde{a} + b\tilde{b} = D_l\,, & a\tilde{c} + b\tilde{d} = 0\,, \\ c\tilde{a} + d\tilde{b} = 0\,, & c\tilde{c} + d\tilde{d} = D_l\,, \end{array}}$$

in denen beidemal dieselbe Größe D_l vorkommt, und deren jedes die gesuchten Bedingungen in Gestalt von fünf unabhängigen quadratischen Gleichungen liefert. Gleichungen ähnlicher Form ergeben sich natürlich für die Quaternionen $\alpha, \beta\,\gamma, \delta$, nämlich:

$$(24, r) \qquad \boxed{\begin{array}{ll} \tilde{\alpha}\alpha + \tilde{\beta}\beta = D_r\,, & \tilde{\alpha}\gamma + \tilde{\beta}\delta = 0\,, \\ \tilde{\gamma}\alpha + \tilde{\delta}\beta = 0\,, & \tilde{\gamma}\gamma + \tilde{\delta}\delta = D_r\,, \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} \alpha\tilde{\alpha} + \gamma\tilde{\gamma} = D_r\,, & \alpha\tilde{\beta} + \gamma\tilde{\delta} = 0\,, \\ \beta\tilde{\alpha} + \delta\tilde{\gamma} = 0\,, & \beta\tilde{\beta} + \delta\tilde{\delta} = D_r\,. \end{array}}$$

Wir behaupten nun:

Die Stelle der *Nablafunktionen* ∇_l *und* ∇_r *können im vorliegenden Falle die einfacher gebildeten (nur quadratischen) Ausdrücke* D_l *und* D_r *vertreten. Es gelten nämlich, wenn die darzustellende Transformation eigentlich ist, die Gleichungen*

$$(25\,e) \qquad \boxed{\sqrt{\nabla_l} = D_l\,, \quad \sqrt{\nabla_r} = D_r\,,}$$

und, wenn sie uneigentlich ist, die Gleichungen

$$(25\,u) \qquad \boxed{\sqrt{\nabla_l} = -D_l\,, \quad \sqrt{\nabla_r} = -D_r\,,}$$

woraus beidemal

$$(26) \qquad \boxed{D_l \,.\, D_r = 1}$$

folgt. D_l oder D_r kann etwa als *Diskriminante* der darzustellenden Transformation bezeichnet werden. *Ferner gilt, bei Zusammensetzung zweier Transformationen* T, T' *von* $\mathfrak{G}_{10}$, $\mathfrak{H}_{10}$ *zu einer dritten* T'' *die Regel*

$$(27) \qquad \boxed{D_l'' = D_l' \cdot D_l\,, \quad D_r \cdot D_r' = D_r''\,.}$$

Endlich sind die Formeln, die sich nunmehr durch Spezialisierung aus (11) *ergeben, nur noch in der Form voneinander verschieden. Es bestehen nämlich jetzt die Gleichungen*

$$(28) \qquad \boxed{\tilde{d} = D_l \cdot a\,, \quad -\tilde{c} = D_l \cdot \beta\,, \quad -\tilde{b} = D_l \cdot \gamma\,, \quad \tilde{a} = D_l \cdot \delta\,,}$$

$$\boxed{D_r \cdot a = \tilde{\delta}\,, \quad D_r \cdot b = -\tilde{\gamma}\,, \quad D_r \cdot c = -\tilde{\beta}\,, \quad D_r \cdot d = \tilde{a}\,.}$$

Es können demnach die beiden Formeln (11) *hier durch eine einzige ersetzt werden, die keine Irrationalität enthält: Durch*

$$(29, l) \qquad \boxed{\begin{pmatrix} -Z_\omega', Z' \\ \tilde{Z}', \quad Z_\omega' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a\,b \\ c\,d \end{pmatrix} = \pm\begin{pmatrix} a\,b \\ c\,d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -Z_\omega, Z \\ \tilde{Z}, \quad Z_\omega \end{pmatrix}}$$

oder auch durch die völlig gleichbedeutende Formel

$$(29, r) \qquad \boxed{\pm\begin{pmatrix} -Z_\omega, \tilde{Z} \\ Z, \quad Z_\omega \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a\,\gamma \\ \beta\,\delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\,\gamma \\ \beta\,\delta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -Z_\omega', \tilde{Z}' \\ Z', \quad Z_\omega' \end{pmatrix}.}$$

Das obere Vorzeichen liefert dann die eigentlichen, das untere die uneigentlichen orthogonalen Transformationen von fünf Veränderlichen [1]).

Die Gleichungen $(29, l)$, zum Beispiel, sind, etwas mehr auseinandergelegt,

$$\begin{aligned} \mp\, aZ_\omega \pm b\tilde{Z} &= -Z_\omega' a + Z' c\,, \\ \pm\, aZ \pm bZ_\omega &= -Z_\omega' b + Z' d\,, \\ \pm\, cZ_\omega \pm d\tilde{Z} &= \quad \tilde{Z}' a + Z_\omega' c\,, \\ \pm\, cZ \pm dZ_\omega &= \quad \tilde{Z}' b + Z_\omega' d\,. \end{aligned}$$

Was hiervon eines besonderen Beweises bedarf, ist im Grunde lediglich, daß nicht nur die Gleichung

$$\nabla_l^2 = \begin{Vmatrix} a\,b \\ c\,d \end{Vmatrix}^2 = \begin{Vmatrix} a\,b \\ c\,d \end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} \tilde{a}\,\tilde{c} \\ \tilde{b}\,\tilde{d} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} D_l\,0 \\ 0\,D_l \end{Vmatrix} = D_l^4$$

besteht, sondern daß auch noch die genauere Beziehung $\nabla_l = D_l^2$ richtig ist. Das ergibt sich wieder durch Identifizierung von $\begin{pmatrix} a\,b \\ c\,d \end{pmatrix}$ mit der Einheitsmatrix.

Natürlich folgt auch noch, daß hier

$$(30) \qquad a\tilde{a} = d\tilde{d},\ b\tilde{b} = c\tilde{c}\,; \quad a\tilde{a} = \delta\tilde{\delta},\ \beta\tilde{\beta} = \gamma\tilde{\gamma}$$

[1]) In meiner ursprünglichen Darstellung (M. Z., I, S. 48) hatte ich — wie dort auch ausdrücklich gesagt worden ist — nur von den eigentlichen Transformationen (Bewegungen) gehandelt. Außerdem ist dort $D_l = D_r = 1$ gesetzt worden, was zulässig ist, aber den Satz des Textes etwas verhüllt.

ist. Ferner erhält man, wenn man, z. B., an Stelle von (29, l) die lineare Transformation

$$\begin{pmatrix} -Z'_\omega, & Z \\ \tilde{Z}, & Z'_\omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -Z_\omega, & Z \\ \tilde{Z}, & Z_\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{a} & \tilde{c} \\ \tilde{b} & \tilde{d} \end{pmatrix}$$

ansetzt, und ihre Determinante Δ_l nennt,

$$\boxed{\Delta_l = D_l^5\,, \quad \Delta_r = D_r^5\,.} \tag{31}$$

Diese Gleichungen treten also jetzt an Stelle der Formeln (18), und zwar gilt das für eigentliche und uneigentliche Transformationen.

Wir verlangen jetzt, daß die Gleichung $Z_\omega = 0$ ungeändert bleibt.

Wir gelangen damit zu den Bewegungen und Umlegungen in einer pseudosphärischen Mannigfaltigkeit

$$\boxed{Z_a^2 - Z_0^2 - Z_1^2 - Z_2^2 - Z_3^2 = 1\,,} \tag{32}$$

wieder einer M_4^2. Die durch die Forderung $Z_\omega = Z'_\omega = 0$ definierte Gruppe $\mathfrak{G}'_{10}$, $\mathfrak{H}'_{10}$ ist dann im komplexen Gebiet von der zuvor betrachteten nicht wesentlich verschieden, im Reellen aber hat sie *vier* Transformationenschichten, entsprechend der Unterscheidung eines zugänglichen und eines unzugänglichen Gebietes ($Z_a \geqq 1$, $Z_a \leqq 1$). Die zuvor abgeleiteten Gleichungen werden durch ähnlich gebaute Gleichungen vertreten. Namentlich erhält man an Stelle von (23) und (24):

$$\begin{aligned} \tilde{a}a - \tilde{c}c &= D\,, & \tilde{a}b - \tilde{c}d &= 0\,, \\ -\tilde{b}a + \tilde{d}c &= 0\,, & -\tilde{c}b + \tilde{d}d &= D\,, \\ a\tilde{a} - b\tilde{b} &= D\,, & -a\tilde{c} + b\tilde{d} &= 0\,, \\ c\tilde{a} - d\tilde{b} &= 0\,, & -c\tilde{c} + d\tilde{d} &= D\,. \end{aligned} \tag{33}$$

(34 e) $\sqrt{\nabla} = D\,,$ (34 u) $\sqrt{\nabla} = -D\,,$

wozu noch weitere Gleichungen kommen, die wohl unterdrückt werden dürfen.

Ich habe hier ∇ und D an Stelle von ∇_l und D_l geschrieben, da die übrigen Formeln doch nur nochmals dasselbe liefern würden. D kann wieder als *Diskriminante* der erhaltenen Transformation bezeichnet werden.

Hier ist nun, abweichend von dem vorhergehenden Falle, wenn es sich um reelle Transformationen handelt, D positiver und negativer Werte fähig. Diese werden voneinander getrennt durch den Wert $D = 0$, der keiner Transformation entspricht. Man sieht dann an den Beispielen $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, daß die zugänglichen Transformationen von $\mathfrak{G}'_{10}$ ($\mathfrak{H}'_{10}$) positiven (negativen) Werten von D entsprechen. An Stelle der Gleichungen (29) treten zunächst Gleichungen, die ebenfalls keine Irrationalität enthalten, aber etwas anders gebaut sind (vgl. Nr. 11):

$$(35)\qquad \boxed{\begin{pmatrix} Z'_a & Z' \\ \tilde{Z}' & Z'_a \end{pmatrix} = \pm \frac{1}{D}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Z_a & Z \\ \tilde{Z} & Z_a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tilde{a} & \tilde{c} \\ \tilde{b} & \tilde{d} \end{pmatrix}.}$$

Man kann dieselbe Abhängigkeit aber auch in einer Form schreiben, die der entsprechenden Gleichung (29, *l*) ähnlich ist:

$$(36\,a)\qquad \boxed{\begin{pmatrix} Z'_a, & -Z' \\ \tilde{Z}', & -Z'_a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Z_a, & -Z \\ \tilde{Z}, & -Z_a \end{pmatrix}.}$$

Da nach Nr. 33 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ und $\frac{1}{D}\begin{pmatrix} \tilde{a}, & -\tilde{c} \\ -\tilde{b}, & \tilde{d} \end{pmatrix}$ hier reziproke Matrizen sind, so kann man dieselbe Abhängigkeit auch so ausdrücken:

$$(36\,b)\qquad \boxed{\pm \begin{pmatrix} Z_a, & -Z \\ \tilde{Z}, & -Z_a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tilde{a}, & -\tilde{c} \\ -\tilde{b}, & \tilde{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{a}, & -\tilde{c} \\ -\tilde{b}, & \tilde{d} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Z'_a, & -Z' \\ \tilde{Z}', & -Z'_a \end{pmatrix}.}$$

Zu einem völlig äquivalenten Ergebnis gelangt man, wenn man schließlich *Invarianz der Gleichung* $Z_0 = 0$ verlangt. Diese Art von Spezialisierung der Formeln (11) aber hat doch einen kleinen Vorteil. Wenn man nämlich die z_1, z_2, z_3 genannten Quaternionenkoordinaten mit den gewöhnlich ebenso bezeichneten rechtwinkligen Koordinaten in einem Raume R_3 identifiziert, so hat man ohne weiteres eine Darstellung der konformen Transformationen in diesem Raume, die (nach Ausrechnung) mit der üblichen Schreibart solcher Formeln übereinstimmt. Insbesondere gilt das für reelle Transformationen, die zwei nur durch das Komplexe hindurch zusammenhängende Schichten von Transformationen umfassen. Wir betrachten also auch noch die Gruppe $\mathfrak{G}''_{10}$, $\mathfrak{H}''_{10}$ der Bewegungen und Umlegungen im pseudosphärischen Raume

$$(37)\qquad \boxed{Z_a^2 - Z_1^2 - Z_2^2 - Z_3^2 - Z_\omega^2 = 1\,,}$$

einer M_4^2, die sich von der zuletzt untersuchten *nur* durch die Bezeichnung der Veränderlichen, also eigentlich gar nicht unterscheidet. Damit erhalten wir zugleich die zu $\mathfrak{G}''_{10}$, $\mathfrak{H}''_{10}$ meromorphe Gruppe G''_{10} der konformen Transformationen in der M_3^2

$$(38)\qquad \boxed{Z_a^2 - Z_1^2 - Z_2^2 - Z_3^2 - Z_\omega^2 = 0\,,}$$

eine Gruppe, deren Transformationen sich mit Hilfe *vektorieller* Quaternionen $\dot{z}$ vollständig durch Gleichungen der Form

$$(39)\qquad \boxed{\frac{a\dot{z} + b|}{|c\dot{z} + d} = \dot{z}' \quad \text{oder} \quad \dot{z}' = \frac{|z\,a + \beta}{\dot{z}\gamma + \delta|}} \quad \left\{\begin{matrix} D_l \gtrless 0 \\ D_r \gtrless 0 \end{matrix}\right\}$$

werden darstellen lassen.

Die Bedingungen, denen die Quaternionen a, b, c, d zu unterwerfen sind, ergeben sich ebenso wie in den beiden vorigen Fällen. Sie sind

(40)
$$\boxed{\begin{array}{ll} \tilde{a}d + \tilde{c}b = D, & \tilde{a}c + \tilde{c}a = 0, \\ \tilde{b}d + \tilde{d}b = 0, & \tilde{b}c + \tilde{d}a = D, \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} a\tilde{d} + b\tilde{c} = D, & a\tilde{b} + b\tilde{a} = 0, \\ c\tilde{d} + d\tilde{c} = 0, & c\tilde{b} + d\tilde{a} = D. \end{array}}$$

Jedes dieser beiden Systeme von fünf unabhängigen Gleichungen sagt aus, daß

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \frac{1}{D}\begin{pmatrix} \tilde{d} & \tilde{c} \\ \tilde{b} & \tilde{a} \end{pmatrix}$$

reziproke Matrizen sind. Die Transformationen von $\mathfrak{G}''_{10}$, $\mathfrak{H}''_{10}$ werden nun geliefert durch die Formel

(41)
$$\boxed{\begin{pmatrix} Z'_a - Z'_\omega, & \dot{Z}', \\ -\dot{Z}', & Z'_a + Z'_\omega \end{pmatrix} = \pm \frac{1}{D}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Z_a - Z_\omega, & \dot{Z} \\ -\dot{Z}, & Z_a + Z_\omega \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tilde{a} & \tilde{c} \\ \tilde{b} & \tilde{d} \end{pmatrix}.}$$

D ist im Falle einer reellen Transformation wieder positiver wie negativer Werte fähig, und zwar entsprechen auch hier den positiven (negativen) Werten die zugänglichen Transformationen von $\mathfrak{G}''_{10}$ ($\mathfrak{H}''_{10}$). Natürlich besteht auch hier die Zusammensetzungsformel $DD' = D''$.

Es lohnt sich, auch noch den Zusammenhang der Formel (41) mit den vorher aufgestellten (35) und (36) zu ermitteln.

Wir suchen zu diesem Zwecke zunächst die konforme Transformation $z \to z^*$ auf, die von der eigentlichen pseudorthogonalen Transformation

$$Z_a = Z^*_a, \quad -Z_\omega = Z^*_0, \quad Z_1 = Z^*_1, \quad Z_2 = Z^*_2, \quad Z_3 = Z^*_3, \quad Z_0 = Z^*_\omega$$

hervorgerufen wird, und finden

$$-\frac{z+1|}{|z-1} = z^* = -\frac{|z+1}{z-1|}.$$

Nennen wir sie S, so ist S^{-1} gegeben durch die Formel

$$\frac{z-1|}{|z+1} = z^* = \frac{|z-1}{z+1|}.$$

Bedeutet dann T die Transformation

$$\frac{pz+q|}{|rz+s} = z^*,$$

so wird die Transformierte $S^{-1}TS = T'$ von T wieder dieselbe Form haben,

$$\frac{az+b|}{|cz+d} = z^*,$$

und zwar findet sich, nach geeigneter Verfügung über einen Proportionalitätsfaktor,

$$(42)\qquad \begin{aligned} -p-q-r-s &= 2a\,,\\ p-q+r-s &= 2b\,,\\ p+q-r-s &= 2c\,,\\ -p+q+r-s &= 2d\,, \end{aligned}$$

woraus man die Ausdrücke von p, q, r, s durch a, b, c, d ablesen kann.

Wir identifizieren nun p, q, r, s mit den Quaternionen, die in den Formeln (33)–(36) a, b, c, d hießen, und das, was dort Z und $\tilde{Z}$ hieß, mit $Z_\omega + \dot{Z}$ und $Z_\omega - \dot{Z}$. Wir erkennen dann, daß nach Einführung von p, q, r, s an Stelle von a, b, c, d in die Gleichung (41) diese auch so geschrieben werden kann:

$$(43\,\text{a})\qquad \boxed{\begin{pmatrix} Z'_a\,, & -Z'_\omega - \dot{Z}' \\ Z'_\omega - \dot{Z}'\,, & -Z'_a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \pm\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Z_a\,, & -Z_\omega - \dot{Z} \\ Z_\omega - \dot{Z}\,, & -Z_a \end{pmatrix},}$$

und dann natürlich auch so:

$$(43\,\text{b})\qquad \boxed{\pm\begin{pmatrix} Z_a\,, & -Z_\omega - \dot{Z} \\ Z_\omega - \dot{Z}\,, & -Z_a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tilde{p}\,, & -\tilde{r} \\ -q\,, & \tilde{s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p\,, & -\tilde{r} \\ -q\,, & \tilde{s} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Z'_a\,, & -Z'_\omega - \dot{Z}' \\ Z'_\omega - \dot{Z}'\,, & -Z'_a \end{pmatrix}.}$$

4.

Andere Darstellung der Gruppen $\mathfrak{G}_{10}$ und $\mathfrak{G}''_{10}$.

Da das Rechnen mit zweireihigen Quaternionenmatrizen nichts anderes ist als ein Rechnen mit den Zahlen eines Systems von sechzehn Einheiten, so wird bei einer Änderung der Basis dieses Systems durch irgendeine lineare Transformation der Einheiten sich jede der abgeleiteten Formeln in mancherlei Weise schreiben lassen, wobei dann lediglich die Zeichensprache, nicht der dargestellte Gedanke eine Änderung erfährt. Man sieht nun sehr leicht, daß im Falle $n = 5$ unter den Formeln, die auf diese Art durch lineare Transformationen mit rationalen Koeffizienten erhalten werden können, sich für den gleichen Fall und die Trägheitsindizes 0 und 1 die von *Lipschitz* aufgestellten Formeln befinden müssen. Diesen Zusammenhang im einzelnen darzulegen hat nicht nur ein historisches, sondern auch ein sachliches Interesse, und zwar darum, weil die Formeln von *Lipschitz* ein ganz anderes Bildungsgesetz haben als die unsrigen.

Die von *Lipschitz* entwickelte und dann von anderen — *Vahlen*, *Cartan*, *Rothe* — formal verbesserte Theorie selbst läßt sich heute einfacher darlegen, als es (im Jahre 1886!) durch ihren Urheber geschehen war. Dazu fehlt hier indessen der Raum. Ich werde also nur den Fall $n = 5$ behandeln, und übrigens auch diesen, ohne mich genau an die überkommenen Formeln zu binden [1]).

---

[1]) Vgl. *E. Cartan*, Artikel *Nombres complexes* in der französischen Enzyklopädie, 1908, S. 464, und *H. Rothe*, in der deutschen Ausgabe, *Systeme geometrischer Analyse*, 1920, S. 1412—1415.

Nach den dort angegebenen Regeln würde im Falle einer Summe von n Quadraten ein System von 2^n Einheiten zu benutzen sein, während *Lipschitz* nur 2^{n-1} Einheiten verwendet hat. — Es kommt wohl auf diesen Unterschied nicht allzuvieles an. Man kann ja leicht von der einen Formel zur anderen übergehen. Aber es war vielleicht nicht ganz zweckmäßig, gewisse Unter-

Setzen wir

$$(44)\quad \varepsilon_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

und führen wir, neben der damit gegebenen Basis eines Systems Q^* von vier Einheiten, noch diese andere ein:

$$(45)\quad 1 = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}, \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_{12} + \varepsilon_{21}, \quad \varepsilon_2 = -\varepsilon_{12} + \varepsilon_{21}, \quad \varepsilon_3 = \varepsilon_{11} - \varepsilon_{22},$$

so erhalten wir, je nach der Wahl der Basis, die eine oder andere der Multiplikationstafeln

(46)

	ε_{11}	ε_{12}	ε_{21}	ε_{22}
ε_{11}	ε_{11}	ε_{12}	0	0
ε_{12}	0	0	ε_{11}	ε_{12}
ε_{21}	ε_{21}	ε_{22}	0	0
ε_{22}	0	0	ε_{21}	ε_{22} ,

	1	ε_1	ε_2	ε_3
1	1	ε_1	ε_2	ε_3
ε_1	ε_1	1	ε_3	ε_2
ε_2	ε_2	$-\varepsilon_3$	-1	ε_1
ε_3	ε_3	$-\varepsilon_2$	$-\varepsilon_1$	1 ,

deren zweite das System Q^* als mit dem System Q der gewöhnlichen Quaternionen komplex-äquivalent (zum selben *Typus* gehörig) erkennen läßt. Das System unserer sechzehn Einheiten ist also (wie bekannt) das sogenannte Produkt der beiden Systeme Q und Q^*.

Wir können demnach die Matrix der Quaternionen a, b, c, d wie folgt ausdrücken:

$$(47)\quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \Lambda = \Lambda_0 + \Lambda_1 \varepsilon_1 + \Lambda_2 \varepsilon_2 + \Lambda_3 \varepsilon_3,$$

so daß also

$$(48)\quad a = \Lambda_0 + \Lambda_3, \quad b = \Lambda_1 - \Lambda_2, \quad c = \Lambda_1 + \Lambda_2, \quad d = \Lambda_0 - \Lambda_3$$

wird.

In dem zuerst zu betrachtenden Fall einer *orthogonalen* Transformation der Veränderlichen $Z_0, Z_1, Z_2, Z_3, Z_\omega$ sind dann neben a, b, c, d noch $\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}, \tilde{d}$ zu stellen, also neben $\Lambda_0, \Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3$ noch $\tilde{\Lambda}_0, \tilde{\Lambda}_1, \tilde{\Lambda}_2, \tilde{\Lambda}_3$. Es liegt nahe, neben Λ noch eine weitere Abkürzung einzuführen, nämlich

$$(49)\quad \begin{pmatrix} \tilde{a} & \tilde{c} \\ \tilde{b} & \tilde{d} \end{pmatrix} = \tilde{\Lambda} = \tilde{\Lambda}_0 + \tilde{\Lambda}_1 \varepsilon_1 - \tilde{\Lambda}_2 \varepsilon_2 + \tilde{\Lambda}_3 \varepsilon_3.$$

Es folgt, daß jede der Gleichungen

$$(50)\quad \Lambda'' = \Lambda' \Lambda, \quad \tilde{\Lambda}\tilde{\Lambda}' = \tilde{\Lambda}''$$

die andere nach sich zieht, was übrigens nicht nur unter der Voraussetzung gilt, daß $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ und $\frac{1}{D}\begin{pmatrix} \tilde{a} & \tilde{c} \\ \tilde{b} & \tilde{d} \end{pmatrix}$ reziproke Matrizen sind.

---

schiede zu verwischen. Jedenfalls haben bei den Werten $n = 4m + 1$ und $n = 4m + 3$ die Systeme von 2^{n-1} Einheiten den Vorzug. Die ersten verhalten sich so wie der Fall $n = 5$, und auch die zweiten verhalten sich sehr ähnlich.

Wir bemerken nun, daß die Zahlen Λ *und* $\tilde{\Lambda}$ *unseres Systems* QQ^* *in den Faktoren der Haupteinheit und fünf weiterer Einheiten übereinstimmen, und daß die übrigen zehn Einheiten in* Λ *und* $\tilde{\Lambda}$ *mit entgegengesetzten Vorzeichen eingehen.* Die ersten fünf Einheiten, oder — mit Rücksicht auf die Gestaltung der folgenden Formeln — besser gewisse Produkte von ihnen mit Faktoren ± 1, können wir aber zur Darstellung aller Einheiten unseres Systems benutzen. Ich erkläre:

$$(51)\qquad \boxed{j_0 = \varepsilon_1\,,\quad j_1 = -\,e_1\varepsilon_2\,,\quad j_2 = -\,e_2\varepsilon_2\,,\quad j_3 = -\,e_3\varepsilon_2\,,\quad j_\omega = -\,\varepsilon_3\,.}$$

Diese „*Stammeinheiten*“ des Systems QQ^* genügen den Gleichungen

$$(52)\qquad \boxed{j_0 j_1 j_2 j_3 j_\omega = 1\,,}$$

$$(53)\qquad \boxed{j_\sigma j_\tau + j_\tau j_\sigma = 0\,,} \qquad (\sigma \neq \tau)$$

$$(54)\qquad \boxed{j_0^2 = 1\,,\quad j_1^2 = 1\,,\quad j_2^2 = 1\,,\quad j_3^2 = 1\,,\quad j_\omega^2 = 1\,.}$$ [1])

Wir drücken nun die Zahlen Λ und $\tilde{\Lambda}$ durch die Stammeinheiten aus, schreiben also etwa

$$(55)\qquad \begin{aligned} \Lambda &= \lambda + \sum_0^\omega \lambda_\varrho\, j_\varrho + \sum_0^\omega \lambda_{\sigma\tau}\, j_\sigma\, j_\tau\,, \\ \tilde{\Lambda} &= \lambda + \sum_0^\omega \lambda_\varrho\, j_\varrho + \sum_0^\omega \lambda_{\sigma\tau}\, j_\tau\, j_\sigma\,. \end{aligned}$$

(Vergl. Nr. 65.) Wir erhalten dann

$$(56)\qquad \begin{aligned} \Lambda\tilde{\Lambda} &= A + 2\sum_0^\omega (B_\varrho + C_\varrho)\, j_\varrho\,, \\ \tilde{\Lambda}\Lambda &= A + 2\sum_0^\omega (B_\varrho - C_\varrho)\, j_\varrho\,, \end{aligned}$$

wo

$$(57)\qquad A = \lambda^2 + \sum_0^\omega \lambda_\varrho^2 + \sum_0^\omega \lambda_{\sigma\tau}^2\,,$$

ferner (wenn wir uns erlauben, für $\lambda_{\sigma\tau}$ auch $-\,\lambda_{\tau\sigma}$ zu schreiben)

$$(58)\qquad \begin{aligned} B_0 &= \lambda\lambda_0 + \lambda_{\omega 1}\lambda_{23} + \lambda_{\omega 2}\lambda_{31} + \lambda_{\omega 3}\lambda_{12}\,, \\ B_1 &= \lambda\lambda_1 + \lambda_{02}\lambda_{3\omega} + \lambda_{03}\lambda_{\omega 2} + \lambda_{0\omega}\lambda_{23}\,, \\ B_2 &= \lambda\lambda_2 + \lambda_{13}\lambda_{\omega 0} + \lambda_{1\omega}\lambda_{03} + \lambda_{10}\lambda_{3\omega}\,, \\ B_3 &= \lambda\lambda_3 + \lambda_{2\omega}\lambda_{01} + \lambda_{20}\lambda_{1\omega} + \lambda_{21}\lambda_{\omega 0}\,, \\ B_\omega &= \lambda\lambda_\omega + \lambda_{30}\lambda_{12} + \lambda_{31}\lambda_{20} + \lambda_{32}\lambda_{01} \end{aligned}$$

und

---

[1]) Ich rede von Stammeinheiten und nicht von primitiven Einheiten wegen des Bestehens der Gleichung (52). „Primitiv“ sind irgend vier unter den fünf Einheiten, es hat aber keines dieser fünf Quadrupel einen Vorzug vor den anderen.

$$
\begin{aligned}
C_0 &= \lambda_1\lambda_{01} + \lambda_2\lambda_{02} + \lambda_3\lambda_{03} + \lambda_\omega\lambda_{0\omega}\,,\\
C_1 &= \lambda_2\lambda_{12} + \lambda_3\lambda_{13} + \lambda_\omega\lambda_{1\omega} + \lambda_0\lambda_{10}\,,\\
C_2 &= \lambda_3\lambda_{23} + \lambda_\omega\lambda_{2\omega} + \lambda_0\lambda_{20} + \lambda_1\lambda_{21}\,,\\
C_3 &= \lambda_\omega\lambda_{3\omega} + \lambda_0\lambda_{30} + \lambda_1\lambda_{31} + \lambda_2\lambda_{32}\,,\\
C_\omega &= \lambda_0\lambda_{\omega 0} + \lambda_1\lambda_{\omega 1} + \lambda_2\lambda_{\omega 2} + \lambda_3\lambda_{\omega 3}
\end{aligned}
\tag{59}
$$

ist.

Bestehen dann die fünf Gleichungen $B_\varrho + C_\varrho = 0$, so wird $\Lambda\tilde{\Lambda} = A$ numerisch, *also, wenn außerdem* $A \neq 0$ *ist, auch* $\tilde{\Lambda}\Lambda = A$, so daß auch die fünf weiteren Gleichungen $B_\varrho - C_\varrho = 0$ erfüllt sein müssen (und umgekehrt). *Es kann also aus den Voraussetzungen*

$$A \neq 0, \quad B_\varrho + C_\varrho = 0 \quad \textit{oder} \quad B_\varrho - C_\varrho = 0$$

auf das Bestehen der Gleichungen

$$\boxed{N(\Lambda) = \Lambda\tilde{\Lambda} = D = \tilde{\Lambda}\Lambda = N(\tilde{\Lambda})\,,} \tag{60}$$

sowie auf die Geltung der Zusammensetzungsformel $D'' = D'D$ *geschlossen werden* [1]). D (nunmehr $= A$) ist dann die in den Formeln (23) . . . (27) mit D_l bezeichnete Diskriminante.

Die hiermit gekennzeichneten besonderen Zahlen Λ unseres Systems werden, nach *Vahlen*, der das Wort allerdings nicht ganz so gebraucht hat, als *Transformatoren* bezeichnet. $D = N(\Lambda)$ heißt *die Norm* eines Transformators; sie ist, nach Voraussetzung, von Null verschieden. Die Transformatoren liefern, da

$$\begin{pmatrix} -Z_\omega, & Z \\ \overline{Z}\ , & Z_\omega \end{pmatrix} = \mathsf{Z} = Z_0 j_0 + \cdots + Z_\omega j_\omega = \tilde{\mathsf{Z}} \tag{61}$$

und

$$\mathsf{Z}\tilde{\mathsf{Z}} = Z_0^2 + \cdots + Z_\omega^2 = \tilde{\mathsf{Z}}\mathsf{Z} \tag{62}$$

folgt, eigentlich-automorphe Transformationen einer Summe von fünf Quadraten in der Form

$$\boxed{\mathsf{Z}'\Lambda = \Lambda\mathsf{Z}} \quad \text{oder} \quad \boxed{\mathsf{Z}\tilde{\Lambda} = \tilde{\Lambda}\mathsf{Z}'.} \tag{63}$$

Und zwar erhält man so alle Transformationen dieser Art, und jede im wesentlichen nur auf eine einzige Weise dargestellt. Um diesen Schluß zu ziehen, braucht man (wie früher im Falle der gleichbedeutenden Formel 29) nur zu bedenken.

---

[1]) Daß die Voraussetzung $A \neq 0$ nötig ist, zeigt ein Beispiel. Man setze etwa $\lambda = \lambda_\omega = 1$, $\lambda_0 = i$, $\lambda_{0\omega} = -i$ und lege allen übrigen Koeffizienten von Λ den Wert Null bei. Dann folgt $A = 0$, $B_\varrho + C_\varrho = 0$, aber $B_0 - C_0 = 2i$, $B_\omega - C_\omega = 2$. Es ist also dann $\tilde{\Lambda}\Lambda$ nicht gleich $\Lambda\tilde{\Lambda}$, und $\tilde{\Lambda}\Lambda$ ist überhaupt nicht numerisch.

Ferner zieht, wenn $A \neq 0$ ist, das Gleichungssystem $B_\varrho + C_\varrho = 0$ oder das System $B_\varrho - C_\varrho = 0$ zwar die zehn Gleichungen $B_\varrho = 0$, $C_\varrho = 0$ nach sich, keineswegs aber immer auch eines dieser beiden letzten Systeme das andere. Setzt man z. B. $B_\varrho = 0$ ($\varrho = 0 \ldots \omega$) und außerdem $\lambda = 0$, so bleiben $\lambda_0 \ldots \lambda_\omega$ ganz willkürlich. Die Gleichungen $C_\varrho = 0$ brauchen dann also nicht zu bestehen.

daß die erforderliche Zahl $15 - 5$ wesentlicher Parameter vorhanden ist. Die Zusammensetzungsregel $\Lambda'' = \Lambda'\Lambda$ garantiert dann bereits die Lückenlosigkeit und Eindeutigkeit der gefundenen Darstellung.

Aus (63) lassen sich, da unmittelbar

$$(64) \qquad (X'Y' - Y'X')\Lambda = \Lambda(XY - YX)$$

folgt, auch die Verhältnisse der 16 Parameter ziemlich einfach durch die Transformationskoeffizienten ausdrücken. Wir haben nämlich einmal $1 + 25 + 100$ homogene Transformationskoeffizienten und zweireihige Determinanten von ihnen — Koeffizienten der induzierten Transformation (64) —, die alle linear-unabhängig sind. Auf der anderen Seite haben wir $16 + 120$ Quadrate und Produkte von je zweien der Parameter, und zwischen diesen 10 quadratische Gleichungen, die (wie sich zeigen läßt) sowohl voneinander als auch von den Ausdrücken der Transformationskoeffizienten linear-unabhängig sind. Wie man sieht, erstreckt sich diese gegenseitige Abhängigkeit auch noch auf die Ausartungen ($D = 0$) der orthogonalen Transformationen von fünf Veränderlichen [1]).

Zur Bequemlichkeit des Lesers sollen auch noch die Formeln angegeben werden, die den Zusammenhang der zweierlei Parameter derselben Transformation vermitteln:

$$(65) \quad \begin{array}{llll} a_0 = \lambda - \lambda_\omega\,, & a_1 = -\lambda_{01} - \lambda_{23}\,, & a_2 = -\lambda_{02} - \lambda_{31}\,, & a_3 = -\lambda_{03} - \lambda_{12}\,, \\ b_0 = \lambda_0 + \lambda_{0\omega}\,, & b_1 = \lambda_1 + \lambda_{1\omega}\,, & b_2 = \lambda_2 + \lambda_{2\omega}\,, & b_3 = \lambda_3 + \lambda_{3\omega}\,, \\ c_0 = \lambda_0 - \lambda_{0\omega}\,, & c_1 = -\lambda_1 + \lambda_{1\omega}\,, & c_2 = -\lambda_2 + \lambda_{2\omega}\,, & c_3 = -\lambda_3 + \lambda_{3\omega}\,, \\ d_0 = \lambda + \lambda_\omega\,, & d_1 = \lambda_{01} - \lambda_{23}\,, & d_2 = \lambda_{02} - \lambda_{31}\,, & d_3 = \lambda_{03} - \lambda_{12}\,. \end{array}$$

In gleicher Weise kann man die Gruppe $\mathfrak{G}'_{10}$ oder die Gruppe $\mathfrak{G}''_{10}$ behandeln. Im Falle der Gruppe $\mathfrak{G}''_{10}$ setzen wir

$$(66) \qquad \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \Lambda = \Lambda_0 + \Lambda_1\varepsilon_1 + \Lambda_2\varepsilon_2 + \Lambda_3\varepsilon_3\,,$$

$$(67) \qquad \begin{pmatrix} \tilde{p}, & -\tilde{r} \\ -\tilde{q}, & \tilde{s} \end{pmatrix} = \tilde{\Lambda} = \tilde{\Lambda}_0 - \tilde{\Lambda}_1\varepsilon_1 + \tilde{\Lambda}_2\varepsilon_2 + \tilde{\Lambda}_3\varepsilon_3\,;$$

ferner

$$(68) \qquad \boxed{j_a = e_3\,, \quad j_1 = -e_1\varepsilon_1\,, \quad j_2 = -e_2\varepsilon_1\,, \quad j_3 = -e_3\varepsilon_1\,, \quad j_\omega = \varepsilon_2\,,}$$

so daß, wie zuvor,

---

[1]) Die Parameterverhältnisse, mit Einschluß ihrer Grenzwerte, für die $D = 0$ ist, erfüllen ein singularitätenfreies rationales Punktkontinuum M_{10}^{12} von zehn komplexen Dimensionen in R_{15}, das eine einfache Gruppe von $\infty^{2\cdot 45}$ automorphen Kollineationen zuläßt. Jedem Lehrsatz aus der Geometrie auf einer M_8^2 in R_9 entspricht ein Satz aus der Geometrie auf M_{10}^{12}, und umgekehrt. Die zwei Restschnitte der Mannigfaltigkeiten $B_\varrho + C_\varrho = 0$ und $B_\varrho - C_\varrho = 0$ liegen ganz auf $A = 0$. Sie bestimmen eine Untergruppe von G_{45}, die hier die Stelle der adjungierten Gruppe von G_{15} vertritt. (Die Bestimmung der Ordnungszahl 12 verdanke ich Herrn *L. B. van der Waerden.*)

$$(69)\qquad \boxed{j_a\, j_1\, j_2\, j_3\, j_\omega = 1\,,}$$

$$(70)\qquad \boxed{j_\sigma\, j_\tau + j_\tau\, j_\sigma = 0\,,} \qquad (\sigma \neq \tau)$$

nun aber

$$(71)\qquad \boxed{j_a^2 = 1\,,\quad j_1^2 = -1\,,\quad j_2^2 = -1\,,\quad j_3^2 = -1\,,\quad j_\omega^2 = -1}$$

wird. Ist, ähnlich wie zuvor,

$$(72)\qquad \begin{aligned} \Lambda &= \lambda + \sum_{a}^{\omega} \lambda_\varrho\, j_\varrho + \sum_{a}^{\omega} \lambda_{\sigma\tau}\, j_\sigma\, j_\tau\,, \\ \tilde{\Lambda} &= \lambda + \sum_{\sigma}^{\omega} \lambda_\varrho\, j_\varrho + \sum_{a}^{\omega} \lambda_{\sigma\tau}\, j_\tau\, j_\sigma\,, \end{aligned}$$

so ergibt sich

$$(73)\qquad \begin{aligned} \Lambda\tilde{\Lambda} &= A + 2\sum_{a}^{\omega} (B_\varrho + C_\varrho)\, j_\varrho\,, \\ \tilde{\Lambda}\Lambda &= A + 2\sum_{a}^{\omega} (B_\varrho - C_\varrho)\, j_\varrho\,, \end{aligned}$$

mit entsprechenden Folgerungen, wie zuvor. Es wird aber jetzt

$$(74)\qquad A = \begin{cases} \lambda^2 + \lambda_a^2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2 - \lambda_3^2 - \lambda_\omega^2 - \lambda_{a1}^2 - \lambda_{a2}^2 \\ - \lambda_{a3}^2 - \lambda_{a\omega}^2 + \lambda_{12}^2 + \lambda_{13}^2 + \lambda_{1\omega}^2 + \lambda_{22}^2 + \lambda_{2\omega}^2 + \lambda_{3\omega}^2\,, \end{cases}$$

und

$$(75)\qquad \begin{aligned} B_a &= \lambda\lambda_a + \lambda_{\omega 1}\lambda_{23} + \lambda_{\omega 2}\lambda_{31} + \lambda_{\omega 3}\lambda_{12}\,, \\ B_1 &= \lambda\lambda_1 - \lambda_{a2}\lambda_{3\omega} - \lambda_{a3}\lambda_{\omega 2} - \lambda_{a\omega}\lambda_{23}\,, \\ B_2 &= \lambda\lambda_2 - \lambda_{13}\lambda_{\omega a} - \lambda_{1\omega}\lambda_{a3} - \lambda_{1a}\lambda_{3\omega}\,, \\ B_3 &= \lambda\lambda_3 - \lambda_{2\omega}\lambda_{a1} - \lambda_{2a}\lambda_{1\omega} - \lambda_{21}\lambda_{\omega a}\,, \\ B_\omega &= \lambda\lambda_\omega - \lambda_{3a}\lambda_{12} - \lambda_{31}\lambda_{2a} - \lambda_{32}\lambda_{a1}\,, \end{aligned}$$

$$(76)\qquad \begin{aligned} C_a &= -\lambda_1\lambda_{a1} - \lambda_2\lambda_{a2} - \lambda_3\lambda_{a3} - \lambda_\omega\lambda_{a\omega}\,, \\ C_1 &= -\lambda_2\lambda_{12} - \lambda_3\lambda_{13} - \lambda_\omega\lambda_{1\omega} + \lambda_a\lambda_{1a}\,, \\ C_2 &= -\lambda_3\lambda_{23} - \lambda_\omega\lambda_{2\omega} + \lambda_a\lambda_{2a} + \lambda_1\lambda_{21}\,, \\ C_3 &= -\lambda_\omega\lambda_{3\omega} + \lambda_a\lambda_{3a} - \lambda_1\lambda_{31} - \lambda_2\lambda_{32}\,, \\ C_\omega &= \lambda_a\lambda_{\omega a} - \lambda_1\lambda_{\omega 1} - \lambda_2\lambda_{\omega 2} - \lambda_3\lambda_{\omega 3}\,. \end{aligned}$$

Die Ausdrücke (74), (75), (76) können, wie man leicht erkennt, auch von den Ausdrücken (57), (58) und (59) aus erhalten werden. Man ersetze etwa, für $\varrho, \sigma, \tau \neq 0$, j_ϱ, λ_ϱ, $\lambda_{0\varrho}$, $\lambda_{\sigma\tau}$ durch $-ij_\varrho$, $i\lambda_\varrho$, $i\lambda_{0\varrho}$, $-\lambda_{\sigma\tau}$ (und, wegen des Zusammenhangs der Formeln mit dem Früheren, den Index o durch α).

Ist das eine oder andere System von Gleichungen $B_\varrho + C_\varrho = 0$, $B_\varrho - C_\varrho = 0$ erfüllt, und besteht außerdem die Ungleichung $A \neq 0$, so bestehen wiederum alle Gleichungen $B_\varrho = 0$, $C_\varrho = 0$, und Λ wird *ein Transformator*. Es entsteht, da

$$(77)\qquad \begin{pmatrix} Z_a\ , & -Z_\omega - \dot{Z} \\ Z_\omega - \dot{Z}\ , & -Z_a \end{pmatrix}$$
$$= \mathsf{Z} = Z_a j_a + Z_1 j_1 + Z_2 j_2 + Z_3 j_3 + Z_\omega j_\omega = \tilde{\mathsf{Z}}$$

wird, auch jetzt wieder eine nach dem früheren Schema gebaute Formel

$$(78)\qquad \boxed{\mathsf{Z}'\Lambda = \Lambda\mathsf{Z}} \quad \text{oder} \quad \boxed{\mathsf{Z}\tilde{\Lambda} = \tilde{\Lambda}\mathsf{Z}'},$$

die die eigentlichen automorphen Transformationen der Quadratsumme

$$(79)\qquad \mathsf{Z}\tilde{\mathsf{Z}} = Z_a^2 - Z_1^2 - Z_2^2 - Z_3^2 - Z_\omega^2 = \tilde{\mathsf{Z}}\mathsf{Z}$$

erschöpfend liefert. Zugleich wird die *Norm* des Transformators Λ

$$(80)\qquad N(\Lambda) = \Lambda\tilde{\Lambda} = D = \tilde{\Lambda}\Lambda = N(\tilde{\Lambda});$$

es bestehen die Zusammensetzungsformeln $\Lambda'' = \Lambda'\Lambda$ und $D'' = D'D$. $(D = A.)$ Wie früher liefern im reellen Gebiete die Voraussetzungen $D > 0$, $D < 0$ die zwei Schichten, auf die die reellen konformen Transformationen im *Möbius*schen Kontinuum $\mathsf{Z}\tilde{\mathsf{Z}} = 0$ verteilt sind.

Der Zusammenhang der zweierlei Parameter für die Transformationen von $\mathfrak{G}_{10}''$ oder G_{10}'' ist hier gegeben durch die Gleichungen

$$(81)\qquad \begin{array}{llll} p_0 = \lambda + \lambda_a\ , & p_1 = \lambda_{23} - \lambda_{1\omega}\ , & p_2 = \lambda_{31} - \lambda_{2\omega}\ , & p_3 = \lambda_{12} - \lambda_{3\omega}\ , \\ q_0 = -\lambda_\omega - \lambda_{a\omega}\ , & q_1 = -\lambda_1 - \lambda_{a1}\ , & q_2 = -\lambda_2 - \lambda_{a2}\ , & q_3 = -\lambda_3 - \lambda_{a3}\ , \\ r_0 = \lambda_\omega - \lambda_{a\omega}\ , & r_1 = -\lambda_1 + \lambda_{a1}\ , & r_2 = -\lambda_2 + \lambda_{a2}\ , & r_3 = -\lambda_3 + \lambda_{a3}\ , \\ s_0 = \lambda - \lambda_a\ , & s_1 = \lambda_{23} + \lambda_{1\omega}\ , & s_2 = \lambda_{31} + \lambda_{2\omega}\ , & s_3 = \lambda_{12} + \lambda_{3\omega}\ , \end{array}$$

worin man auch, nach Nr. (42), die zuerst benutzten Parameter a_k, b_k, c_k, d_k einführen kann.

5.
Verschiedene Ergänzungen.

Wir hatten gesehen, daß im Falle der betrachteten Untergruppen von $\mathfrak{G}_{15}$ oder G_{15} die zugehörigen Nablafunktionen jedesmal Quadrate wurden. Es gilt aber ein umfassenderer Lehrsatz:

Läßt eine konforme Transformation der Gruppe G_{15} eine nicht-singuläre sphärische Mannigfaltigkeit M_3^2 in Ruhe, so werden die beiden zugehörigen Nablafunktionen Quadrate von ganzen rationalen Funktionen zweiten Grades der Parameter a_k, b_k, c_k, d_k oder $a_k, \gamma_k, \beta_k, \delta_k$ der Transformation.

Zur Ableitung dieses Satzes bediene ich mich wieder der Quaternionenrechnung.

Die Gleichung einer nichtsingulären Mannigfaltigkeit M_3^2 läßt sich immer in der Form

$$\tilde{z}\,p\,z + qz + \tilde{z}r + s = 0$$

oder

$$(82)\qquad p(Z_a - Z_\omega) + q\mathsf{Z} + \tilde{\mathsf{Z}}r + (Z_a + Z_\omega)s = 0$$

schreiben, wo $p = p$, $q = \tilde{r}$, $r = \tilde{q}$, $s = \tilde{s}$ ist und die Nablafunktion

$$\begin{Bmatrix} p\,q \\ r\,s \end{Bmatrix} = (ps - qr)^2 = \begin{Bmatrix} p\,r \\ q\,s \end{Bmatrix} \tag{83}$$

einen von Null verschiedenen Wert hat. (M. Z., II, S. 210, 211: $n = p$, $l = -r$, $\tilde{l} = -q$, $m = -s$.)

Soll nun die Transformation $z' = \dfrac{az+b}{cr+d}$ die Mannigfaltigkeit M_3^2 in Ruhe lassen, so folgt

$$\begin{aligned} &\tilde{a}pa + \tilde{c}qa + \tilde{a}rc + \tilde{c}sc = D\,.\,p\,, \\ &\tilde{b}pa + \tilde{d}qa + \tilde{b}rc + \tilde{d}sc = D\,.\,q\,, \\ &\tilde{a}pb + \tilde{c}qb + \tilde{a}rd + \tilde{c}sd = D\,.\,r\,, \\ &\tilde{b}pb + \tilde{d}qb + \tilde{b}rd + \tilde{d}sd = D\,.\,s\,, \end{aligned} \tag{84}$$

wo D eine numerische Quaternion sein muß. Hieraus aber ergibt sich

$$\begin{aligned} D\cdot\begin{pmatrix} p\,q \\ r\,s \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \tilde{a}p + \tilde{c}q\,, & \tilde{a}r + \tilde{c}s \\ \tilde{b}p + \tilde{a}q\,, & \tilde{b}r + \tilde{d}s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a\,b \\ c\,d \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \tilde{a}\,\tilde{c} \\ \tilde{b}\,d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p\,r \\ q\,s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a\,b \\ c\,d \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

also $D^4 = \nabla^2$. Es folgt, wie früher,

$$\boxed{\nabla = D^2} \tag{85}$$ [1]).

Daß die angegebene Einschränkung nicht entbehrlich ist, zeigt das Beispiel $p = q = r = 0$, $\tilde{a}a \neq \tilde{d}d$.

Man kann sich die Frage vorlegen, ob sich nicht auch der unter (16) angegebene Zusammenhang zwischen a, b, c, d und $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ durch ein einziges Formelpaar darstellen läßt. In der Tat wird zum Beispiel

$$\frac{1}{\nabla_l}\begin{pmatrix} \dfrac{\partial\nabla_l}{\partial d}, & -\dfrac{\partial\nabla_l}{\partial c} \\ -\dfrac{\partial\nabla_l}{\partial b}, & \dfrac{\partial\nabla_l}{\partial a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\,\beta \\ \gamma\,\delta \end{pmatrix}, \tag{86}$$

sofern man festsetzt, daß bei jeder einzelnen der formal auszuführenden Differentiationen die Nablafunktion so geschrieben werden soll, daß die Quaternion, nach der zu differentiieren ist, vorn oder hinten steht. Es ist demzufolge auch

$$\frac{1}{\nabla_l}\begin{pmatrix} \dfrac{\partial\nabla_l}{\partial a}, & \dfrac{\partial\nabla_l}{\partial c} \\ \dfrac{\partial\nabla_l}{\partial b}, & \dfrac{\partial\nabla_l}{\partial d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\,b \\ c\,d \end{pmatrix}^{-1}, \tag{87}$$

ganz wie bei gewöhnlichen komplexen Veränderlichen, wo nur an Stelle von ∇_l die Transformationsdeterminante tritt.

---

[1]) Ein entsprechender Satz besteht natürlich in der projektiven Liniengeometrie, und er ist auch schon bekannt. Siehe *Lie* und *Scheffers*, Geometrie der Berührungstransformationen, 1896, S. 289, Nr. 48.

Inhaltsreicher sind die folgenden Formeln, deren jede *eine Zerlegung der Nablafunktion in ein symbolisches Produkt von drei zyklisch vertauschbarer Quaternionenmatrizen* enthält:

$$\begin{pmatrix} \tilde{d} & \tilde{b} \\ \tilde{a} & \tilde{c} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a\tilde{a} - b\tilde{b}, & c\tilde{a} - d\tilde{b} \\ -a\tilde{c} + b\tilde{d}, & -c\tilde{c} + d\tilde{d} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d, & -c \\ -b, & a \end{pmatrix}$$

$$= \nabla_l \cdot \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d, & -c \\ -b, & a \end{pmatrix} = \nabla_l = \begin{pmatrix} d, & -c \\ -b, & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix} \cdot \nabla_l$$

$$= \begin{pmatrix} d, & -c \\ -b, & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{a}a - \tilde{c}c, & \tilde{c}d - \tilde{a}b \\ \tilde{a}b - \tilde{c}d, & -\tilde{c}c + \tilde{a}a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{d} & \tilde{b} \\ \tilde{a} & \tilde{c} \end{pmatrix},$$

(88)

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{d}d - \tilde{b}b, & \tilde{c}d - \tilde{a}b \\ -\tilde{d}c + \tilde{b}a, & -\tilde{c}c + \tilde{a}a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{a}, & -\tilde{c} \\ -\tilde{b}, & \tilde{d} \end{pmatrix}$$

$$= \nabla_l \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta, & -\beta \\ -\gamma, & \alpha \end{pmatrix} = \nabla_l = \begin{pmatrix} \delta, & -\beta \\ -\gamma, & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \nabla_l$$

$$= \begin{pmatrix} \tilde{a}, & -\tilde{c} \\ -\tilde{b}, & \tilde{d} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\tilde{d} - c\tilde{c}, & -b\tilde{d} + a\tilde{c} \\ d\tilde{b} - c\tilde{a}, & -b\tilde{b} + a\tilde{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

In der vorausgehenden Darlegung hatten sich im Falle $n = 6$ die reellen pseudorthogonalen Transformationen nur für Quadratsummen des Trägheitsindex 1 gefunden. Das Rechnen mit gewöhnlichen Quaternionenmatrizen oder die Theorie des Systems QQ^* kann das Fehlende nicht liefern, und die Trägheitsindizes 0 und 2 lassen sich, nach einem schon erwähnten Satze von *Cartan* überhaupt nicht in dieser Weise behandeln [1]).

Indessen läßt sich neben das Produkt QQ^* auch das Produkt QQ oder das Produkt Q^*Q^* stellen, übrigens in beiden Fällen mit nur formal-abweichendem Ergebnis. Wählen wir das zweite Verfahren, so erfreuen wir uns wiederum des Vorteils der Matrizenrechnung. Eine „*Nablafunktion*" kann dann für das System Q^* gerade so definiert werden wie für das System Q, nämlich durch dieselbe Formel

$$\begin{Bmatrix} p & q \\ r & s \end{Bmatrix}^* = p\tilde{p} \,.\, s\tilde{s} - p\tilde{r}s\tilde{q} - q\tilde{s}r\tilde{p} + q\tilde{q} \,.\, r\tilde{r}, \tag{89}$$

wobei nun aber die Produkte $p\tilde{p}$ usw. mit Hilfe der zweiten Tafel unter Nr. 46 auszurechnen sind. Es wird also z. B.

---

[1]) Übrigens ist die Stellung, die man in der projektiven Geometrie, wie auch sonst, wenn ich nicht irre, ganz allgemein den reellen Figuren zuschreibt, nur teilweise im Wesen der Sache, nämlich mathematisch, zum Teil aber nur psychologisch oder empirisch begründet — also *ein mathematischer Anthropomorphismus*, gleich der Dimensionenzahl drei „des" Raumes der älteren Geometrie. Es gibt noch einige zum Begriff der reellen Figur analoge Begriffe, nach deren Einführung die genannten Ausnahmen wegfallen. Vgl. Math. Ann. Bd. 91, 1924, S. 236—248.

$$p\tilde{p} = p_0^2 - p_1^2 + p_2^2 - p_3^2.$$

Nur im Reellen bestehen wesentliche Unterschiede gegenüber dem Vorhergehenden. Namentlich läßt sich unsere weitere Nablafunktion in Form einer Determinante (Gitterdeterminante) schreiben, in der bei reellen p, q, r, s keine imaginären Größen vorkommen:

$$(90)\quad \begin{Bmatrix} p\,q \\ r\,s \end{Bmatrix}^* = \begin{vmatrix} p_0 + p_1, & p_2 + p_3, & q_0 + q_1, & q_2 + q_3 \\ -p_2 + p_3, & p_0 - p_1, & -q_2 + q_3, & q_0 - q_1 \\ r_0 + r_1, & r_2 + r_3, & s_0 + s_1, & s_2 + s_3 \\ -r_2 + r_3, & r_0 - r_1, & -s_2 + s_3, & s_0 - s_1 \end{vmatrix}.$$

(Vgl. M. Z., I, S. 69, 70.)

Es findet sich jetzt, wenn auch Z eine Quaternion des Systems Q^* bedeutet,

$$(91)\quad \begin{Bmatrix} Z_\alpha - Z_\omega, & Z \\ \tilde{Z}, & Z_\alpha + Z_\omega \end{Bmatrix}^* = \{Z_\alpha^2 - Z_0^2 + Z_1^2 - Z_2^2 + Z_3^2 - Z_\omega^2\}^2.$$

Man erhält die eigentlichen und uneigentlichen Transformationen der quadratischen Form in (91) nach derselben Regel, die wir schon gefunden hatten. Dieses Verfahren ist also im Falle $n = 6$ bei Annahme des Trägheitsindex 3 noch bequemer als das aus der projektiven Liniengeometrie zu entnehmende, da bei diesem die zu transformierende (Plückersche) Gleichung oder Form erst durch eine wenn auch einfache Transformation in die unter (91) vorkommende Gestalt gebracht werden muß.

Natürlich ergeben sich im Falle $n = 5$ nun die pseudorthogonalen Transformationen für den Trägheitsindex 2, die wir ebenfalls hatten auslassen müssen.

Die konformen Transformationen im Möbiusschen Kontinuum M_3^2 (Gruppe G_{10}'') sind kürzlich auch von anderer Seite behandelt worden. Leider krankt diese Arbeit, abgesehen von ihren beschwerlichen Rechnungen, an sehr störenden Fehlern. Die vorhandene Literatur ist zum Teil nicht berücksichtigt, zum Teil wird sie einer Kritik unterzogen, die sich gegen mit Recht angesehene Mathematiker richtet und nicht unwidersprochen bleiben darf. Zu näherem Eingehen darauf ist hier wohl nicht der rechte Ort.

Walter de Gruyter & Co. Berlin W 10 und Leipzig
Postscheckkonto: Berlin NW 7 Nr. 59533

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik. Gegründet von KARL OHRTMANN und FELIX MÜLLER, fortgeführt von EMIL LAMPE. Im Verein mit anderen Mathematikern und unter besonderer Mitwirkung von H. Hahn, E. Hecke, G. Herglotz, O. Hölder, A. Loewy, L. Neder, O. Perron, E. Salkowski, G. Szegö, A. Wangerin, H. Weyl herausgegeben von LEON LICHTENSTEIN.
Band 1—48: Jahrgang 1868—1922.
Band 1—44 Preise auf Anfrage, Band 45 75.—, Band 46 92.—, Band 47 74.—, Band 48 Heft 1—6 je 12.—

Geschichte der Elementar-Mathematik in systematischer Darstellung.
Von Professor Dr. JOHANNES TROPFKE, Direktor der Kirschner-Oberrealschule zu Berlin. Zweite, verbesserte und sehr vermehrte Auflage. Lex.-Oktav.
Erster Band: Rechnen. VII, 177 Seiten. 1921. 7.20, geb. 8.20
Zweiter Band: Allgemeine Arithmetik. IV, 221 Seiten. 1921. 8.50, geb. 9.50
Dritter Band: Proportionen, Gleichungen. IV, 151 Seiten. 1922. 6.—, geb. 7.—
Vierter Band: Ebene Geometrie. IV, 240 Seiten. 1922. 9.—, geb. 10.—
Fünfter Band: I. Ebene Geometrie. II. Sphärik und sphärische Trigonometrie. IV, 185 Seiten. 1923. 7.50, geb. 8.50
Sechster Band: Analysis. Analytische Geometrie. IV, 169 Seiten. 1924. 7.—, geb. 8.—
Siebenter Band: Stereometrie, Verzeichnisse. V, 128 Seiten. 1924. 6.50, geb. 7.50

Göschens Lehrbücherei. Gruppe 1: Reine Mathematik.
Bachmann, Professor Dr. Paul, Grudnlehren der neueren Zahlentheorie. Mit 10 Figuren. Zweite, verbesserte Auflage. Oktav. XV, 246 Seiten. (Bd. 3.) 8.50, geb. 9.50
Beck, Professor Dr. H., Einführung in die Axiomatik der Algebra. Groß-Oktav. X, 198 Seiten. (Bd. 6.) 9.—, geb. 10.50
Fueter, Dr. Rudolf, Professor an der Universität Zürich, Synthetische Zahlentheorie. Zweite, verbesserte Auflage. Oktav. VIII, 277 Seiten. (Bd. 4.) 10.—, geb. 12.—
Perron, Dr. O., Professor an der Universität Heidelberg, Irrationalzahlen. Oktav. VIII, 186 Seiten. (Bd. 1.) 6.—, geb. 7.—
Runge, Dr. C., Professor an der Universität Göttingen, Praxis der Gleichungen. Mit 8 Figuren. Zweite, verbesserte Auflage. Oktav. V, 172 Seiten. (Bd. 2.) 6.—, geb. 7.—
Schlesinger, Dr. Ludwig, o. Professor an der Universität Gießen, Automorphe Funktionen. Oktav. X, 205 Seiten. (Bd. 5.) 8.—, geb. 9.20

Fünfstellige Logarithmentafeln der trigonometrischen Funktionen für jede Zeitsekunde des Quadranten. Herausgegeben von Professor Dr. J. PETERS, Observator am Astronomischen Recheninstitut. Lexikon-Oktav. IV, 82 Seiten. 1921. 6.—, geb. 7.—

Vollständige logarithmische und trigonometrische Tafeln. Von Professor Dr. E. F. AUGUST, weiland Direktor des Köllnischen Realgymnasiums, Berlin. Sechsundvierzigste Auflage in der Bearbeitung von Dr. F. AUGUST, weiland Professor an der Artillerie- und Ingenieur-Schule, Berlin. Oktav. VII, 204 Seiten. 1924. Geb. 2.—

Lehrbuch der Algebra. Von Dr. ALFRED LOEWY, o. Professor an der Universität in Freiburg i. Br. I. Teil: Grundlagen der Arithmetik. Groß-Oktav. VI, 398 Seiten. 1915. 12.—, geb. 13.20

Einführung in die Determinantentheorie einschließlich der Fredholmschen Determinanten. Von Dr. GERHARD KOWALEWSKI, o. Professor an der Technischen Hochschule in Dresden. Zweite, verkürzte Auflage. Groß-Oktav. IV, 304 Seiten. 1925. 14.—, geb. 15.50

Vektoranalysis in ihren Grundzügen und wichtigen physikalischen Anwendungen. Von Dr. ARTHUR HAAS, a. o. Professor an der Universität Wien. Mit 37 Abbildungen im Text. Groß-Oktav. VI, 149 Seiten. 1922. 4.—, geb. 5.—

Walter de Gruyter & Co. Berlin W 10 und Leipzig
Postscheckkonto: Berlin NW 7 Nr. 59533

Zahlentheorie. Von Dr. KURT HENSEL, o. ö. Professor an der Universität Marburg. Groß-Oktav. XII, 356 Seiten. 1913. 10.—, geb. 11.—

Lehrbuch der Analysis. Von Professor Dr. EDOUARD GOURSAT. 1. Band. Nach der zweiten Auflage des französischen Originals übersetzt von Felix James Schwarz. Mit Begleitwort von DR. GERHARD KOWALEWSKI, a. o. Professor an der Technischen Hochschule Dresden. Mit 53 Figuren. Groß-Oktav. XII, 592 Seiten. 1914. 12.—, geb. 13.50

Einführung in die Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen auf funktionentheoretischer Grundlage. Von Dr. LUDW. SCHLESINGER, o. Professor an der Universität Gießen. Dritte, neubearbeitete Auflage. Groß-Oktav. VIII. 326 Seiten. 1922. 10.—, geb. 11.—

Einführung in die Theorie der algebraischen Funktionen einer Veränderlichen. Von HEINRICH W. E. JUNG, o. ö. Professor an der Universität Halle-Wittenberg. Mit 35 Abbildungen im Text. Groß-Oktav. VI, 246 Seiten. 1923. 7.—, geb. 8.—

Theorie des Potentials und der Kugelfunktionen. Von Professor Dr. A. WANGERIN in Halle a./S.

I. Teil. Mit 46 Figuren. VIII, 255 Seiten. Unveränderter Neudruck. 1922. (Sammlung Schubert Bd. 58.) Geb. 8.—

II. Teil. Mit 17 Fig. VIII, 286 Seiten. 1921. (Sammlung Schubert Bd. 59.) Geb. 8.—

Ebene und sphärische Trigonometrie. Von Professor Dr. F. BOHNERT in Hamburg. Zweite Auflage. Dritter Neudruck. Mit 63 Figuren. VIII, 167 Seiten, 1919. (Sammlung Schubert Bd. 3.) Geb. 4.40

Einführung in die analytische Geometrie. Von Professor Dr. GERHARD KOWALEWSKI. Mit 112 Figuren. Zweite, unveränderte Auflage. Lexikon-Oktav. VIII, 360 Seiten. 1923. Geb. 11.20

Lehrbuch der analytischen Geometrie. Von Dr. FRIEDRICH SCHUR, o. Professor an der Universität Breslau. Zweite, verbesserte und vermehrte Auflage. Mit 81 Figuren. Groß-Oktav. XII, 248 Seiten. 1912. 6.50, geb. 7.70

Lehrbuch der darstellenden Geometrie. Von Dr. KARL ROHN, Geh. Rat, weiland Professor an der Universität Leipzig und Dr. ERWIN PAPPERITZ, Geh. Rat, Professor an der Bergakademie in Freiberg i. Sa. Drei Bände. Groß-Oktav. I. Orthogonalprojektion. Vielflache, Perspektivität ebener Figuren, Kurven, Zylinder, Kugel, Kegel, Rotations- und Schraubenflächen. Vierte, erweiterte Auflage. XX, 502 Seiten. Mit 351 Fig. 1913. Anastatischer Nachdruck 1921. 16.50, geb. 18.—

II. Axonometrie, Perspektive, Beleuchtung. Vierte, umgearbeitete Auflage. VI, 194 Seiten mit 118 Figuren. 1916. 6.20, geb. 7.20

III. Kegelschnitte, Flächen zweiten Grades, Regel-, abwickelbare und andere Flächen. Flächenkrümmung. Dritte, umgearbeitete Auflage. X, 334 Seiten. Mit 157 Figuren. 1906. Anastatischer Nachdruck. 1921. 10.80, geb. 12.—

Darstellende Geometrie. Von THEODOR SCHMID, o. ö. Professor an der Technischen Hochschule in Wien.

I. Teil: Eckige Körper, Kugel, Zylinder, Kegel, Plankurven und Raumkurven mit den zugehörigen Torsen im Normalrißverfahren und in orthogonaler Axonometrie. Dritte Auflage. Mit 170 Figuren. 283 Seiten. 1922. (Sammlung Schubert Bd. 65.) Geb. 6.—

II. Teil: Schiefe und zentrale Projektion. Dreh-, Rohr-, Schrauben- und Regelflächen. Geländedarstellung, Kartenprojektion, Nomographie. Zweite Auflage. Mit 163 Figuren. 340 Seiten. 1923. (Sammlung Schubert Bd. 66.) Geb. 7.50

Analysis der ebenen Bewegung. Von Dr. MARTIN KRAUSE, Geh. Rat, Professor an der Techn. Hochschule Dresden. Oktav. VII, 216 Seiten. 1920. 6.—

JAN 13 1927

JUBILÄUMSBAND

AUS ANLASS DES 100 JÄHRIGEN BESTEHENS

PERIODICAL ROOM GENERAL LIBRARY UNIV. OF MICH.

Journal

für die

reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826.

Herausgegeben

unter Mitwirkung der Herren

Hasse, Schäfer, Schlesinger, Schottky

von

K. Hensel.

Band 157.

Heft 2.

Mit Bildern von Borchardt, Kronecker, Weierstraß und Fuchs

Ausgegeben den 20. Dezember

Berlin und Leipzig

WALTER DE GRUYTER & CO.

VORMALS G. J. GÖSCHEN'SCHE VERLAGSHANDLUNG - J. GUTTENTAG VERLAGS-BUCHHANDLUNG - GEORG REIMER - KARL J. TRÜBNER - VEIT & COMP.

1926

Jährlich zirka 6 Hefte. Vier Hefte bilden einen Band.

Band 157. Heft 2.

(Jubiläumsband I.)

Mit Bildern von Borchardt, Kronecker, Weierstraß und Fuchs.

Inhaltsverzeichnis.

Bohr, Harald, Ein Satz über analytische Fortsetzung fastperiodischer Funktionen Seite 61

Fueter. Rudolf, Über automorphe Funktionen in bezug auf Gruppen, die in der Ebene uneigentlich diskontinuierlich sind . . . . . — 66

Fraenkel, Adolf, Die Gleichheitsbeziehung in der Mengenlehre . . . . . — 79

Noether, Emmy, Der Diskriminantensatz für die Ordnungen eines algebraischen Zahl- oder Funktionenkörpers . . . . . — 82

Speiser, Andreas, Naturphilosophische Untersuchungen von Euler und Riemann — 105

Hasse, Helmut, Neue Begründung der komplexen Muliplikation . . . . . — 115

An unsere Mitarbeiter!

Um ein schnelles Erscheinen der einzelnen Hefte des Journals zu ermöglichen, können wir den Herren Autoren grundsätzlich nur eine Korrektur ihrer Beiträge zustellen. Da die Korrekturen seitens der Redaktion, auch hinsichtlich ihres Inhalts, mit größter Genauigkeit gelesen werden, hoffen wir auch so, allen Wünschen gerecht zu werden.

Die Herren Verfasser erhalten von Abhandlungen bis zu 24 Seiten Umfang 100 Sonderabdrucke, von größeren Arbeiten 50 Sonderabdrucke kostenfrei, weitere gegen Berechnung.

Sendungen für das Journal erbittet die Redaktion **ausschließlich** unter der Adresse

An die Redaktion des Journals für die reine und angewandte Mathematik

Professor Dr. Kurt Hensel, Marburg (Bez. Cassel), Breiter Weg 7.

Gründer des Journals
u. Leiter desselben
1826 ~ Band 1-52

August Leopold Crelle

geb. 11. März 1780
gest. 6. Oktob. 1855

Leiter des Journals 1857-1881 ~ Band 53-90.

Leiter des Journals 1881-1892 ~ Band 91-109

Carl Wilhelm Borchardt
geb. 2. Febr. 1817 gest. 27 Juni 1880

Mitherausgeber des Journals 1881-1892 mit Kronecker.

Mitherausgeber des Journals 1892-1897 mit Fuchs.

Leopold Kronecker
geb. 7. Dezember 1823 gest. 29. Dezember 1891

Carl Weierstrass
geb. 31 Oktober 1815 gest. 19 Februar 1897

Leiter des Journals 1892-1902 ~ Band 110-124

Lazarus Fuchs
geb. 5. Mai 1833 . gest. 26. Mai 1902

Band 157. Heft 2.

(Jubiläumsband I.)

Mit Bildern von Borchardt, Kronecker, Weierstraß und Fuchs.

Inhaltsverzeichnis.

Bohr, Harald, Ein Satz über analytische Fortsetzung fastperiodischer Funktionen Seite 61

Fueter, Rudolf, Über automorphe Funktionen in bezug auf Gruppen, die in der Ebene uneigentlich diskontinuierlich sind . . . . . — 66

Fraenkel, Adolf, Die Gleichheitsbeziehung in der Mengenlehre . . . . . — 79

Noether, Emmy, Der Diskriminantensatz für die Ordnungen eines algebraischen Zahl- oder Funktionenkörpers . . . . . — 82

Speiser, Andreas, Naturphilosophische Untersuchungen von Euler und Riemann — 105

Hasse, Helmut, Neue Begründung der komplexen Multiplikation . . . . . — 115

An unsere Mitarbeiter.

Um ein schnelles Erscheinen der einzelnen Hefte des Journals zu ermöglichen, können wir den Herren Autoren grundsätzlich nur eine Korrektur ihrer Beiträge zustellen. Da die Korrekturen seitens der Redaktion, auch hinsichtlich ihres Inhalts, mit größter Genauigkeit gelesen werden, hoffen wir auch so, allen Wünschen gerecht zu werden.

Die Herren Verfasser erhalten von Abhandlungen bis zu 24 Seiten Umfang 100 Sonderabdrucke, von größeren Arbeiten 50 Sonderabdrucke kostenfrei, weitere gegen Berechnung.

Sendungen für das Journal erbittet die Redaktion **ausschließlich** unter der Adresse

An die Redaktion des Journals für die reine und angewandte Mathematik

Professor Dr. Kurt Hensel, Marburg (Bez. Cassel), Breiter Weg 7.

Begründer des Journals und Leiter desselben 1826–1856 ~ Band 1–52

August Leopold Crelle

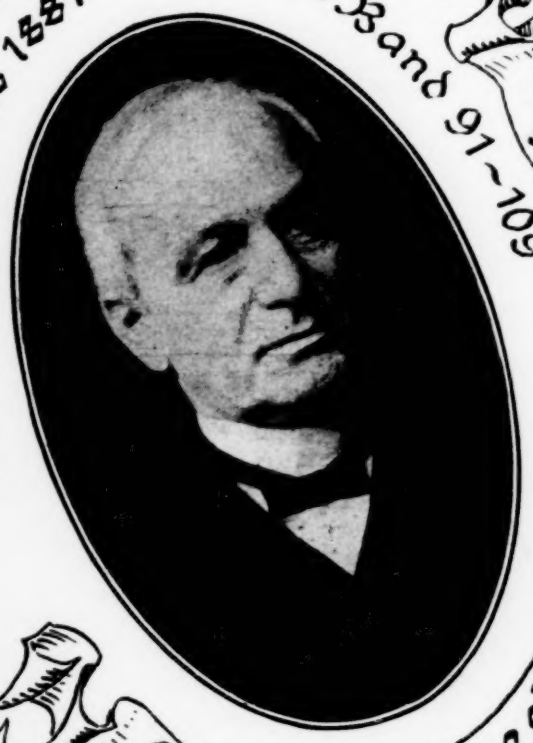
geb. 11. März 1780
gest. 6. Oktob. 1855

Leiter des Journals 1857–1881 ~ Band 53–90.

Carl Wilhelm Borchardt
geb. 2. Febr. 1817 gest. 27 Juni 1880

Mitherausgeber des Journals 1881–1892 mit Kronecker. 1892–1897 mit Fuchs.

Leiter des Journals 1881–1892 ~ Band 91–109



Leopold Kronecker
geb. 7. Dezember 1823 gest. 29. Dezember 1891

Carl Weierstrass
geb. 31 Oktober 1815 gest. 19. Februar 1897

Leiter des Journals 1892–1902 ~ Band 110–124

Lazarus Fuchs
geb. 5. Mai 1833 . gest. 26. Mai 1902.

Band 157. Heft 2.

(Jubiläumsband I.)

Mit Bildern von Borchardt, Kronecker, Weierstraß und Fuchs.

Inhaltsverzeichnis.

. Harald, Ein Satz über analytische Fortsetzung beliebiger analytischer Funktionen Seite 61
r. Rudolf, Über automorphe Funktionen in bezug auf Gruppen, die in der Ebene uneigentlich diskontinuierlich sind . . . . . — 66
kel, Adolf, Die Gleichheitsbeziehung in der Mengenlehre . . . . . — 79
er, Emmy, Der Diskriminantensatz für die Ordnungen eines algebraischen Zahl- oder Funktionenkörpers . . . . . — 82
r, Andreas, Naturphilosophische Untersuchungen von Euler und Riemann — 105
, Helmut, Neue Begründung der komplexen Multiplikation . . . . . — 115

An unsere Mitarbeiter!

Um ein schnelles Erscheinen der einzelnen Hefte des Journals zu ermöglichen, können wir den Herren Autoren grundsätzlich nur eine Korrektur ihrer Beiträge zustellen. Da die Korrekturen seitens der Redaktion, auch hinsichtlich ihres Inhalts, mit größter Genauigkeit gelesen werden, hoffen wir auch so, allen Wünschen gerecht zu werden.

Die Herren Verfasser erhalten von Abhandlungen bis zu 24 Seiten Umfang 100 Sonderabdrucke, von größeren Arbeiten 50 Sonderabdrucke kostenfrei, weitere gegen Berechnung.

ungen für das Journal erbittet die Redaktion **ausschließlich** unter der Adresse

An die Redaktion des Journals für die reine und angewandte Mathematik
Professor Dr. Kurt Hensel, Marburg (Bez. Cassel), Breiter Weg 7.

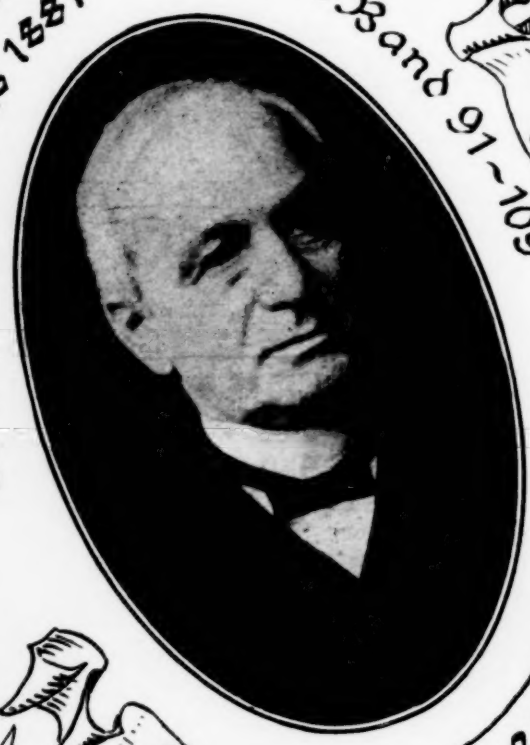
Begründer des Journals und Leiter desselben 1826–1856 ~ Band 1–52

August Leopold Crelle

geb. 11. März 1780
gest. 6. Oktob. 1855

Leiter des Journals 1857–1881 ~ Band 53–90.

Carl Wilhelm Borchardt
geb. 2. Febr. 1817 gest. 27 Juni 1880



Leiter des Journals 1881–1892 ~ Band 91–109

Leopold Kronecker
geb. 7. Dezember 1823 gest. 29. Dezember 1891

Mitherausgeber des Journals 1851–1892 mit Kronecker. 1892–1897 mit Fuchs.

Carl Weierstrass
geb. 31. Oktober 1815 gest. 19. Februar 1897

Leiter des Journals 1892–1902 ~ Band 110–124

Lazarus Fuchs
geb. 5. Mai 1833 . gest. 26. Mai 1902.

Ei

„fas
von
eine
soll
kom
bew
Bem
Vari

$F(t)$
Läng
eine
für

genü

$a <$
$0 <$
Fall
$\tau(\varepsilon)$
zu ε

werd
Jo

Ein Satz über analytische Fortsetzung fastperiodischer Funktionen.

Von *Harald Bohr* in Kopenhagen.

In drei Abhandlungen in den Acta mathematica [1]) habe ich die Theorie der „fastperiodischen" Funktionen entwickelt. Die zwei ersten Abhandlungen handeln von Funktionen einer reellen Variablen t, die dritte von analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen $s = \sigma + it$. In der vorliegenden kleinen Arbeit soll ein weiterer Beitrag zu der Theorie der fastperiodischen Funktionen einer komplexen Variabeln gegeben werden. Bevor ich, in § 3, den Satz aufstelle und beweise, werde ich zunächst in den Paragraphen 1 und 2 einige vorbereitende Bemerkungen über fastperiodische Funktionen einer reellen bzw. einer komplexen Variablen vorausschicken.

§ 1.

Bemerkungen über fastperiodische Funktionen einer reellen Variablen.

Ich erinnere zunächst an die grundlegende Definition:

Definition 1. Eine für $-\infty < t < \infty$ definierte und stetige Funktion $F(t) = U(t) + iV(t)$ soll fastperiodisch heißen, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Länge $l = l(\varepsilon)$ so gibt, daß jedes Intervall $a < t < b$ der Länge $l(\varepsilon)$ mindestens eine zu ε gehörige Verschiebungszahl $\tau = \tau(\varepsilon)$ enthält, d. h. eine Zahl τ, welche für alle t des ganzen Intervalles $-\infty < t < \infty$ der Ungleichung

$$|F(t+\tau) - F(t)| \leqq \varepsilon$$

genügt.

Bemerkung. Es ist klar, daß in dieser Definition die Worte „jedes Intervall $a < t < b$ der Länge $l(\varepsilon)$" durch die Worte „jedes auf der positiven Halbachse $0 < t < \infty$ gelegene Intervall $a < t < b$ der Länge $l(\varepsilon)$" ersetzt werden können. Falls nämlich jedes Intervall $0 \leqq a < t < b$ der Länge l eine Verschiebungszahl $\tau(\varepsilon)$ enthält, wird eo ipso auch in jedem anderen Intervall derselben Länge l eine zu ε gehörige Verschiebungszahl liegen, weil die Zahlen τ und $-\tau$ zugleich Ver-

[1]) Zur Theorie der fastperiodischen Funktionen I, II, III (Bd. 45, 46, 47). Im folgenden werden diese drei Abhandlungen einfach mit I, II, III zitiert.

schiebungszahlen sind, und die Zahl $\tau = 0$ immer (d. h. für jedes ε) eine Verschiebungszahl ist.

Um unseren Satz in § 3 bequem formulieren zu können, wird es nützlich sein, auch von fastperiodischen Funktionen zu sprechen, welche nicht für alle t, sondern nur in einem nach der einen Seite ins Unendliche reichenden Intervall, etwa auf der positiven Halbachse $0 < t < \infty$ gegeben sind. Wir führen die Definition ein:

Definition 2. Eine für $0 < t < \infty$ definierte und stetige Funktion $\Phi(t)$ soll „fastperiodisch auf $0 < t < \infty$" heißen, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Länge $l = l(\varepsilon)$ gibt, so daß jedes Intervall $0 \leqq a < t < b$ dieser Länge l mindestens eine zu ε gehörige Verschiebungszahl $\tau = \tau(\varepsilon)$ enthält, d. h. eine Zahl τ, welche für alle t des Intervalles $0 < t < \infty$ die Ungleichung

$$|\Phi(t + \tau) - \Phi(t)| \leqq \varepsilon$$

erfüllt.

Es ist leicht zu zeigen, *daß eine solche „auf $0 < t < \infty$ fastperiodische" Funktion $\Phi(t)$ zu einer gewöhnlichen (d. h. im Sinne der Def. 1) fastperiodischen Funktion $F(t)$ erweitert werden kann*, und zwar nur in einer Weise, da nach I, S. 56 zwei fastperiodische Funktionen $F_1(t)$ und $F_2(t)$, welche für $t > 0$ übereinstimmen, überhaupt identisch sind. In der Tat, wenn die Zahlenfolge

$$\varepsilon_1 > \varepsilon_2 \ldots > \varepsilon_n \ldots \qquad (\varepsilon_n \to 0)$$

beliebig gewählt wird und

$$\tau_1 = \tau_1(\varepsilon_1), \quad \tau_2 = \tau_2(\varepsilon_2), \ldots, \quad \tau_n = \tau_n(\varepsilon_n), \ldots$$

eine beliebige Folge von zu $\Phi(t)$ gehörigen (also eo ipso positiven) Verschiebungszahlen mit

$$\tau_1 < \tau_2 \ldots < \tau_n \ldots \qquad (\tau_n \to \infty)$$

bedeutet, kann die gewünschte fastperiodische Funktion $F(t)$ einfach durch die Limesgleichung

$$F(t) = \lim_{n \to \infty} \Phi(t + \tau_n)$$

bestimmt werden, wie die folgenden Überlegungen zeigen:

1. Die Funktion $F(t) = \lim \Phi(t + \tau_n)$ ist im ganzen Intervalle $-\infty < t < \infty$ definiert. Denn bei beliebigem festen t ist $t + \tau_n$ von einer gewissen Stelle ab, etwa für $n > N_0(t)$, positiv (also $\Phi(t + \tau_n)$ definiert), und für $n_2 > n_1 > N_0(t)$ ist

$$|\Phi(t + \tau_{n_1}) - \Phi(t + \tau_{n_2})|$$

$$\leqq |\Phi(t + \tau_{n_1} + \tau_{n_2}) - \Phi(t + \tau_{n_2})| + |\Phi(t + \tau_{n_1} + \tau_{n_2}) - \Phi(t + \tau_{n_1})| \leqq \varepsilon_{n_1} + \varepsilon_{n_2},$$

so daß $\Phi(t + \tau_n)$ bei festem t einem Grenzwerte $F(t)$ zustrebt.

2. Dieser Grenzwert $F(t) = \lim \Phi(t + \tau_n)$ fällt für positive t mit $\Phi(t)$ zusammen, weil für ein positives t die Ungleichung

$$|\Phi(t) - \Phi(t + \tau_n)| \leqq \varepsilon_n$$

sogar für alle n erfüllt ist.

3. Die Funktion $F(t)$ ist stetig in $-\infty < t < \infty$. Denn in jedem (nach links beschnittenen) Intervall $t > t_1$ sind die Funktionen der Folge $\Phi(t + \tau_n)$ alle von einer gewissen Stelle ab, nämlich für $n > N_0(t_1)$, definiert und stetig, und nach der (vgl. 1) für alle $n_2 > n_1 > N_0(t_1)$ und alle $t > t_1$ gültigen Ungleichung

$$|\Phi(t + \tau_{n_2}) - \Phi(t + \tau_{n_1})| \leqq \varepsilon_{n_1} + \varepsilon_{n_2}$$

findet die Limesgleichung $F(t) = \lim \Phi(t + \tau_n)$ gleichmäßig in $t > t_1$ statt.

4. Die Funktion $F(t)$ ist fastperiodisch in $-\infty < t < \infty$. Hierzu genügt es offenbar nach der der Definition 1 hinzugefügten Bemerkung zu zeigen, daß jedes positive τ, welches eine zu ε gehörige Verschiebungszahl der Funktion $\Phi(t)$ ist, auch eine zu ε gehörige Verschiebungszahl der Funktion $F(t)$ ist, also für alle t des ganzen Intervalles $-\infty < t < \infty$ der Ungleichung

$$|F(t + \tau) - F(t)| \leqq \varepsilon$$

genügt. Dies folgt aber sofort aus der bei jedem festen t gültigen Gleichung

$$|F(t + \tau) - F(t)| = |\lim_{n \to \infty} \{\Phi(t + \tau + \tau_n) - \Phi(t + \tau_n)\}|,$$

weil für alle $n > N_0(t)$ die Ungleichung

$$|\Phi(t + \tau_n + \tau) - \Phi(t + \tau_n)| \leqq \varepsilon$$

besteht.

§ 2.

Bemerkungen über fastperiodische Funktionen einer komplexen Variablen.

Den Untersuchungen der Abhandlung III wurde die folgende Definition zugrunde gelegt:

Definition 3. Eine in einem Streifen $\alpha < \sigma < \beta$ (reguläre) analytische Funktion $f(s) = f(\sigma + it)$ soll fastperiodisch in (α, β) heißen, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Länge $l = l(\varepsilon)$ gibt, so daß jedes Intervall $a < t < b$ der Länge l mindestens eine zu ε gehörige Verschiebungszahl $\tau = \tau(\varepsilon)$ enthält, d. h. eine Zahl τ, welche für alle s des ganzen Streifens $\alpha < \sigma < \beta$ die Ungleichung

$$|f(s + i\tau) - f(s)| \leqq \varepsilon$$

erfüllt.

Mit anderen Worten, auf jeder vertikalen Geraden $\Re(s) = \sigma$ des Streifens soll die Funktion $F_\sigma(t) = f(\sigma + it)$ eine fastperiodische Funktion der reellen Variablen t sein, und die Fastperiodizität soll auf den kontinuierlich vielen Geraden des Streifens „gleichartig" sein.

Ferner wurde in III von einer in $\alpha < \sigma < \beta$ analytischen Funktion gesagt, daß sie „in $[\alpha, \beta]$ fastperiodisch" ist, falls sie bei jedem $\delta > 0$ im Teilstreifen $\alpha + \delta < \sigma < \beta - \delta$ fastperiodisch ausfällt.

Jede in $[\alpha, \beta]$ fastperiodische Funktion $f(s)$ ist in $[\alpha, \beta]$, d. h. in jedem Teilstreifen, beschränkt (III, S. 252).

Beim Beweise des Satzes in § 3 wird der folgende Satz (III, S. 253) eine wichtige Rolle spielen:

Falls eine in $\alpha < \sigma < \beta$ analytische und beschränkte Funktion $f(s)$ auf einer einzigen Geraden $\sigma = \sigma_0$ des Streifens $\alpha < \sigma < \beta$ fastperiodisch ist, d. h. $f(\sigma_0 + it)$ eine fastperiodische Funktion der Ordinate t ist, so wird $f(s)$ von selbst eine in $[\alpha, \beta]$ fastperiodische Funktion von s sein.

§ 3.
Aufstellung und Beweis des Satzes.

Satz. *Es sei* $\varphi(s) = \varphi(\sigma + it)$ *im Halbstreifen* $\alpha < \sigma < \beta,\ 0 < t < \infty$ *analytisch und beschränkt,*

$$|\varphi(s)| \leqq K \qquad \text{für } \alpha < \sigma < \beta,\ 0 < t < \infty.$$

Ferner gebe es eine Zahl σ_0 *des Intervalles* $\alpha < \sigma < \beta$, *so daß die Funktion*

$$\Phi(t) = \varphi(\sigma_0 + it) \qquad (0 < t < \infty)$$

fastperiodisch auf $0 < t < \infty$ *ist* (Vgl. Def. 2). *Dann läßt sich* $\varphi(s)$ *über die reelle Achse hinaus zu einer im ganzen Streifen* $\alpha < \sigma < \beta,\ -\infty < t < \infty$ *regulären Funktion* $f(s)$ *analytisch fortsetzen. Und diese Funktion* $f(s)$ *ist beschränkt im ganzen Streifen, sogar mit derselben Schranke* K,

$$|f(s)| \leqq K \qquad \text{für } \alpha < \sigma < \beta,\ -\infty - t < \infty,$$

und ist fastperiodisch in $[\alpha, \beta]$.

Beweis. Zu einer beliebig gewählten Zahlenfolge

$$\varepsilon_1 > \varepsilon_2 \ldots > \varepsilon_n \ldots \qquad (\varepsilon_n \to 0)$$

wählen wir eine Folge von (eo ipso positiven) zu $\Phi(t) = \varphi(\sigma_0 + it)$ gehörigen Verschiebungszahlen

$$\tau_1 = \tau_1(\varepsilon_1),\quad \tau_2 = \tau_2(\varepsilon_2), \ldots,\quad \tau_n = \tau_n(\varepsilon_n), \ldots$$

mit

$$\tau_1 < \tau_2 \ldots < \tau_n \ldots \qquad (\tau_n \to \infty).$$

Ferner setzen wir

$$\varphi_n(s) = \varphi(s + i\tau_n) \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

wo also die Funktion $\varphi_n(s)$ im Halbstreifen $\alpha < \sigma < \beta,\ t > -\tau_n$ definiert ist.

Wir betrachten nunmehr, bei einem beliebigen festen $T > 0$, den Halbstreifen

$$H_T: \alpha < \sigma < \beta,\quad t > -T$$

und darin die Funktionenfolge

$$\varphi_n(s) \qquad (n = N,\ N+1,\ N+2, \ldots),$$

wo N so groß gewählt ist, daß $\tau_N > T$ ist. Die Funktionen $\varphi_n(s)$ $(n \geqq N)$ sind alle in H_T beschränkt mit der gemeinsamen Schranke K,

$$|\varphi_n(s)| \leqq K.$$

Ferner konvergieren sie für $n \to \infty$ auf der Halbgeraden $\sigma = \sigma_0$, $t > -T$, und zwar gegen die Funktion $F(t)$, welche im Sinne von § 1 die „Er-

weiterung" der auf $0 < t < \infty$ fastperiodischen Funktion $\Phi(t)$ darstellt; in der Tat gilt ja nach § 1 bei jedem reellen t die Limesgleichung

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(\sigma_0 + it) = \lim_{n\to\infty} \varphi(\sigma_0 + it + i\tau_n) = \lim_{n\to\infty} \Phi(t + \tau_n) = F(t).$$

Hieraus folgt aber nach einem klassischen Vitalischen Satze, daß die Funktionen $\varphi_n(s)$ $(n \geqq N)$ für $n \to \infty$ im ganzen Halbstreifen H_T konvergieren, und zwar gleichmäßig in jedem beschränkten abgeschlossenen Teilgebiet. Die Grenzfunktion $G_T(s) = \lim \varphi_n(s)$ ist analytisch und numerisch $\leqq K$ im ganzen Halbstreifen H_T, und sie fällt in $\alpha < \sigma < \beta$, $0 < t < \infty$ mit der gegebenen Funktion $\varphi(s)$ zusammen, weil sie auf der Halbgeraden $\sigma = \sigma_0$, $t > 0$ mit ihr übereinstimmt. Hiermit ist der Beweis erbracht. Denn

1. weil T beliebig groß gewählt werden kann, ist $\varphi(s)$ über den ganzen Streifen $\alpha < \sigma < \beta$, $-\infty < t < \infty$ analytisch fortsetzbar, und die entstandene Funktion $f(s)$ ist daselbst überall numerisch $\leqq K$, und

2. es ist die Funktion $f(s)$ fastperiodisch in $[\alpha, \beta]$, weil sie in $\alpha < \sigma < \beta$ beschränkt ist und auf einer Geraden fastperiodisch in t ausfällt, nämlich auf der Geraden $\sigma = \sigma_0$, wo ja $f(\sigma_0 + it) = F(t)$ ist.

Der Satz umfaßt als speziellen Fall einen vor mehreren Jahren von mir [1]) bewiesenen Satz über *Dirichlet*sche Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n s} \qquad (0 \leqq \lambda_1 < \lambda_2 \ldots; \quad \lambda_n \to \infty)$$

sowie eine neuerdings von *Rogosinski* [2]) gegebene Verallgemeinerung dieses Satzes. Dies ergibt sich leicht unter Benutzung der Tatsache (III, S. 255), daß eine in einer Halbebene gleichmäßig konvergente (oder nur gleichmäßig summierbare) *Dirichlet*sche Reihe durch ihre Summe eine fastperiodische Funktion darstellt.

---

[1]) Ein Satz über *Dirichlet*sche Reihen, Sitzungsber. der Münchener Akademie, 1913.

[2]) Ein Satz über *Dirichlet*sche Reihen, Math. Annalen, Bd. 92, 1924.

Über automorphe Funktionen in bezug auf Gruppen, die in der Ebene uneigentlich diskontinuierlich sind.

Von *Rudolf Fueter* in Zürich.

Im 35. Bande dieses Journals hat *Eisenstein* in seiner Arbeit „Genaue Untersuchung der unendlichen Doppelprodukte, aus welchen die elliptischen Funktionen als Quotienten zusammengesetzt sind" die absolute Konvergenz der Doppelsumme:

$$\sum_{(n,\,m)} \frac{1}{(am + bn + c + i(a'm + b'n + c'))^{\mu}},$$

wo i die imaginäre Einheit, a, a', b, b', c, c' reelle Zahlen, für alle $\mu > 2$ bewiesen. Dieses bedeutende Resultat ist später von *Weierstraß* aufgenommen und seiner Theorie der elliptischen Funktionen zugrunde gelegt worden.

Poincaré hat den *Eisenstein*schen Ansatz verallgemeinert und seiner Theorie der automorphen Funktionen, die zu in der Ebene eigentlich diskontinuierlichen Gruppen, sogenannten Polygongruppen, gehören, zugrunde gelegt, indem er seine Thetareihen einführte und deren Konvergenz bewies.

Im folgenden werde ich den *Eisenstein*schen Ansatz in neuer Weise verallgemeinern, indem ich nach *Poincarés* Vorgang Thetareihen aufstelle, die zu Gruppen gehören, die in der Ebene uneigentlich diskontinuierlich sind. Von diesen hat *Poincaré* gezeigt, daß sie im Raume einen Diskontinuitätsbereich besitzen, der ein von Ebenen und Kugelschalen begrenztes Polyeder ist. Es ist klar, daß solche Funktionen nicht von einer komplexen Variablen abhängen. Dagegen gelingt ihre Aufstellung überraschend einfach, wenn die *Hamiltonschen Quaternionen* eingeführt werden, und als Variable eine *reduzierte Quaternionenvariable* benutzt wird, deren Träger ein Raumpunkt ist. Als erste und zweite Einheit derselben wählt man die gewöhnlichen Einheiten 1, i der komplexen Zahlen, und in diesen werden auch die Koeffizienten der gegebenen uneigentlich diskontinuierlichen Gruppe linearer Substitutionen gegeben. Eine solche lineare Substitution der reduzierten Quaternionenvariablen führt nun den Raum genau in der von *Poincaré* angegebenen Weise in sich über. Dabei gehen Kugeln wieder in Kugeln über, ebenso die eine Koordinatenebene in sich selbst. Diese invariante Ebene kann aber auch durch eine lineare Substitution mit Quaternionenkoeffizienten in die Einheitskugel übergeführt werden. Dadurch wird eine

zu der gegebenen Gruppe holoedrisch isomorphe Gruppe von Quaternionensubstitutionen gefunden, die die Einheitskugel in sich, und ebenso ihr Inneres, resp. ihr Äußeres in sich überführt. Damit ist der Ansatz für die Thetareihen gegeben, deren Konvergenz genau nach *Poincaré* bewiesen werden kann [1]).

Ich führe die Entwicklung nur bis zur Aufstellung der automorphen Funktionen. Ich hoffe in einer späteren Arbeit auf deren Behandlung eingehen zu können. Dazu ist vor allem auch die Frage zu behandeln, was die Funktion einer Quaternionenvariablen ist? Diese ist bereits in verschiedenen Arbeiten von *Hausdorff* [2]), *Autonne* [3]) u. a. behandelt worden und macht eigene Schwierigkeiten. In meinem Falle ist vor allem auch die Art der Abbildung des Raumes in sich genauer zu studieren.

Die von mir studierten Quaternionensubstitutionen sind solche vom *Grenzkugeltypus*. Es erhebt sich die Frage, in welcher Weise die allgemeinen Quaternionensubstitutionen zu klassifizieren sind. Es ist dazu jedenfalls der vierdimensionale Raum nötig, den ich in meiner Arbeit vollständig beiseite lassen konnte [4]).

Ein weiteres Problem wird die Transformationstheorie sein, die die Frage nach der Quaternionenmultiplikation aufwirft.

In bezug auf das Rechnen mit Quaternionen verweise ich auf die ausgezeichneten „Vorlesungen über die Zahlentheorie der Quaternionen" von *A. Hurwitz* (Berlin 1919, Springer). Im allgemeinen halte ich mich an seine Darstellung.

Im ersten Paragraphen bringe ich die Theorie der linearen Quaternionensubstitutionen, soweit ich sie nachher gebrauche; im zweiten Paragraphen stelle ich die Thetareihen auf und gebe die automorphen Funktionen an.

§ 1. Gruppen von Quaternionensubstitutionen.

Es seien $i_0 = 1, i_1 = i, i_2, i_3$ die vier Quaternioneneinheiten. Für sie gelten die Relationen:

$$i_1^2 = i_2^2 = i_3^2 = -1,$$

$$i_1 . i_2 = i_3, \quad i_2 . i_3 = i_1, \quad i_3 . i_1 = i_2, \quad i_2 . i_1 = -i_3, \quad i_3 . i_2 = -i_1, \quad i_1 . i_3 = -i_2.$$

Quaternionen sollen stets in der Form:

$$a = a_0 + a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_3 i_3, \quad b = b_0 + b_1 i_1 + b_2 i_2 + b_3 i_3, \ldots$$

dargestellt werden. Die *Quaternionenvariable* sei:

$$z = x_0 + x_1 i_1 + x_2 i_2 + x_3 i_3 .$$

Konjugierte Quaternionen werden durch einen Strich bezeichnet; z. B.

$$\bar{z} = x_0 - x_1 i_1 - x_2 i_2 - x_3 i_3 .$$

---

[1]) Siehe meine Note: Sur les groupes improprement discontinus. Comptes rendus, académie des sciences, Paris, t. 182, p. 432, 1926.

[2]) *F. Hausdorff:* Zur Theorie der Systeme complexer Zahlen. Ber. Kgl. Sächs. Ges., Bd. 52, pg. 43.

[3]) *L. Autonne:* Sur les propriétés qui, pour les fonctions d'une variable hypercomplexe, correspondent à la monogénéité. J. de math. p. et appl. 1907, (6), t. 3., pg. 53.

[4]) Siehe zu diesen Fragen den ausgezeichneten Artikel von *E. Cartan* in Encyclopédie des sc. math. T. I., vol. 1, fasc. 3: *Study-Cartan, Nombres complexes.*

Wenn $x_3 = 0$ ist, so heiße z *reduziert.* z ist dann durch einen Punkt des dreidimensionalen Raumes gegeben. Im allgemeinen werde ich mich im folgenden auf diesen Fall beschränken.

Sind A, C reelle Konstanten, B ein *Quaternion*, so ist jede Hyperkugel gegeben durch:

$$Az\bar{z} + Bz + \bar{z}\overline{B} + C = 0.$$

In der Tat drückt diese Gleichung die Relation aus:

$$A(x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2B_0x_0 - 2B_1x_1 - 2B_2x_2 - 2B_3x_3 + C = 0.$$

Ist z reduziert, so ist die Kugel dreidimensional [1]).

Jede Zahl der Form $a_0 + a_1 i_1$ heiße *komplexe Zahl.* Denn sie kann als eine gewöhnliche komplexe Zahl aufgefaßt werden. Man kann dann für i_1 auch i schreiben. Wir betrachten eine beliebige lineare Substitution *komplexer* Koeffizienten:

$$S = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, \quad \text{wo } \alpha\delta - \beta\gamma = 1 \text{ ist.}$$

Setzt man $\alpha = a_0 + a_1 i_1$, $\beta = b_0 + b_1 i_1$, $\gamma = c_0 + c_1 i_1$, $\delta = d_0 + d_1 i_1$, so muß demnach:

$$\begin{aligned} a_0 d_0 - a_1 d_1 - b_0 c_0 + b_1 c_1 &= 1\,, \\ a_0 d_1 + a_1 d_0 - b_0 c_1 - b_1 c_0 &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

sein. Wir wenden S auf die Quaternionenvariable z an und nennen zwei Punkte z und ζ ähnlich, wenn:

$$\zeta = Sz = (\alpha z + \beta)(\gamma z + \delta)^{-1} \tag{2}$$

ist. Statt (2) können wir auch schreiben:

$$\zeta = Sz = (z\gamma + \delta)^{-1}(z\alpha + \beta). \tag{3}$$

Denn es ist wegen (1), und weil die komplexen Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ unter sich vertauschbar sind:

$$\begin{aligned} (z\alpha + \beta)(\gamma z + \delta) &= z\alpha\gamma z + \beta\gamma z + z\alpha\delta + \beta\delta = z\alpha\gamma z + \alpha\delta z - z + z\beta\gamma + z + \beta\delta \\ &= (z\gamma + \delta)(\alpha z + \beta). \end{aligned}$$

Daraus folgt:

1. Satz: *Wenn ein erster Punkt einem zweiten ähnlich ist, so ist auch der zweite dem ersten ähnlich.*

Denn aus (2) folgt:

$$\begin{aligned} \zeta(\gamma z + \delta) = \zeta\gamma z + \zeta\delta &= \alpha z + \beta\,, \quad \text{oder:} \\ (\zeta\gamma - \alpha)z &= -\zeta\delta + \beta, \quad \text{d. h.:} \\ z &= (\zeta\gamma - \alpha)^{-1}(-\zeta\delta + \beta)\,. \end{aligned}$$

Wegen (3) kann die letzte Beziehung auch so geschrieben werden:

$$z = S^{-1}\zeta = (-\delta\zeta + \beta)(\gamma\zeta - \alpha)^{-1}.$$

Dies ist die inverse Substitution. Die Zusammensetzung zweier Substitutionen S_1 und S_2 einer Quaternionenvariablen z ergibt wieder eine Substitution

[1]) *W. R. Hamilton:* Lectures on quaternions. Dublin, 1853, pg. 400.

von z. Das Gesetz der Zusammensetzung ist das bekannte:

$$\zeta' = S_1 z = (\alpha_1 z + \beta_1)(\gamma_1 z + \delta_1)^{-1}, \qquad \zeta = S_2 \zeta' = (\alpha_2 \zeta' + \beta_2)(\gamma_2 \zeta' + \delta_2)^{-1},$$

$$\zeta = S_2 S_1 z = (\alpha_2 (\alpha_1 z + \beta_1)(\gamma_1 z + \delta_1)^{-1} + \beta_2)(\gamma_2 (\alpha_1 z + \beta_1)(\gamma_1 z + \delta_1)^{-1} + \delta_2)^{-1}$$
$$= (\alpha z + \beta)(\gamma z + \delta)^{-1}, \quad \text{wo:}$$

$$(4) \qquad \alpha = \alpha_2 \alpha_1 + \beta_2 \gamma_1, \quad \beta = \alpha_2 \beta_1 + \beta_2 \delta_1, \quad \gamma = \gamma_2 \alpha_1 + \delta_2 \gamma_1, \quad \delta = \gamma_2 \beta_1 + \delta_2 \delta_1.$$

Es gilt der

2. Satz: *Durch* (2) *gehen Kugeln wieder in Kugeln über.*

Dabei werden Ebenen als ausgeartete Kugeln angesehen.

Setzt man nämlich (2) in der Gleichung einer Kugel ein, so wird:

$$(A\alpha\bar{\alpha} + B\alpha\bar{\gamma} + \gamma\bar{\alpha}\overline{B} + C\gamma\bar{\gamma}) z\bar{z} + A\alpha z\bar{\beta} + A\beta\bar{z}\bar{\alpha} + B\alpha z\bar{\delta} + \delta\bar{z}\bar{\alpha}\overline{B} + C\gamma z\bar{\delta}$$
$$+ C\delta\bar{z}\bar{\gamma} + B\beta\bar{z}\bar{\gamma} + \gamma z\overline{\beta B} + (A\beta\bar{\beta} + B\beta\bar{\delta} + \delta\overline{\beta B} + C\delta\bar{\delta}) = 0.$$

A und C sind als reelle Konstanten vertauschbar mit allen Zahlen. Nennt man die Summe eines Quaternions und seines Konjugierten die *Spur* des Quaternions, so ist dieselbe, genommen für ein Produkt von zwei Quaternionen, von der Reihenfolge unabhängig. Die Spur $S(abc..)$ des Produktes $abc...$ ändert sich daher nicht, wenn man die $a, b, c, d, ...$ zyklisch vertauscht:

$$S(abc...mn) = S(nabc...m) = S(bc...mna).$$

Somit kann man die obige Gleichung auch so schreiben:

$$A' z\bar{z} + B' z + \bar{z}\overline{B'} + C' = 0, \qquad \text{wo:}$$

$$A' = A\alpha\bar{\alpha} + B\alpha\bar{\gamma} + \gamma\bar{\alpha}\overline{B} + C\gamma\bar{\gamma},$$
$$B' = A\overline{\beta}\alpha + C\bar{\delta}\gamma + \bar{\delta}B\alpha + \overline{\beta}\overline{B}\gamma,$$
$$C' = A\beta\bar{\beta} + B\beta\bar{\delta} + \delta\overline{\beta B} + C\delta\bar{\delta}.$$

A' und C' sind wieder reell, also ist die Gleichung diejenige einer Kugel.

3. Satz: *Bei jeder Substitution* (2) *geht die $x_0 x_1$-Ebene, der obere und der untere Halbraum je in sich über.*

Setzt man nämlich:

$$\zeta = \xi_0 + \xi_1 i_1 + \xi_2 i_2 + \xi_3 i_3 = (\alpha z + \beta)(\gamma z + \delta)^{-1},$$

so zeigt die Rechnung [1]), daß:

$$\xi_2 = \frac{x_2}{n(\gamma z + \delta)}, \qquad \xi_3 = \frac{x_3}{n(\gamma z + \delta)};$$

wo $n(\gamma z + \delta)$ das Produkt von $\gamma z + \delta$ und seiner Konjugierten bedeutet und die *Norm des Quaternions* heißt. Die beiden Formeln zeigen, daß x_2 und ξ_2, x_3 und ξ_3 dasselbe Vorzeichen haben. Ist die Quaternionenvariable *reduziert*, so ist $x_3 = 0$, also auch $\xi_3 = 0$. (2) führt also tatsächlich den dreidimensionalen Raum wieder in den dreidimensionalen Raum über.

---

[1]) Siehe die Züricher Dissertation: *H. Jecklin:* Deutung der Gruppen linearer unimodularer Substitutionen etc. Zürich, 1926.

4. Satz: *Durch* (2) *wird der dreidimensionale Raum wieder in den dreidimensionalen Raum übergeführt, falls die Quaternionenvariable reduziert ist.*

Dies ist der Grund, warum man sich auf die reduzierte Quaternionenvariable beschränken kann. Wir werden dies von nun an tun.

Wir betrachten jetzt allgemeine Quaternionensubstitutionen:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \mathsf{A} & \mathsf{B} \\ \Gamma & \Delta \end{pmatrix},$$

wo $\mathsf{A}, \mathsf{B}, \Gamma, \Delta$ beliebige Quaternionen sind. Die Bedingung $\mathsf{A}\Delta - \mathsf{B}\Gamma = 1$ hat hier keine Bedeutung und fällt weg. Durch:

$$\zeta = (\mathsf{A}z + \mathsf{B})(\Gamma z + \Delta)^{-1}$$

geht wieder jede Kugel in eine Kugel über, der 2. Satz gilt daher wieder und wird gleich wie oben bewiesen, Machen wir die Annahme, daß alle $\mathsf{A}, \mathsf{B}, \Gamma, \Delta$ vertauschbar sind, und $\mathsf{A}\Delta - \mathsf{B}\Gamma$ eine reelle Größe ist, so gilt auch der Beweis der Formel (3), und daher auch der 1. Satz. Die inverse Substitution existiert dann. Allein diese Bedingungen sind nicht notwendig für die Existenz der inversen Substitution, wie das folgende Beispiel zeigen wird.

Wir nehmen:

$$s = \begin{pmatrix} 1 & i_2 \\ i_2 & 1 \end{pmatrix},$$

wo alle Koeffizienten untereinander vertauschbar sind und $1 \cdot 1 - i_2 \cdot i_2 = 2$ reell ist. Somit ist nach dem eben bewiesenen:

$$\zeta = sz = (zi_2 + 1)^{-1}(z + i_2) = (z + i_2)(i_2 z + 1)^{-1}$$

und die Inverse existiert:

$$z = s^{-1}\zeta = (\zeta - i_2)(-i_2\zeta + 1)^{-1} = (\zeta i_2 - 1)^{-1}(-\zeta + i_2).$$

Es sei $S = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ eine beliebige unimodulare Substitution mit *komplexen* Koeffizienten, so wie wir sie im ersten Teil dieses Paragraphen betrachtet haben. Man bilde:

$$s' = s^{-1}Ss = \begin{pmatrix} \alpha + \bar{\delta} + (\beta - \bar{\gamma})i_2 & \beta + \bar{\gamma} + (\alpha - \bar{\delta})i_2 \\ \bar{\beta} + \gamma + (-\bar{\alpha} + \delta)i_2 & \bar{\alpha} + \delta + (-\bar{\beta} + \gamma)i_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \\ \gamma' & \delta' \end{pmatrix}.$$

Wir setzen jetzt voraus, daß S alle Substitutionen einer in der x_0x_1-Ebene uneigentlich diskontinuierlichen Gruppe $\mathfrak{G}$ durchläuft. Alle zugehörigen s' bilden dann eine zu $\mathfrak{G}$ holoedrisch isomorphe Gruppe $\mathfrak{G}'$. Nimmt man statt S die inverse S^{-1}, so geht auch s' in seine inverse Substitution s'^{-1} über:

$$s'^{-1} = s^{-1}S^{-1}s = \begin{pmatrix} \bar{\alpha} + \delta + (-\beta + \bar{\gamma})i_2 & -\beta - \bar{\gamma} + (-\bar{\alpha} + \delta)i_2 \\ -\bar{\beta} - \gamma + (\alpha - \bar{\delta})i_2 & \alpha + \bar{\delta} + (\bar{\beta} - \gamma)i_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha'' & \beta'' \\ \gamma'' & \delta'' \end{pmatrix}.$$

Auf die Quaternionenvariablen z (reduziert) angewandt bedeutet dies, daß:

$$\zeta = s'z = (\alpha' z + \beta')(\gamma' z + \delta')^{-1},$$
$$z = s'^{-1}\zeta = (\alpha''\zeta + \beta'')(\gamma''\zeta + \delta'')^{-1}.$$

Hier sind die $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$ nicht mehr vertauschbar, und doch existiert die inverse Substitution.

Durch s wird die Einheitskugel:

$$z\bar{z} - 1 = 0$$

in die x_0x_1-Ebene übergeführt. Denn setzt man in ihrer Gleichung

$$z = s^{-1}\zeta = (\zeta - i_2)(-i_2\zeta + 1)^{-1}$$

ein, so wird:

$$2i_2\zeta - 2\bar{\zeta}i_2 = 0,$$

was die Gleichung der $\xi_0\xi_1 = x_0x_1$-Ebene ist.

Nun wird aber durch jedes S die x_0x_1-Ebene in sich übergeführt und durch s'^{-1} die x_0x_1-Ebene wieder in die Einheitskugel übergeführt. Somit wird jedes s' die Einheitskugel in sich überführen.

5. Satz: *Durchläuft S alle Substitutionen einer uneigentlich diskontinuierlichen Gruppe $\mathfrak{G}$, so bilden alle zugehörigen Substitutionen s' eine zu $\mathfrak{G}$ holoedrisch isomorphe Gruppe $\mathfrak{G}'$ von Quaternionensubstitutionen, die alle die Einheitskugel in sich überführen.*

Es ist bemerkenswert, daß *für alle s' wieder der Satz 4 gilt*, daß also wieder der dreidimensionale Raum in den dreidimensionalen Raum übergeführt wird, falls, wie jetzt immer vorausgesetzt wird, z reduziert ist. Es ist nämlich:

$$\zeta = sz = \frac{2x_0 + 2x_1i_1 + (1 - z\bar{z})i_2}{z\bar{z} + i_2z - \bar{z}i_2 + 1},$$

wo der Nenner reell ist, und der Zähler in der Tat die vierte Einheit nicht enthält. Dasselbe findet bei s^{-1} und S statt, also muß auch s' den dreidimensionalen Raum in einen solchen überführen.

Da s'^{-1} die Inverse von s' ist, so müssen zwischen den $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$ und den $\alpha'', \beta'', \gamma'', \delta''$ Relationen existieren, die man erhält, wenn man z aus $\zeta = s'z$ direkt ausrechnet und gleich $z = s'^{-1}\zeta$ setzt:

$$(5)\qquad \begin{matrix}\alpha'\beta'' + \beta'\delta'' = 0,\\ \gamma'\alpha'' + \delta'\gamma'' = 0,\end{matrix}\quad (\alpha'\alpha'' + \beta'\gamma'')z = z(\gamma'\beta'' + \delta'\delta'').$$

Die letzte Gleichung muß für alle z erfüllt sein. Da s' invers zu s'^{-1} ist, muß auch:

$$(6)\qquad \begin{matrix}\alpha''\beta' + \beta''\delta' = 0,\\ \gamma''\alpha' + \delta''\gamma' = 0,\end{matrix}\quad (\alpha''\alpha' + \beta''\gamma')z = z(\gamma''\beta' + \delta''\delta'),$$

sein. Setzt man in den beiden letzten Gleichungen von (5) und (6) für z die Einheiten $1, i_1, i_2, i_3$ ein, so folgt sofort, daß alle Koeffizienten von z reell und, wie die Ausrechnung ergibt, gleich sein müssen:

$$\alpha'\alpha'' + \beta'\gamma'' = \gamma'\beta'' + \delta'\delta'' = \alpha''\alpha' + \beta''\gamma' = \gamma''\beta' + \delta''\delta' = n,$$

wo n reell ist. Man kann jetzt $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$ immer so normieren, daß $n = 1$ wird [1]). In unserem Falle ist $n = 4$, man hat also nur alle $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$ durch 2 zu dividieren.

---

[1]) $n = 0$ würde aussagen, daß $s'z$ ein konstantes Quaternion wäre.

Die so erhaltene Relation spielt dann die Rolle von $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ in der Theorie der komplexen Substitutionen und geht auch in diesem Falle in diese Relation über. Ist $n = 1$, so heiße auch die *Quaternionensubstitution unimodular*. Werden zwei unimodulare Substitutionen nach (4) zusammengesetzt, so ist die neue Substitution wieder unimodular.

Die Existenz der inversen Substitution ist für jede Quaternionensubstitution gewährleistet, wenn wir nur voraussetzen, daß dieselbe eine Kugel in sich selbst überführt. Ich beschränke mich hier auf den uns einzig interessierenden Fall, daß die Kugel die Einheitskugel:

$$z\bar{z} - 1 = 0$$

sei. Ist nämlich s' eine ganz beliebige Substitution von Quaternionenkoeffizienten:

$$\zeta = s'z = (\alpha' z + \beta')(\gamma' z + \delta')^{-1},$$

so ergibt sich durch Ausrechnung:

$$z = (-\zeta\gamma' + \alpha')^{-1}(\zeta\delta' - \beta').$$

Nimmt man hier beiderseits die Konjugierte, so wird:

$$\bar{z} = (\bar{\delta}'\bar{\zeta} - \bar{\beta}')(-\bar{\gamma}'\bar{\zeta} + \bar{\alpha}')^{-1}.$$

Nun soll aber jedem Punkt z der Einheitskugel: $z\bar{z} = 1$ wieder ein Punkt der Einheitskugel ζ, für den $\zeta\bar{\zeta} = 1$ ist, entsprechen. Also läßt sich für alle Punkte der Einheitskugel z die vorige Gleichung auch so schreiben:

$$z = (\bar{\alpha}'\zeta - \bar{\gamma}')(-\bar{\beta}'\zeta + \bar{\delta}')^{-1}.$$

Wir können also setzen:

$$\alpha'' = \bar{\alpha}',\ \beta'' = -\bar{\gamma}',\ \gamma'' = -\bar{\beta}',\ \delta'' = \bar{\delta}'.$$

Diese Relationen sind in der Tat für unsere obigen Substitutionen s' und s'^{-1} erfüllt. Die Gleichungen, die zwischen den einmal und zweimal gestrichenen Koeffizienten existieren, lauten jetzt so, wie eine einfache Rechnung zeigt:

$$\begin{aligned}
-\alpha'\bar{\gamma}' + \beta'\bar{\delta}' &= 0,\\
-\gamma'\bar{\alpha}' + \delta'\bar{\beta}' &= 0,\\
\bar{\alpha}'\beta' - \bar{\gamma}'\delta' &= 0,\\
\bar{\beta}'\alpha' - \bar{\delta}'\gamma' &= 0,\\
\alpha'\bar{\alpha}' = \delta'\bar{\delta}',\ \beta'\bar{\beta}' &= \gamma'\bar{\gamma}',
\end{aligned} \tag{7}$$

und die Bedingung, daß sie unimodular sind, heißt:

$$\alpha'\bar{\alpha}' - \beta'\bar{\beta}' = 1. \tag{8}$$

Auf z angewandt lauten die Relationen jetzt so:

$$\begin{aligned}
\zeta = s'z &= (\alpha' z + \beta')(\gamma' z + \delta')^{-1} = (z\bar{\beta}' + \bar{\alpha}')^{-1}(z\bar{\delta}' + \bar{\gamma}')\\
z = s'^{-1}\zeta &= (\bar{\alpha}'\zeta - \bar{\gamma}')(-\bar{\beta}'\zeta + \bar{\delta}')^{-1} = (-\zeta\gamma' + \alpha')^{-1}(\zeta\delta' - \beta').
\end{aligned} \tag{9}$$

Kehren wir nochmals zu den komplexen Substitutionen S zurück und betrachten:

$$\zeta = Sz = (\alpha z + \beta)(\gamma z + \delta)^{-1}.$$

Diese Abbildung des Raumes in sich ist genau diejenige, die von *Poincaré* in seiner Theorie der *Klein*schen Gruppen angegeben worden ist [1]). Setzt man nämlich:

$$z = x_0 + x_1 i_1 + x_2 i_2, \qquad \zeta = \xi_0 + \xi_1 i_1 + \xi_2 i_2,$$

so bestehen zwischen den x und ξ die Beziehungen:

$$\xi_0 = \frac{(a_0c_0 + a_1c_1)z\bar{z} + (a_0d_0 + a_1d_1 + b_0c_0 + b_1c_1)x_0 + (-a_1d_0 + a_0d_1 - b_0c_1 + b_1c_0)x_1 + (b_0d_0 + b_1d_1)}{\gamma\bar{\gamma}z\bar{z} + \bar{\delta}\gamma z + \bar{z}\bar{\gamma}\delta + \delta\bar{\delta}},$$

$$\xi_1 = \frac{(a_1c_0 - a_0c_1)z\bar{z} + (b_1c_0 - b_0c_1 - a_0d_1 + a_1d_0)x_0 + (a_1d_1 + a_0d_0 - b_0c_0 - b_1c_1)x_1 + (b_1d_0 - b_0d_1)}{\gamma\bar{\gamma}z\bar{z} + \bar{\delta}\gamma z + \bar{z}\bar{\gamma}\delta + \delta\bar{\delta}},$$

$$\xi_2 = \frac{x_2}{\gamma\bar{\gamma}z\bar{z} + \bar{\delta}\gamma z + \bar{z}\bar{\gamma}\delta + \delta\bar{\delta}}.$$

Um dieselben zu berechnen, beachtet man zuerst, daß:

$$az + \beta = (a_0x_0 - a_1x_1 + b_0) + (a_0x_1 + a_1x_0 + b_1)i_1 + a_0x_2i_2 + a_1x_2i_3$$

ist. Ferner ist:

$$n(\gamma z + \delta) = \gamma\bar{\gamma}z\bar{z} + \bar{\delta}\gamma z + \bar{z}\bar{\gamma}\delta + \delta\bar{\delta},$$
$$(az + \beta)(\bar{z}\bar{\gamma} + \bar{\delta}) = a\bar{\gamma}z\bar{z} + az\bar{\delta} + \beta\bar{z}\bar{\gamma} + \beta\bar{\delta},$$

und schließlich hat man die Gleichungen (1) zu beachten. Die gefundenen Gleichungen sind aber genau die von *Poincaré* [2]) angegebenen Formeln. Somit besitzt die Gruppe $\mathfrak{G}$ einen *Diskontinuitätsraum*, der über der x_0x_1-Ebene liegt. Derselbe ist, wie z. B. im Falle der *Picardschen Gruppe* gezeigt wird, durch Ebenen und Kugelschalen begrenzt. Bilden wir diesen Diskontinuitätsraum durch s^{-1} ab, so bekommen wir den *Diskontinuitätsraum der Gruppe* $\mathfrak{G}'$, der mit R_0 bezeichnet werde. R_0 liegt im Innern der Einheitskugel. Denn ist ζ ein Punkt über der x_0x_1-Ebene und z der entsprechende Punkt, also:

$$z = s^{-1}\zeta, \quad \text{oder} \quad \zeta = sz,$$

so ist:

$$\zeta = \xi_0 + \xi_1 i_1 + \xi_2 i_2 = sz = (z + i_2)(+ i_2 z + 1),$$

oder wenn $z = x_0 + x_1 i_1 + x_2 i_2$ gesetzt wird:

$$\xi_0 = \frac{2x_0}{z\bar{z} + i_2 z - \bar{z}i_2 + 1},$$

$$\xi_1 = \frac{2x_1}{z\bar{z} + i_2 z - \bar{z}i_2 + 1},$$

$$\xi_2 = \frac{(1 - z\bar{z})}{z\bar{z} + i_2 z - \bar{z}i_2 + 1}.$$

Daraus erkennt man, daß $z\bar{z} < 1$ sein muß, damit ξ_2 positiv ist, oder damit der Punkt ζ im obern Halbraum liegt.

Aus dem Beweise ersieht man wegen Satz 3 zugleich, daß jede Substitution s' das Innere der Einheitskugel und ebenso das Äußere für sich in sich selbst überführt.

---

[1]) *H. Poincaré:* Oeuvres, t. II., pg. 258 u. ff., Paris 1916.
[2]) *H. Poincaré:* Oeuvres, t. II., pg. 263, Paris 1916.

6. Satz: *Jede Substitution s' der Gruppe $\mathfrak{G}'$ führt das Innere der Einheitskugel, sie selbst, sowie ihr Äußeres einzeln in sich selbst über.*

Wendet man somit auf alle Punkte von R_0 die einzelnen Substitutionen s_i' von $\mathfrak{G}'$ an, so erhält man lauter Räume R_i, die alle im Innern der Einheitskugel liegen, sich nirgends überdecken und im allgemeinen die ganze Einheitskugel ausfüllen werden. Die Einheitskugel heißt daher die *Grenzkugel oder Hauptkugel von* $\mathfrak{G}'$.

Wir werden uns im folgenden Paragraphen nur noch mit der so erhaltenen Gruppe $\mathfrak{G}'$ beschäftigen. Wir lassen daher im allgemeinen den Strich weg, ebenso bei ihren Substitutionen s_i. Von der so existierenden Gruppe $\mathfrak{G}$ können wir das Folgende aussagen:

7. Satz: *Die Gruppe $\mathfrak{G}$ besteht aus lauter unimodularen Quaternionensubstitutionen s_i, die das Innere der Einheitskugel, diese selbst, sowie ihr Äußeres in sich selbst überführen. $\mathfrak{G}$ besitzt im Innern der Einheitskugel einen von Kugelschalen begrenzten Diskontinuitätsraum R_0, dessen durch die Substitutionen s_i vermittelte Abbildungen R_i daher ebenfalls im Innern der Kugel liegen und sich nirgends überdecken.*

Die einzelnen s_i befriedigen die Gleichungen (7), (8) und (9), in denen nur der Strich wegzulassen ist, und dafür der Index i an alle Koeffizienten anzubringen ist.

§ 2. Die Thetafunktionen und die automorphen Funktionen.

Ich betrachte die unendlichen Summen:

$$\Sigma = \sum_{(i)} n\,(\gamma_i z + \delta_i)^{-k} \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$

genommen über alle Substitutionen $s_i = \begin{pmatrix} \alpha_i & \beta_i \\ \gamma_i & \delta_i \end{pmatrix}$ der im 7. Satz angegebenen Gruppe $\mathfrak{G}$. Um die Konvergenz von Σ in der Einheitskugel zu untersuchen, bedenken wir zunächst, daß keiner der Punkte $z = -\gamma_i^{-1}\delta_i$ in der Einheitskugel liegt. Denn diesen Punkten ist der Punkt $z = \infty$, der außerhalb der Einheitskugel liegt, ähnlich. Kein Punkt außerhalb der Einheitskugel ist aber einem Punkte in ihrem Innern ähnlich. Die Punkte $-\gamma_i^{-1}\delta_i$ sind, wie man durch Einsetzen ihrer auf S. 70 angegebenen Werte erkennt, Punkte des dreidimensionalen Raumes. Wäre ferner $\gamma_i = 0$, so müßte das zugehörige s die Form haben:

$$s = \begin{pmatrix} a + \beta i_2 & 0 \\ 0 & \bar{a} - \bar{\beta} i_2 \end{pmatrix}, \quad \text{wo } a\bar{a} + \beta\bar{\beta} = 1 \text{ wäre.}$$

Hier sind a, β wieder komplexe Zahlen, wie sie im früheren S auftraten. Man sieht dies sofort aus den Definitionsgleichungen von s' auf S. 70. Da somit die absoluten Beträge von a und β beschränkt sind, gibt es nur endlich viele s, für die $\gamma_i = 0$ ist. Denn sonst müßte $\mathfrak{G}$ eine infinitesimale Substitution enthalten, also kontinuierlich sein, gegen Annahme. Die endlichen vielen Glieder von Σ, in denen $\gamma^i = 0$ ist, kommen aber für die Konvergenz nicht in Betracht. Wir dürfen also im folgenden stets $\gamma_i \neq 0$ voraussetzen.

Es sei z irgendein innerer Punkt des Diskontinuitätsraumes R_0 von $\mathfrak{G}$. Man lege um z eine Kugel K_0 von so kleinem Radius ϱ, daß dieselbe ganz im Innern vonR_0 liege. Durch s geht dann K_0 in eine ganz in R_i liegende Kugel K_i über. Es sei M_i der größte Wert, den $n(\gamma_i z + \delta_i)$ in K_0 annehmen kann; m_i der kleinste Wert in K_0. $n(z + \gamma_i^{-1}\delta_i)$ ist das Quadrat der Entfernung des Punktes z von dem Punkte $-\gamma_i^{-1}\delta_i$. Es sei a_i der größte, b_i der kleinste Wert, den diese Entfernung annehmen kann, wenn z irgendein Punkt von K_0 ist. Da z im Innern der Einheitskugel liegt, $-\gamma_i^{-1}\delta_i$ aber im Äußern, so ist $b_i > 0$. Da $\gamma_i \neq 0$ ist, ist a_i endlich. Daher ist:

$$\frac{M_i}{m_i} = \frac{a_i^2}{b_i^2}.$$

Ist schließlich A der größte, B der kleinste Abstand eines Punktes von K_0 vom Nullpunkte, so ist sicherlich:

$$b_i > 1 - A.$$

Da $a_i - b_i = A - B$ der Durchmesser der Kugel K_0 ist, so wird:

$$\frac{a_i}{b_i} = 1 + \frac{a_i - b_i}{b_i} = 1 + \frac{A - B}{b_i} < 1 + \frac{A - B}{1 - A} = \frac{1 - B}{1 - A} = \varkappa.$$

$\varkappa$ ist nicht mehr von i abhängig. Aus beiden Ungleichungen folgt:

$$\frac{M_i}{m_i} < \varkappa^2. \tag{10}$$

Wir wollen mit K_i zugleich den Rauminhalt der Kugel K_i bezeichnen. Dann ist:

$$K_0 = \int_{(K_0)} dx_0\, dx_1\, dx_2, \qquad K_i = \int_{(K_0)} D\, dx_0\, dx_1\, dx_2,$$

wo D die *Jacobi*sche Funktionaldeterminante ist. Um dieselbe zu berechnen, bedenken wir, daß die Gleichung von K_0 so lautet:

$$(Z - z)(\overline{Z} - \bar{z}) - \varrho^2 = 0,$$

wo Z die laufende Koordinate ist.

Diese Kugel gehe durch s in die zweite Kugel K über, deren Gleichung:

$$A\,\mathsf{Z}\overline{\mathsf{Z}} + B\mathsf{Z} + \overline{\mathsf{Z}}\overline{B} + C = 0,\ \mathsf{Z} = sZ,$$

sei, wo A, C reell sind. Da $A \neq 0$ sein muß, kann man diese Gleichung auch so schreiben:

$$\left(\mathsf{Z} + \frac{\overline{B}}{A}\right)\left(\overline{\mathsf{Z}} + \frac{B}{A}\right) - \left(\frac{B\overline{B}}{AA} - \frac{C}{A}\right) = 0.$$

Man sieht daraus, daß der Radius R von K den Wert hat:

$$\mathsf{P}^2 = \frac{B\overline{B}}{AA} - \frac{C}{A}.$$

A, B, C kann man aber leicht berechnen, wenn man in der Gleichung von K_0 für Z den Wert $s^{-1}\,\mathsf{Z}$ einsetzt. Die erhaltene Gleichung lautet:

$$Z = s^{-1}\,\mathsf{Z} = (\bar{\alpha}\mathsf{Z} - \bar{\gamma})\,(-\bar{\beta}\mathsf{Z} + \bar{\delta})^{-1},$$

$$(\bar{\alpha}\mathsf{Z} - \bar{\gamma})\,(\bar{\mathsf{Z}}\alpha - \gamma) - \bar{z}\,(\bar{\alpha}\mathsf{Z} - \bar{\gamma})\,(-\bar{\mathsf{Z}}\beta + \delta)$$
$$- (-\bar{\beta}\mathsf{Z} + \bar{\delta})\,(\bar{\mathsf{Z}}\alpha - \gamma)z + (z\bar{z} - \varrho^2)\,(-\bar{\beta}\mathsf{Z} + \bar{\delta})\,(-\bar{\mathsf{Z}}\beta + \delta) = 0.$$

Die Ausrechnung ergibt die Gleichung: ($S(n)$ = Spur von n):

$$(\alpha\bar{\alpha} + \bar{z}\bar{\alpha}\beta + \bar{\beta}\alpha z + (z\bar{z} - \varrho^2)\,\beta\bar{\beta})\,\mathsf{Z}\bar{\mathsf{Z}} + S([-\gamma\bar{\alpha} - \delta\bar{z}\bar{\alpha} - \gamma z\bar{\beta} - (z\bar{z} - \varrho^2)\,\delta\bar{\beta}]\,\mathsf{Z})$$
$$+ (\gamma\bar{\gamma} + \bar{z}\bar{\gamma}\delta + \bar{\delta}\gamma z + (z\bar{z} - \varrho^2)\,\delta\bar{\delta}) = 0.$$

Aus der Gleichung für P findet man daher:

$$\mathsf{P}^2 = \varrho^2\,(\alpha\bar{\alpha}\delta\bar{\delta} + \beta\bar{\beta}\gamma\bar{\gamma} - \delta\bar{\beta}\alpha\bar{\gamma} - \gamma\bar{\alpha}\beta\bar{\delta})\,(\alpha\bar{\alpha} + \bar{z}\bar{\alpha}\beta + \bar{\beta}\alpha z + (zz - \varrho^2)\,\beta\bar{\beta})^{-2}.$$

Aus (7) und (8) folgt:

$$\alpha\bar{\alpha}\delta\bar{\delta} + \beta\bar{\beta}\gamma\bar{\gamma} - \delta\bar{\beta}\alpha\bar{\gamma} - \gamma\bar{\alpha}\beta\bar{\delta} = (\alpha\bar{\alpha})^2 + (\beta\bar{\beta})^2 - 2\alpha\bar{\alpha}\beta\bar{\beta} = (\alpha\bar{\alpha} - \beta\bar{\beta})^2 = 1.$$

Somit wird:

$$\lim_{\varrho\to 0}\frac{\mathsf{P}}{\varrho} = \frac{1}{(\alpha\bar{\alpha} + \bar{z}\bar{\alpha}\beta + \bar{\beta}\alpha z + \beta\bar{\beta}z\bar{z})} = \frac{1}{(\gamma\bar{\gamma}z\bar{z} + \bar{\delta}\gamma z + \bar{z}\bar{\gamma}\delta + \delta\bar{\delta})} = \frac{1}{n\,(\gamma z + \delta)}$$

Damit ist das Verhältnis der Radien zweier unendlich kleiner, sich nach s ähnlicher Kugeln berechnet. Die Inhalte der Kugeln selbst verhalten sich somit wie der Kubus dieses Verhältnisses. Das Verhältnis muß aber die *Jacobi*sche Funktionaldeterminante sein. Somit ist:

$$D = \frac{1}{n\,(\gamma z + \delta)^3},$$

und der Inhalt von K_i ist:

$$K_i = \int_{(K_0)} \frac{dx_0\,dx_1\,dx_2}{n(\gamma_i z + \delta_i)^3}.$$

Nach Definition von M_i ist aber für alle z von K_0:

$$\frac{1}{n\,(\gamma_i z + \delta_i)^3} \geqq \frac{1}{M_i^3},$$

oder wegen (10):

$$\frac{1}{n\,(\gamma_i z + \delta_i)_i^3} > \frac{1}{\varkappa^6 m_i^3}, \quad \text{für alle } z \text{ in } K_0.$$

Somit muß auch:

$$K_i > \frac{1}{\varkappa^6 m_i^3}\,K_0, \quad \text{oder} \quad \frac{1}{m_i^3} < \varkappa^6\,\frac{K_i}{K_0}$$

sein. Nach Definition ist aber:

$$\frac{1}{n\,(\gamma_i z + \delta_i)^3} \leqq \frac{1}{m_i^3}, \quad \text{also auch:} \quad \frac{1}{n\,(\gamma_i z + \delta_i)^3} < \varkappa^6\,\frac{K_i}{K_0},$$

für alle z von K_0. Läßt man in Σ die endlich vielen Glieder weg, in denen $\gamma = 0$ ist, so ist daher:

$$\sum_{(i)}\frac{1}{n\,(\gamma_i z + \delta_i)^3} < \frac{\varkappa^6}{K_0}\sum_{(i)} K_i.$$

Alle K_i liegen in der Einheitskugel und überdecken sich nirgends; also ist die Summe aller Inhalte K_i kleiner als der Inhalt der Einheitskugel, also endlich. Daher konvergiert die Summe Σ für $k = 3$ und um so mehr für alle $k \geqq 3$.

8. Satz: *Die unendliche Reihe:*

$$\varphi_k(z) = \sum_{(i)} \frac{1}{n(\gamma_i z + \delta_i)^k}$$

konvergiert in jedem ganz im Innern der Einheitskugel gelegenen Raume absolut und gleichmäßig, falls $k \geqq 3$ *ist.*

Die Begriffe der absoluten und gleichmäßigen Konvergenz übertragen sich ohne weiteres auf unendliche Quaternionenreihen. Denn jeder Koeffizient eines Quaternions ist absolut kleiner oder gleich seinem absoluten Betrage, unter dem man die positive Quadratwurzel aus der Norm versteht. Daraus geht hervor, daß auch die unendliche Reihe:

$$\sum_{(i)} (\gamma_i z + \delta_i)^{-2k}$$

für $k \geqq 3$ absolut und gleichmäßig konvergent ist in demselben Raume, wie $\varphi_k(z)$. Diese Reihe können wir aber nicht gebrauchen, da sie keine Thetareihe ist, weil die Quaternionen nicht kommutativ sind. Dagegen ist $\varphi_k(z)$ eine Thetareihe. Wendet man nämlich auf z die allgemeine Substitution s der Gruppe $\mathfrak{G}$ an, so folgt:

$$\varphi_k(sz) = \varphi_k((az+\beta)(\gamma z+\delta)^{-1}) = n(\gamma z+\delta)^k \sum_{(i)} \frac{1}{n(\gamma_i(az+\beta)+\delta_i(\gamma z+\delta))^k}$$

Nach den Gleichungen (4) ist aber:

$$\gamma_i(az+\beta)+\delta_i(\gamma z+\delta) = (\gamma_i a+\delta_i\gamma)z+\gamma_i\beta+\delta_i\delta = \gamma_l z+\delta_l,$$

wo γ_l und δ_l die entsprechenden Koeffizienten der zusammengesetzten Substitution $s_i s$ sind. Da die Reihenfolge der Summanden wegen der absoluten Konvergenz gleichgültig ist, so wird:

(11) $\varphi_k((az+\beta)(\gamma z+\delta)^{-1}) = n(\gamma z+\delta)^k \varphi_k(z)$ für jedes s von $\mathfrak{G}$.

Wir betrachten außerdem die Reihen:

$$f_k(z) = \sum_{(i)} \frac{[(a_i z+\beta_i)(\gamma_i z+\delta_i)^{-1}]^{-1}}{n(\gamma_i z+\delta_i)^k}, \quad k = 3, 4, 5, \ldots$$

Wir legen um den Nullpunkt eine Kugel mit einem so kleinen Radius ϱ, daß dieselbe ganz im Innern eines Diskontinuitätsraumes, z. B. von R_0 liegt, falls R_0 den Punkt $z = 0$ enthält. Ist dann z irgendein anderer Punkt von diesem R, der außerhalb dieser Kugel liegt, so ist sicherlich für alle s:

$$n((az+\beta)(\gamma z+\delta)^{-1}) > \varrho^2 > 0 \quad \text{und} \quad n((az+\beta)(\gamma z+\delta)^{-1})^{-1} < \frac{1}{\varrho^2}.$$

Somit konvergiert die Summe $f_k(z)$ wieder für alle diese z. Legen wir ferner um jeden Punkt, der dem Nullpunkt ähnlich ist, die unserer Kugel ähnliche Kugel, so konvergiert die Reihe auch in jedem Punkte des Innern der Einheitskugel, der nicht im Innern einer dieser Kugeln liegt. Den zwischen der Einheitskugel

und diesen Kugeln zusammenhängenden Raumteil wollen wir mit E' bezeichnen. Man beweist dann wieder, daß für jedes z von E' die Beziehung gilt:

$$(12)\quad f_k((az+\beta)(\gamma z+\delta)^{-1}) = n(\gamma z+\delta)^k f_k(z), \quad \text{für jedes } s \text{ von } \mathfrak{G}.$$

Nun ist $\varphi_k(z)$ als Summe von lauter positiven Summanden niemals Null. Somit ist:

$$F_k(z) = \frac{f_k(z)}{\varphi_k(z)}, \quad k = 3, 4, \ldots, \; z \text{ in } E',$$

eine automorphe Funktion, die wegen (11) und (12) der Funktionalgleichung genügt:

$$\boldsymbol{F_k((az+\beta)(\gamma z+\delta)^{-1}) = F_k(z)}, \quad \text{für jedes } s \text{ von } \mathfrak{G}.$$

$F_k(z)$ ist keine Konstante. Denn sie wächst in der Nähe des Nullpunktes und aller demselben ähnlichen Punkten über alle Grenzen. Sie ist somit die gesuchte automorphe Funktion.

Da sz nach dem 4. Satz wieder ein reduziertes Quaternion ist, also auch der reziproke Wert von sz wieder ein reduziertes Quaternion ist, sieht man, daß $F_k(z)$ wieder nur die drei Einheiten $1, i_1, i_2$ enthält. Jedem Funktionswert $F_k(z)$ entspricht also wieder ein dreidimensionaler Raumpunkt. $F(z)$ vermittelt daher eine Abbildung des Diskontinuitätsraumes auf den dreidimensionalen Raum.

Die Gleichheitsbeziehung in der Mengenlehre.

Von *Adolf Fraenkel* in Marburg.

Herr *Zermelo* legt seiner bis heute in den Grundzügen mit Recht maßgebend gebliebenen Axiomatik der Mengenlehre [1]) einen Bereich von „Dingen" zugrunde, unter denen als Sonderfall die „Mengen" auftreten: nämlich diejenigen Dinge a, denen gegenüber gewisse Dinge b in der (undefinierten) *Grundbeziehung* $b \varepsilon a$ stehen (gelesen etwa: b ist Element der Menge a). Die Gleichheitsbeziehung $=$ zwischen Dingen (namentlich also auch Mengen) wird eingeführt durch die Festsetzung:

(*A*) Sollen zwei Symbole a und b dasselbe Ding bezeichnen, so schreiben wir $a = b$, im entgegengesetzten Falle $a \neq b$.

Diese dem *formalen* Charakter der axiomatischen Methode nicht ganz angepaßte Zurückführung der Gleichheit auf die *inhaltlich* geprägte Beziehung der Identität kann natürlich für die Zwecke der Mengenlehre nicht ausreichen; läßt sich doch etwa das letzte *Fermat*sche Theorem als eine Gleichheitsaussage zwischen Mengen ansprechen (nämlich zwischen der Menge $\{2\}$ und der Menge der Exponenten $n > 1$, für die $x^n + y^n = z^n$ lösbar ist), ohne daß in solchen — den normalen Typus darstellenden — Fällen von einer logischen Identität die Rede sein kann. Demgemäß wird die obige Einführung der Gleichheit ergänzt durch eine axiomatische Aussage, die die inhaltlich eingeführte Beziehung $=$ mit der axiomatisch zugrunde gelegten Beziehung ε verknüpft, nämlich durch das

(*B*) *Axiom der Bestimmtheit*: Ist jedes Element einer Menge M gleichzeitig Element von N und umgekehrt, so ist $M = N$; oder kurz: jede Menge ist durch ihre Elemente bestimmt.

Die charakteristischen Eigenschaften der Gleichheitsbeziehung innerhalb jeder mathematischen Theorie, nämlich die Reflexivität ($a = a$), die Symmetrie und die Transitivität sowie die *Vertretbarkeit* gleicher Dinge innerhalb jeder Grundbeziehung oder Grundoperation, können größtenteils ebensowohl aus (*B*) wie aus (*A*) gefolgert werden. Insoweit ist die inhaltliche Erklärung (*A*) entbehrlich. Doch

[1]) Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre. I. Math. Annalen **65** (1908), S. 261—281. Fortgesetzt durch: *A. Fraenkel*, Axiomatische Theorie der geordneten Mengen (Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre. II.). Dieses Journal **155** (1926), S. 129—158.

es gibt da eine wesentliche (und bisher nicht hervorgehobene) Ausnahme. Die folgende Teilaussage der Vertretbarkeit:

(*C*) *Aus* $a = b$ *und* $a \varepsilon M$ *folgt stets* $b \varepsilon M$

läßt sich aus (*B*) *nicht ableiten* und ist sogar — ebenso wie übrigens auch (*B*) — von dem gesamten Axiomensystem *Zermelo*s (bei Verzicht auf (*A*)) *unabhängig*, wie sich z. B. durch Einführung einer Ordnungsbeziehung zeigen läßt [1]). *Die Zugrundelegung der Festsetzung* (*A*) *ist also wesentlich für Zermelos Aufbau der Mengenlehre.*

Den Übelstand dieser Stützung der Axiomatik auf eine inhaltliche Erklärung könnte man vermeiden, indem man $=$ (neben ε) als *zweite und gleichberechtigte undefinierte Grundbeziehung* einführte und *die Aussage* (*C*) *neben* (*B*) *axiomatisch forderte.* Dieses Verfahren, das dem sonst axiomatisch üblichen entspricht, ist in meiner Umarbeitung der *Zermelo*schen Abhandlung [2]) angewandt worden. Es hat den Nachteil, das Axiomensystem mit *zwei* undefinierten Grundbeziehungen und mit *zwei* „relationalen" Axiomen (*B*) und (*C*) — neben den unverändert bleibenden existentialen Axiomen — zu belasten.

Es ist indes möglich, unter Verzicht auf die inhaltliche Festsetzung (*A*) mit der einen Grundbeziehung ε und mit einem einzigen relationalen Axiom, nämlich (*C*), auszukommen, indem man die Gleichheitsbeziehung mittels (*B*), also auf Grund von ε, formal *definiert.*

Innerhalb der Axiomatik *Zermelo*s begegnet dieses naheliegende, trotz seiner stark vereinfachenden Wirkung noch nicht angewendete Verfahren allerdings dem Nachteil, daß (*B*) als Definition — wie auch schon als Axiom — nur die Gleichheit zwischen *Mengen* festzulegen vermag; man bedürfte also für Dinge, die nicht Mengen sind, einer ergänzenden, hier etwa die Gleichheit auf die Identität beschränkenden Festsetzung. Dieser Nachteil fällt weg in der von mir angegebenen Fortbildung jener Axiomatik (vgl. z. B. die Zitate der letzten zwei Fußnoten), wo außer der Nullmenge jedes „Ding" eine eigentliche Menge ist, wo also auch die Eigenschaft, *keine* Elemente zu besitzen, ein Ding eindeutig (nämlich als Nullmenge) festlegt. Diese aus ganz anderen Erwägungen getroffene Beschränkung, der sich auch Herr *Finsler* angeschlossen hat [3]), erweist sich somit in einem neuen Sinn als zweckmäßig.

Die Definition der Gleichheit in der axiomatisierten Mengenlehre, in der ε als einzige undefinierte Grundbeziehung auftritt, soll also lauten:

> Gilt gleichzeitig mit $x \varepsilon a$ stets auch $x \varepsilon b$ und umgekehrt, so werde $a = b$ gesetzt.

Dieser Festsetzung läßt sich erst dann der Sinn beilegen, jede Menge sei durch die Gesamtheit ihrer Elemente bestimmt, wenn die Ersetzung eines Elements durch ein ihm gleiches die ursprüngliche Menge nicht ändert; ähnlich

---

[1]) Vgl. die Durchführung meiner in Math. Ann. **86** (1922), S. 234 gemachten Hinweise einschließlich der obigen Behauptung in der Marburger Inauguraldissertation Herrn *H. Vieler*s (1926).

[2]) Math. Zeitschrift **22** (1925), S. 250–273.

[3]) Jahresber. d. Deutschen Mathematikervereinigung **34** (1925), S. 153 f.

wie die Definition $\frac{a}{b} = \frac{ma}{mb}$ erst gerechtfertigt ist, wenn gezeigt ist, daß eine ihr entsprechende Ersetzung das Resultat einer Addition oder Multiplikation nicht verändert. Man hat also das Recht, dem folgenden nur scheinbar neuen, implizit schon immer vorausgesetzten Axiom die Bezeichnung von (B) zu erteilen:

Axiom der Bestimmtheit: Aus $a = b$ und $a \varepsilon M$ folgt stets $b \varepsilon M$.

Die axiomatische Entwicklung auf Grund jener Definition und dieses Axioms erfordert fast keinen neuen Gedanken [1]); es bleibt also bei einer bloßen Vereinfachung. Die einzige Überlegung, die veränderter Schlüsse bedarf, werde hier noch angeführt.

*Zermelo*s zweites Axiom („Axiom der Elementarmengen") fordert bekanntlich außer der Existenz der Paare $\{a, b\}$, wo $a \neq b$, auch die der Nullmenge 0 und der Mengen $\{a\}$ mit einem einzigen Element [2]). In meinem entsprechenden Axiom („Axiom der Paarung") wird nur die Existenz der Paare gefordert, während z. B. die Existenz der Mengen mit einem einzigen Element auf Grund des Axioms der Aussonderung unter Verwendung der Gleichheit bewiesen wird. Dieses Verfahren ist aber nur zulässig, solange die Gleichheit eine Grundbeziehung darstellt.

Der Verzicht auf die Verwendung der Gleichheit an dieser Stelle bereitet indes nicht die mindeste Schwierigkeit. Man zeigt leicht, daß, falls es überhaupt eine Menge a gibt, die Mengen 0 und $\{0\}$ sowie entweder die Menge $\{0, a\}$ oder — falls $a = 0$ — die Menge $\{\{0\}, a\}$ existieren. Im ersten Fall, der allein noch interessiert, existiert aber $\{a\}$ nach dem Axiom der Aussonderung als die Teilmenge derjenigen Elemente von $\{0, a\}$, die nicht Elemente von $\{0\}$ sind. Hiermit ist schließlich für die Zwecke der Aussonderung die Beziehung $a = b$ zirkelfrei auf die Grundbeziehung $a \varepsilon \{b\}$ zurückgeführt.

---

[1]) Vgl. die Durchführung in meinen demnächst in der Teubnerschen Sammlung „Wissenschaft und Hypothese" erscheinenden „Zehn Vorlesungen über die Grundlegung der Mengenlehre, gehalten in Kiel 1925".

[2]) Die letztere Forderung gestattet *Zermelo* übrigens eine nachträgliche formale Zurückführung der Gleichheit auf die Beziehung ε, insofern als $a = c$ gleichbedeutend wird mit $a \varepsilon \{c\}$; diese Zurückführung ist indes zirkelhaft, da die Unterscheidung von $\{a\}$ und $\{a, b\}$ — und somit das Axiom selbst — schon die Gleichheit und ihre Negation voraussetzt.

Der Diskriminantensatz für die Ordnungen eines algebraischen Zahl- oder Funktionenkörpers.

Von *Emmy Noether* in Göttingen.

Der *Dedekind*sche Diskriminantensatz sagt bekanntlich aus: Eine Primzahl geht dann und nur dann in der Körperdiskriminante auf, wenn sie mindestens durch das Quadrat eines Primideals teilbar ist.

Ich zeige im folgenden, daß dieser Satz für alle endlichen Ordnungen eines (endlichen) algebraischen Zahlkörpers — d. h. für alle solchen Ringe aus ganzen Zahlen, die den Ring der ganzen rationalen Zahlen umfassen — erhalten bleibt in der folgenden Fassung: *Eine Primzahl p geht dann und nur dann in der Diskriminante einer Ordnung auf, wenn in der — in der Ordnung geltenden — Idealzerlegung*[1]) *des Hauptideals* (p) *in größte primäre Komponenten mindestens ein eigentliches Primärideal auftritt, d. h. ein solches das nicht Primideal ist.*

Da es für die Hauptordnung — das System aller ganzen Zahlen des Körpers — keine weiteren Primärideale gibt als Potenzen von Primidealen, so ergibt sich durch Spezialisierung der *Dedekind*sche Satz.

Der Beweis des Satzes wird durch Übergang zum Restklassenring der Ordnung nach (p) zurückgeführt auf die Zerlegungstheorie derjenigen Ringe, die von endlichem Range inbezug auf einen im Ring enthaltenen Körper sind, die also ein kommutatives System hyperkomplexer Größen mit Haupteinheit und Koeffizienten aus eben diesem Körper bilden. Als Koeffizientenkörper tritt hier speziell der Restklassenkörper der ganzen rationalen Zahlen modulo p auf, und der Zerlegung von (p) entspricht im Restklassenring die Zerlegung des Nullideals.

Nennt man also einen solchen Ring endlichen Ranges *vollständig reduzibel*, wenn sein Nullideal sich als kleinstes gemeinsames Vielfaches von (endlich vielen) Primidealen darstellen läßt, so handelt es sich um Kriterien für die vollständige Reduzibilität. Als ein solches Kriterium ergibt sich zunächst, daß bei *vollkommenem* Körper als Koeffizientenbereich der Ring dann und nur dann vollständig reduzibel ist, wenn der Erweiterungsring mit algebraisch-abgeschlossenem Koeffizientenbereich vollständig reduzibel ist. Für diesen Erweiterungsring aber läßt sich sehr

[1]) Vergl. hierzu *E. Noether*, Abstrakter Aufbau der Idealtheorie in algebraischen Zahl- und Funktionenkörpern. Math. Ann. 96, (1926), S. 26—61. Für alle Definitionen sei auf diese, als „Idealtheorie" zitierte Arbeit verwiesen. Unter „Ordnung" sei im folgenden stets „endliche Ordnung" verstanden, unter „Ring" ein kommutativer Ring.

einfach das Nichtverschwinden der Diskriminante als ein notwendiges und hinreichendes Kriterium der vollständigen Reduzibilität erkennen [1]); und da die Diskriminante der Ordnung modulo jeder Primzahl in die Diskriminante des Restklassenrings übergeht, ist damit der Diskriminantensatz bewiesen [2]).

Betrachtet man Funktionenkörper statt Zahlkörper — die Ordnung muß jetzt den Grundbereich aller ganzen rationalen Funktionen, bzw., bei algebraischen Funktionen von mehr Unbestimmten oder bei ganzzahligen algebraischen Funktionen, den Grundbereich aller ganzen Funktionale mit ganzrationalen Koeffizienten umfassen — so kann auch der Fall des *unvollkommenen* Koeffizientenbereichs im Restklassenring auftreten; z. B. wenn es sich im Fall des ganzzahligen Funktionalbereichs um den Restklassenring nach einer Primzahl handelt. Bei unvollkommenem Körper als Koeffizientenbereich muß zwischen Primidealen erster und zweiter Art — je nachdem der Restklassenkörper nach dem Primideal Erweiterungskörper erster oder zweiter Art ist [3]) — und entsprechend zwischen vollständiger Reduzibilität erster und zweiter Art unterschieden werden. Die oben angegebenen Kriterien beziehen sich alle auf die im vollkommenen Fall allein auftretende vollständige Reduzibilität erster Art; und damit sagt im allgemeinsten Fall der *Diskriminantensatz* aus, daß *eine Primgröße des Grundbereichs dann und nur dann in der Diskriminante einer Ordnung aufgeht, wenn in der Idealzerlegung von* (p) *mindestens eine eigentlich primäre Komponente oder ein Primideal zweiter Art auftritt.*

Diese Tatsache ist für die Hauptordnung zuerst von *Kronecker* an Beispielen bemerkt worden, nachdem sich in der Festschrift noch irrtümlicherweise die für die Hauptordnung des Zahlkörpers geltende Fassung findet, allerdings ohne durchgeführten Beweis. Für die Hauptordnung hat *Ostrowski*[4]) einen Beweis des obigen Diskriminantensatzes und daran anknüpfende weitere Verzweigungssätze gegeben; zugleich findet sich dort ein ausführlicher Literaturnachweis. Schließlich ergibt sich als direkte Folge der *Diskriminantensatz für alle Ordnungen von Relativkörpern*, und zwar durch Übergang zum Quotientenring inbezug auf jedes Primideal des Grundbereichs. Der Gedanke dieses Überganges — der im Spezialfall bekannt ist — ist prinzipiell von *W. Krull* [5]) betont worden, eine systematische Theorie des Quotientenringes im Rahmen allgemeinerer Untersuchungen gibt *H. Grell* [6]).

Die hier gegebene gleichmäßige Behandlung aller Ordnungen — und des voll-

---

[1]) In einem Spezialfall schließt *Hilbert* ähnlich: Zur Theorie der aus n Haupteinheiten gebildeten komplexen Größen. Gött. Nachr. 1896.

[2]) Verwandte Untersuchungen, auch im nichtkommutativen Fall, die sich aber auf die *Hauptordnung* (Maximalbereich) beschränken und ganze rationale Zahlkoeffizienten voraussetzen, finden sich in der eben erschienenen Arbeit von *A. Speiser:* Allgemeine Zahlentheorie. Naturf. Gesellschaft Zürich, 71, (1926), S. 8—48. Vergl. auch die dort angegebene amerikanische Literatur.

[3]) In bekannter *Steinitz*scher Fassung, J. f. M. 137. Vergl. Anmerkung zu § 2, 4 dieser Arbeit.

[4]) *A. Ostrowski*: Zur arithmetischen Theorie der algebraischen Größen. Nachr. Gött. Ges. d. Wissensch. 1919.

[5]) Vergl. dessen Danziger Vortrag: Jhrbr. d. D. Math. Ver. 34, S. *121.*

[6]) Beziehungen zwischen den Idealen verschiedener Ringe (wird in den Math. Annalen erscheinen).

kommenen und unvollkommenen Koeffizientenbereichs — beruht neben der Kenntnis der Idealtheorie darauf, daß von vornherein die Theorie der Ringe endlichen Ranges und damit der allgemeine Begriff der endlichen Erweiterung zugrunde gelegt ist, und nicht der Begriff der durch ein primitives Element erzeugten Erweiterung. Die Modulbasis einer Ordnung — mit den Relationen zwischen ihren Elementen — vertritt also die Stelle der Potenzen eines primitiven Elementes des Körpers und der definierenden Gleichung [1]), bzw. die Stelle der Potenzen der Fundamentalform und der Fundamentalgleichung.

Eine solche Modulbasis geht modulo jeder Primgröße des Grundbereichs in eine Basis des Restklassenrings über, während dies schon für die Hauptordnung nicht der Fall zu sein braucht bei einer aus den Potenzen eines primitiven Elementes bestehenden Basis; auch nicht bei der Basis aus den Potenzen der Fundamentalform, sobald es sich um ganzzahlige algebraische Funktionen mehrerer Unbestimmten handelt [2]). Anders ausgedrückt: Der Restklassenring des Polynombereichs einer Unbestimmten — mit Koeffizienten aus dem Grundbereich — nach einer beliebigen definierenden Gleichung oder auch nach der Fundamentalgleichung braucht modulo p nicht isomorph zu sein dem Restklassenring der Hauptordnung nach (p) — und in diesem Aufhören des Isomorphismus liegen die Hauptschwierigkeiten bei den üblichen Darstellungen. Da dieser Hilfspolynombereich hier nicht auftritt, sind diese Schwierigkeiten damit von selbst umgangen; zugleich läßt die additive Zerlegungstheorie des Restklassenrings sich auffassen als Äquivalent der multiplikativen Zerlegung der Gleichung, der auch hier bei Zerlegung in teilerfremde Faktoren eine additive Zerlegung im Polynom-Restklassenring entspricht.

Es sei bemerkt, daß der Diskriminantensatz nur den ersten Satz einer allgemeinen Verzweigungstheorie der Ordnungen darstellen kann, ebenso wie in der Hauptordnung dem Diskriminantensatz sich die feinere Theorie des Verzweigungsideals an die Seite stellt, die dort eine genauere Exponentenbestimmung gestattet. Diese Exponentenbestimmung — die auf der Potenzdarstellung der primären Faktoren der Gleichungen beruht — läßt sich deuten als Bestimmung der Länge einer Kompositionsreihe (von $\mathfrak{p}$ nach $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}^e$) und wird voraussichtlich in dieser Form in der allgemeinen Verzweigungstheorie auftreten.

§ 1. Erweiterungsringe von Körpern.

1. Vorausgeschickt seien einige Bemerkungen über beliebige Ringe. Ist $\mathfrak{T}$ ein Ring, S ein System von Elementen aus $\mathfrak{T}$, so wird unter dem „aus S in $\mathfrak{T}$ abgeleiteten Ring“ der Durchschnitt aller Ringe aus $\mathfrak{T}$ verstanden, die S umfassen. Entsprechend ist das „aus S in $\mathfrak{T}$ abgeleitete Ideal“ definiert, oder der „aus S in $\mathfrak{T}$ abgeleitete P-Modul“, wenn P Unterring von $\mathfrak{T}$ [3]).

---

[1]) Diese Auffassung berührt sich nahe mit der von *Dedekind* über die höheren komplexen Zahlen vertretenen: Zur Theorie der aus n Haupteinheiten gebildeten komplexen Größen. Gött. Nachr. 1885.

[2]) Vergl. *Ostrowski*, a. a. O. „Irregularität erster Art.“

[3]) Vergl. dazu Idealtheorie § 1.

Ist $\mathfrak{R}$ Unterring von $\mathfrak{T}$ und S ein System von Elementen aus $\mathfrak{T}$, so wird der *aus $\mathfrak{R}$ und S in $\mathfrak{T}$ abgeleitete* Ring als der *durch Ring-Adjunktion von S* zu $\mathfrak{R}$ *entstandene Ring* $\mathfrak{R}[S]$ bezeichnet. Dieser Ring besteht aus allen Polynomen der Elemente aus S mit Koeffizienten aus $\mathfrak{R}$, wobei die Gleichheits- und Verknüpfungsbeziehungen durch die Gleichheits- und Verknüpfungsbeziehungen in $\mathfrak{T}$ festgelegt sind. Vermöge dieser schon festgelegten Gleichheits- und Verknüpfungsbeziehungen wird es im Spezialfall genügen, nur ein Untersystem aller Polynome — etwa nur alle Linearformen in S mit Koeffizienten aus $\mathfrak{R}$ — zu bilden. Ein solcher Spezialfall liegt beispielsweise vor (vgl. 2.), wenn $\mathfrak{R}$ ein Ring mit Einheitselement, S ein Körper mit gleichem Einheitselement; alle linearen Kombinationen $\Sigma c_i \gamma_i$, wo c_i aus S und γ_i aus $\mathfrak{R}$, bilden den Ring $\mathfrak{R}[S]$.

Man kann aber auch, wenn nur der Ring $\mathfrak{R}$ gegeben ist, und außerdem ein System S von nicht in $\mathfrak{R}$ enthaltenen Elementen mit Gleichheits- oder auch gegenseitigen Verknüpfungsbeziehungen, *den durch Adjunktion von S zu $\mathfrak{R}$ entstandenen Erweiterungsring* $\mathfrak{R}[S]$ konstruieren, indem man zeigt, daß es immer einen $\mathfrak{R}$ und S umfassenden Ring gibt, nämlich den formal aus allen Polynomen in S mit Koeffizienten aus $\mathfrak{R}$ gebildeten, unter Festsetzung der üblichen Verknüpfungsregeln. Für die Gleichheitsdefinition ist dabei — abgesehen von den Verknüpfungsregeln — noch volle Freiheit möglich bis auf die Beschränkung, daß die in $\mathfrak{R}$ und S geltenden Gleichheitsdefinitionen umfaßt werden. Es müssen also nur notwendig diejenigen Polynome gleich gesetzt werden, die sich — vermöge der Gleichheit in $\mathfrak{R}$ und S und vermöge der Verknüpfungen — aus gleichen Elementen von $\mathfrak{R}$ und S auf gleiche Art bilden lassen. Der solchermaßen konstruierte, $\mathfrak{R}$ und S umfassende Ring $\mathfrak{T}$ wird dann identisch mit dem in $\mathfrak{T}$ aus $\mathfrak{R}$ und S abgeleiteten [1]).

2. Erweiterungsringe von Körpern. Von jetzt an seien *Ringe $\mathfrak{R}$ mit Einheitselement vorausgesetzt*, die einen *Körper* P *als Unterring* enthalten, die also Oberringe von Körpern sind. Das Einheitselement e von $\mathfrak{R}$ wird dann zugleich Einheitselement von P; und der Ring wird P-Modul.

Ist $\overline{\mathsf{P}}$ ein Oberkörper von P, so soll der *durch Ring-Adjunktion von $\overline{\mathsf{P}}$ zu $\mathfrak{R}$ entstandene Erweiterungsring* $\overline{\mathfrak{R}} = \mathfrak{R}[\overline{\mathsf{P}}]$ folgendermaßen erklärt werden:

Vorausgesetzt sei, daß der mengentheoretische *Durchschnitt* $[\mathfrak{R}, \overline{\mathsf{P}}]$ *von $\mathfrak{R}$ und $\overline{\mathsf{P}}$ durch P gegeben* ist und weiter, daß *zwischen den nicht zu P gehörigen Elementen von $\mathfrak{R}$ und $\overline{\mathsf{P}}$ keine Verknüpfungen* bestehen. Diese Voraussetzung kann immer erreicht werden, indem $\overline{\mathsf{P}}$ durch einen äquivalenten Erweiterungskörper von P ersetzt wird, oder auch $\mathfrak{R}$ durch einen äquivalenten Erweiterungsring [2]).

---

[1]) Vergl. die *Steinitz*sche Konstruktion des Quotientenkörpers.

[2]) Zwei Erweiterungskörper von P heißen nach *Steinitz* „äquivalent", wenn sie sich derart isomorph aufeinander beziehen lassen, daß P elementweise sich selbst entspricht, entsprechend sind äquivalente Erweiterungsringe von P zu definieren. Durch Einführung neuer Symbole lassen sich immer äquivalente Erweiterungen erzeugen; diese Freiheit in der Verwendung äquivalenter Erweiterungen ist für das folgende wesentlich.

Als *Elemente von* $\overline{\mathfrak{R}}$ werden alle formal gebildeten linearen Verbindungen $\bar{c}_{i_1}\gamma_{i_1} + \cdots + \bar{c}_{i_\sigma}\gamma_{i_\sigma}$ erklärt, wobei $\bar{c}_{i_\lambda}$ alle Elemente aus $\overline{\mathsf{P}}$ durchläuft, γ_{i_λ} alle Elemente aus $\mathfrak{R}$[1]). Die Definition soll eindeutig sein, d. h. werden die γ durch ihnen gleiche in $\mathfrak{R}$, die $\bar{c}$ durch ihnen gleiche in $\overline{\mathsf{P}}$ ersetzt, so soll auch das Element in $\overline{\mathfrak{R}}$ als gleich erklärt werden.

Als *Summe* wird eindeutig — d. h. wird ein Summand in der festzulegenden Gleichheitsdefinition durch einen gleichen ersetzt, so sei das Resultat das gleiche — erklärt: $\Sigma\bar{c}_i\gamma_i + \Sigma\bar{d}_i\gamma_i = \Sigma(\bar{c}_i + \bar{d}_i)\gamma_i$. (Unter den $\bar{c}$ und $\bar{d}$ können Nullen auftreten, wodurch formal dieselben γ_i auftreten).

Als *Produkt* wird im gleichen Sinn eindeutig erklärt: $\Sigma\bar{c}_i\gamma_i \cdot \Sigma\bar{d}_k\gamma_k = \Sigma\bar{c}_i\bar{d}_k\gamma_i\gamma_k$.

Zur *Gleichheitsdefinition* wird erklärt: Sind $\gamma_{i_1}, \ldots, \gamma_{i_\sigma}$ *linear unabhängig* in bezug auf P, so sollen zwei Elemente $\bar{c}_{i_1}\gamma_{i_1} + \cdots + \bar{c}_{i_\sigma}\gamma_{i_\sigma}$ und $\bar{d}_{i_1}\gamma_{i_1} + \cdots + \bar{d}_{i_\sigma}\gamma_{i_\sigma}$ nur dann (und stets dann) gleich sein, wenn $\bar{c}_{i_\lambda}$ gleich $\bar{d}_{i_\lambda}$ in $\overline{\mathsf{P}}$ wird. Anders ausgedrückt: In bezug auf P linear unabhängige Elemente aus $\mathfrak{R}$ werden als linear unabhängig in bezug auf $\overline{\mathsf{P}}$ erklärt.

Vermöge der Summen- und Produktdefinition ist damit die Gleichheitsdefinition für alle Elemente aus $\overline{\mathfrak{R}}$ gegeben; es folgt nämlich ihre Ausdrückbarkeit durch linear unabhängige Elemente aus $\mathfrak{R}$. Denn aus einer Relation $\mu = c_1\gamma_1 + \cdots + c_s\gamma_s$ in $\mathfrak{R}$ kommt durch Multiplikation mit $\bar{b} = \bar{b}e$ nach der Produktdefinition: $\bar{b}\mu = \bar{b}e \cdot (c_1\gamma_1 + \cdots + c_s\gamma_s) = \bar{b}c_1\gamma_1 + \cdots + \bar{b}c_s\gamma_s$, und damit vermöge der Summendefinition die Ausdrückbarkeit aller Elemente durch linear unabhängige aus $\mathfrak{R}$.

Die Gleichheitsdefinition wird somit — wenn alle Elemente durch linear unabhängige aus $\mathfrak{R}$ ausgedrückt sind — zur Koeffizientengleichheit in $\overline{\mathsf{P}}$ und stimmt daher für die gleichzeitig zu $\mathfrak{R}$ und $\overline{\mathfrak{R}}$ oder zu $\overline{\mathsf{P}}$ und $\overline{\mathfrak{R}}$ gehörenden Elemente mit der dort gültigen überein, während die in $\mathfrak{R}$ und $\overline{\mathsf{P}}$ geltende Gleichheit für die übrigen Elemente aus $\overline{\mathfrak{R}}$ nichts weiter aussagt als die bei der Definition dieser Elemente geforderte Eindeutigkeit (wegen der Durchschnittsvoraussetzung und der weiteren Bestimmung)[2]). Ebenso zieht auch die Forderung der Eindeutig-

---

[1]) Allgemein sollen Elemente aus $\mathfrak{R}$ oder $\overline{\mathfrak{R}}$ mit griechischen Buchstaben, Elemente aus P oder $\overline{\mathsf{P}}$ mit lateinischen Buchstaben bezeichnet werden.

[2]) Ohne diese Voraussetzung gäbe es mindestens ein nicht zu P gehörendes Element $\bar{c}$ aus $\overline{\mathsf{P}}$, für das $\bar{c} = \bar{c}e = \gamma$ gilt. Es wären also — vermöge der Gleichheitsdefinition in $\mathfrak{R}$ — zwar e und γ linear unabhängig in bezug auf P, aber abhängig in bezug auf $\overline{\mathsf{P}}$. Wegen der Relationen zwischen Elementen aus $\overline{\mathsf{P}}$ und $\mathfrak{R}$ wäre also die obige Gleichheitsdefinition nicht möglich; man denke etwa an die Graderniedrigung eines endlichen Erweiterungskörpers, wenn der Grundkörper durch einen Zwischenkörper ersetzt wird.

Die obige Erweiterung ist dagegen gekennzeichnet durch die Möglichkeit des Auftretens neuer Nullteiler; so ist etwa der Restklassenring des Polynombereichs mit rationalen Koeffizienten P nach

keit von Summe und Produkt keine weiteren Relationen nach sich, da gleiche Elemente als koeffizientengleich angenommen werden dürfen, und somit formal die gleichen Summen- und Produktsausdrücke ergeben.

Man bestätigt jetzt sofort, daß alle Axiome der Ring-Verknüpfung erfüllt sind; es *existiert also stets der durch Ring-Adjunktion erzeugte Erweiterungsring* $\mathfrak{R}[\overline{\mathsf{P}}]$.

3. Ideale in $\mathfrak{R}$ und $\overline{\mathfrak{R}}$. Ist $\mathfrak{a}$ ein Ideal in $\mathfrak{R}$, so wird das Modulprodukt $\overline{\mathfrak{R}}\,\mathfrak{a}$ ein Ideal $\bar{\mathfrak{a}}$ in $\overline{\mathfrak{R}}$, das *Erweiterungsideal* von $\mathfrak{a}$. Zugleich wird $\bar{\mathfrak{a}}$ das aus $\mathfrak{a}$ in $\overline{\mathfrak{R}}$ abgeleitete Ideal; es besteht aus allen linearen Verbindungen $\Sigma \bar{c}_i a_i$, die Summe jeweils über endlich viele Elemente genommen, wobei die a_i alle Elemente aus $\mathfrak{a}$, die $\bar{c}_i$ alle Elemente aus $\overline{\mathsf{P}}$ durchlaufen.

Ist $\bar{\mathfrak{b}}$ Ideal in $\overline{\mathfrak{R}}$, so wird der Durchschnitt $[\bar{\mathfrak{b}}, \mathfrak{R}]$ ein Ideal $\mathfrak{b}$ in $\mathfrak{R}$, das *Verengungsideal* von $\bar{\mathfrak{b}}$ [1]). *Jedes Ideal* $\mathfrak{a}$ *aus* $\mathfrak{R}$ *ist Verengungsideal*, und zwar seines Erweiterungsideals $\bar{\mathfrak{a}}$. Denn jedes Element a aus $[\mathfrak{R}, \bar{\mathfrak{a}}]$ ist von der Form $\Sigma \bar{c}_i a_i$, wo die a_i als linear unabhängig in bezug auf P oder $\overline{\mathsf{P}}$ vorausgesetzt werden dürfen. Es werden also die Elemente a, a_i linear abhängig in $\overline{\mathfrak{R}}$, und damit nach der Gleichheitsdefinition auch in $\mathfrak{R}$; somit gehört a *zu* $\mathfrak{a}$. Da auch das Umgekehrte gilt, wird $\mathfrak{a}$ gleich $[\mathfrak{R}, \bar{\mathfrak{a}}]$.

Ist $\bar{\mathfrak{p}}$ *Primideal in* $\overline{\mathfrak{R}}$, *so wird* $\mathfrak{p} = [\mathfrak{R}, \bar{\mathfrak{p}}]$ *Primideal in* $\mathfrak{R}$. Denn nach dem zweiten Isomorphiesatz [2]) wird der Restklassenring $\mathfrak{R} \mid \mathfrak{p}$ einem Unterring von $\overline{\mathfrak{R}} \mid \bar{\mathfrak{p}}$ isomorph, und somit ein Ring ohne Nullteiler. Es gilt nämlich die Ringisomorphie: $(\mathfrak{R}, \bar{\mathfrak{p}}) \mid \bar{\mathfrak{p}} \simeq \mathfrak{R} \mid [\mathfrak{R}, \bar{\mathfrak{p}}]$, unter $(\mathfrak{R}, \bar{\mathfrak{p}})$ die Summe — der größte gemeinsame Teiler — der Moduln $\mathfrak{R}$ und $\bar{\mathfrak{p}}$ verstanden.

§ 2. Ringe endlichen Ranges. Darstellung als direkte Summe.

1. Ringe endlichen Ranges. Ist $\mathfrak{A}$ ein endlicher P-Modul, so wird $\mathfrak{A}$ von endlichem Rang, etwa k in bezug auf P, d. h es gibt k und nicht mehr in bezug auf P linear unabhängige Elemente in $\mathfrak{A}$, und jedes System von k in bezug auf P linear unabhängigen Elementen aus $\mathfrak{A}$ bildet folglich eine Modulbasis von $\mathfrak{A}$. Ist ein P-Modul $\mathfrak{B}$ endlichen Ranges durch einen anderen $\mathfrak{A}$ *gleichen* endlichen Ranges teilbar, $\mathfrak{B} \equiv 0\,(\mathfrak{A})$, so sind sie also identisch.

$x^2 + 1$ ein Ring ohne Nullteiler — dem Körper $\mathsf{P}(\sqrt{-1})$ isomorph — während beim Übergang zum Polynombereich mit Koeffizienten aus $\mathsf{P}(\sqrt{-1})$ Nullteiler auftreten, entsprechend daß $(x + i)(x - i) = (x^2 + 1)$, aber kein Faktor teilbar durch $x^2 + 1$.

Entsprechendes gilt etwa für jeden endlichen Zahlkörper; es ist das die zuerst von *Dedekind* für die höheren komplexen Zahlen ausgesprochene Auffassung. Vergl. hierzu § 6, 4. Schluß.

[1]) In der Bezeichnung von *H. Grell* (in der Anmerkung [6]), S. 83 zitierten Arbeit).

[2]) Idealtheorie, § 4, 3. Der Satz ist dort nur für Ideale des gleichen Rings ausgesprochen; dieselbe Überlegung zeigt aber die Gültigkeit in der obigen Form, für beliebige Ideale $\bar{\mathfrak{a}}$ aus $\overline{\mathfrak{R}}$. Denn durch den Ring-Homomorphismus $\overline{\mathfrak{R}} \sim \overline{\mathfrak{R}} \mid \bar{\mathfrak{a}}$ wird für den Unterring $\mathfrak{R}$ von $\overline{\mathfrak{R}}$ der Ring-Homomorphismus $\mathfrak{R} \sim (\mathfrak{R}, \bar{\mathfrak{a}}) \mid \bar{\mathfrak{a}}$ induziert. Bei diesem Homomorphismus entspricht allen und nur den Elementen aus $[\mathfrak{R}, \bar{\mathfrak{a}}]$ das Nullelement, und somit kommt der Ring-Isomorphismus: $(\mathfrak{R}, \bar{\mathfrak{a}}) \mid \bar{\mathfrak{a}} \simeq \mathfrak{R} \mid [\mathfrak{R}, \bar{\mathfrak{a}}]$. Die Klassen können dabei rechts und links durch dieselben Elemente aus $\mathfrak{R}$ repräsentiert werden; denn bei jedem Schritt des Beweises werden den Elementen die durch sie repräsentierten Klassen zugeordnet.

Von jetzt an sei $\mathfrak{R}$ *als vom endlichen Rang n in bezug auf* P *vorausgesetzt.* Dann wird jeder P-Modul aus $\mathfrak{R}$ von endlichem Rang; es muß also in jeder echten Teiler- oder Vielfachenkette von P-Moduln aus $\mathfrak{R}$ der Rang jedes Moduls größer, bzw. kleiner sein als der Rang des unmittelbar vorangehenden; die Ketten brechen im Endlichen ab. Insbesondere *gilt also der „Doppelkettensatz" für das System aller Ideale aus* $\mathfrak{R}$.

Hieraus folgt [1]), daß ein Primideal $\mathfrak{p}$ aus $\mathfrak{R}$ keinen vom Einheitsideal verschiedenen echten Teiler besitzt, daß also der *Restklassenring* $\mathfrak{R} \mid \mathfrak{p}$ *nach einem vom Einheitsideal verschiedenen Primideal ein Körper wird.* Ist $\mathfrak{q}$ ein zu $\mathfrak{p}$ gehöriges Primärideal, also $\mathfrak{q} \equiv 0\,(\mathfrak{p})$ und $\mathfrak{p}^{\varrho} \equiv 0\,(\mathfrak{q})$, so wird der *Restklassenring* $\mathfrak{R} \mid \mathfrak{q}$ *ein primärer Ring* — d. h. ein Ring in dem eine Potenz (und zwar hier jedenfalls schon die ϱ-te) jedes Nullteilers verschwindet, und *es enthält* $\mathfrak{R} \mid \mathfrak{q}$ *nur Nullteiler und Einheiten.* Letzteres folgt unmittelbar daraus, daß jedes nicht durch $\mathfrak{p}$ teilbare Ideal zu $\mathfrak{p}$, und damit zu $\mathfrak{q}$ teilerfremd wird.

Aus dem Doppelkettensatz und der Existenz des Einheitselementes folgt weiter [2]), daß *jedes Ideal* $\mathfrak{a}$ *aus* $\mathfrak{R}$ *sich eindeutig als Produkt von endlich vielen paarweise teilerfremden Primäridealen darstellen läßt.* Dies Produkt wird wegen der Teilerfremdheit gleich dem kleinsten gemeinsamen Vielfachen und entspricht einer Darstellung des Restklassenrings $\mathfrak{R} \mid \mathfrak{a}$ als direkter Summe von primären Ringen — [3]), d. h. $\mathfrak{R} \mid \mathfrak{a}$ wird der größte gemeinsame Teiler dieser Ringe, und die Summendarstellung jedes Elements aus $\mathfrak{R} \mid \mathfrak{a}$ ist eindeutig.

2. Darstellung der Ringe endlichen Ranges als direkte Summe primärer Ringe. Sei die Darstellung des Nullideals von $\mathfrak{R}$ gegeben durch

$$(0) = \mathfrak{q}_1 \cdot \mathfrak{q}_2 \cdots \mathfrak{q}_r = [\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \ldots, \mathfrak{q}_r];$$

und sei die entsprechende Darstellung als direkte Summe:

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2 + \cdots + \mathfrak{R}_r, \quad \mathfrak{R}_i \mathfrak{R}_k = (0) \text{ für } i \neq k, \quad \mathfrak{R}_i^2 = \mathfrak{R}_i, \quad \mathfrak{R}\,\mathfrak{R}_i = \mathfrak{R}_i.$$

Dabei wird $\mathfrak{R}_i$ Ideal aus $\mathfrak{R}$, und zwar wird

$$\mathfrak{R}_i = \mathfrak{q}_1 \cdots \mathfrak{q}_{i-1}\,\mathfrak{q}_{i+1} \cdots \mathfrak{q}_r = [\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_{i-1}, \mathfrak{q}_{i+1}, \ldots, \mathfrak{q}_r],$$
$$\mathfrak{q}_i = \mathfrak{R}_1 + \cdots + \mathfrak{R}_{i-1} + \mathfrak{R}_{i+1} + \cdots \mathfrak{R}_r,$$

und es wird $\mathfrak{R}_i$ *isomorph dem Restklassenring* $\mathfrak{R} \mid \mathfrak{q}_i$; und zwar entspricht jedem Element γ_i aus $\mathfrak{R}_i$ die durch γ_i repräsentierte Klasse in $\mathfrak{R} \mid \mathfrak{q}_i$ [4]). Ist $\mathfrak{a}$ ein beliebiges Ideal aus $\mathfrak{R}$, so kommt nach dem distributiven Gesetz:

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{R}\,\mathfrak{a} = \mathfrak{R}_1 \mathfrak{a} + \cdots + \mathfrak{R}_r \mathfrak{a} = \mathfrak{a}_1 + \cdots + \mathfrak{a}_r;$$

dabei sind wegen $\mathfrak{a}_i = \mathfrak{R}_i \mathfrak{a}_i = \mathfrak{R}\,\mathfrak{a}_i$ die *Komponenten* $\mathfrak{a}_i$ Ideale, sowohl in $\mathfrak{R}_i$ wie in $\mathfrak{R}$. Als Ideale sind die $\mathfrak{a}_i$ wie $\mathfrak{R}_i$ selbst endliche P-Moduln; wegen der *direkten* Summe addieren sich ihre Rangzahlen zum Rang von $\mathfrak{a}$ bzw. $\mathfrak{R}$.

---

[1]) Idealtheorie, § 7, 2.

[2]) Idealtheorie, § 7, 3. Satz V.

[3]) Idealtheorie, § 4, 5. Was in der jetzigen Zusammenstellung zugefügt ist, findet sich vielfach zerstreut in der Literatur.

[4]) Idealtheorie, § 4, 5.

Ist die Summendarstellung des Einheitselementes gegeben durch

$$e = \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_r, \quad \varepsilon_i \varepsilon_k = 0 \text{ für } i \neq k, \quad \varepsilon_i^2 = \varepsilon_i, \quad \varepsilon_i \equiv e(\mathfrak{q}_i),$$

so ergibt sich die Darstellung jedes beliebigen Elementes γ aus $\mathfrak{R}$ eindeutig durch

$$\gamma = \gamma e = \gamma \varepsilon_1 + \cdots + \gamma \varepsilon_r = \gamma_1 + \cdots + \gamma_r,$$

wo also die *Komponente* $\gamma_i = \gamma_i \varepsilon_i$ Element aus $\mathfrak{R}_i$; zugleich folgt $\mathfrak{R}_i = \mathfrak{R} \varepsilon_i$. Aus den „Orthogonalitätsrelationen" kommt:

$$\gamma \delta = (\gamma_1 \varepsilon_1 + \cdots \gamma_r \varepsilon_r)(\delta_1 \varepsilon_1 + \cdots + \delta_r \varepsilon_r) = \gamma_1 \delta_1 \varepsilon_1 + \cdots + \gamma_r \delta_r \varepsilon_r;$$

es wird also $\gamma_i \delta_i$ die i-te Komponente des Produktes, und ebenso $\gamma_i + \delta_i$ die i-te Komponente der Summe, Tatsachen die auch aus dem Homomorphismus von $\mathfrak{R}$ zu $\mathfrak{R}_i$ folgen.

Der Ring $\mathfrak{R}_i$ *enthält einen zu* P *isomorphen Unterkörper* $\mathsf{P}_i = \mathsf{P} \varepsilon_i$ und ist von *endlichem Rang in bezug auf* P_i; dieser Rang ist *gleich dem Rang* den $\mathfrak{R}_i$ *als* P*-Modul* besitzt. Denn für jedes Element c aus P wird $c \varepsilon_i \equiv ce \equiv c(\mathfrak{q}_i)$; also wird $c \varepsilon_i \neq 0$, sobald $c \neq 0$; der Homomorphismus zwischen P und P_i wird zum Isomorphismus. Da weiter jede lineare Abhängigkeit in bezug auf P von Elementen aus $\mathfrak{R}_i$ durch Multiplikation mit ε_i in eine solche in bezug auf P_i übergeht, und da umgekehrt — wegen $\mathsf{P}_i = \mathsf{P} \varepsilon_i$ — jede Relation in bezug auf P_i zugleich eine solche in bezug auf P darstellt, so stimmen die Rangzahlen in bezug auf P und P_i überein.

3. Direkte Summendarstellung von Erweiterungsringen. Ist $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_1 + \cdots + \mathfrak{R}_r$, so gilt *für* $\overline{\mathfrak{R}}$ *eine Darstellung*: $\overline{\mathfrak{R}} = \overline{\mathfrak{R}}_1 + \cdots + \overline{\mathfrak{R}}_r$, wo $\overline{\mathfrak{R}}_i$ *das Erweiterungsideal von* $\mathfrak{R}_i$ *in* $\overline{\mathfrak{R}}$ bedeutet, zugleich den *aus* $\mathfrak{R}_i$ *in* $\overline{\mathfrak{R}}$ *abgeleiteten Ring*. Denn aus $(0) = \mathfrak{q}_1 \ldots \mathfrak{q}_r$ folgt durch Multiplikation mit $\overline{\mathfrak{R}}$ die Produktdarstellung: $(\bar{0}) = \overline{\mathfrak{q}}_1 \ldots \overline{\mathfrak{q}}_r$, wo somit die $\overline{\mathfrak{q}}_i$ wieder paarweise teilerfremd werden. Also ergibt sich eine Darstellung als direkte Summe für $\overline{\mathfrak{R}}$; und da die i-te Komponente dieser Darstellung durch $\overline{\mathfrak{q}}_1 \ldots \overline{\mathfrak{q}}_{i-1}\, \overline{\mathfrak{q}}_{i+1} \ldots \overline{\mathfrak{q}}_r$ gegeben ist, wird sie gleich dem Erweiterungsideal von $\mathfrak{R}_i$. Dieses Erweiterungsideal ist aber nach § 1, 3 identisch mit dem aus $\mathfrak{R}_i$ in bezug auf $\overline{\mathsf{P}}_i = \overline{\mathsf{P}} \varepsilon_i$ gebildeten Erweiterungsring $\mathfrak{R}_i[\overline{\mathsf{P}}_i]$; es *genügt also bei Erweiterungen die einzelnen Komponenten zu erweitern*. Dabei wird $\overline{\mathfrak{R}}_i$ im allgemeinen kein primärer Ring mehr sein.

4. Primideale erster und zweiter Art. Nach 1. wird der Restklassenring $\mathfrak{R} \mid \mathfrak{p}$ nach jedem vom Einheitsideal verschiedenen Primideal ein Körper; dieser besitzt einen zu P isomorphen Unterkörper $(\mathsf{P}) = (\mathsf{P}, \mathfrak{p}) \mid \mathfrak{p} \simeq \mathsf{P} \mid [\mathsf{P}, \mathfrak{p}] \simeq \mathsf{P}$, da $\mathfrak{p}$ kein von Null verschiedenes Element aus P enthalten kann; es besteht also (P) aus allen und nur den Klassen, die durch Elemente aus P repräsentiert werden können [1]). Es wird $\mathfrak{R} \mid \mathfrak{p}$ von endlichem Rang in bezug auf (P), also endlicher algebraischer Erweiterungskörper. Je nachdem diese Erweiterung erster oder zweiter Art ist [2]), soll $\mathfrak{p}$ als Primideal erster oder zweiter Art bezeichnet werden.

---

[1]) Vgl. die Anmerkung zu § 1, 3 über den zweiten Isomorphiesatz.

[2]) In bekannter *Steinitz*scher Bezeichnung: eine algebraische Erweiterung heißt erster Art, wenn jedes Element Nullstelle einer Primfunktion ist, die in einem geeigneten Erweiterungskörper in lauter verschiedene Linearfaktoren zerfällt, sonst zweiter Art.

§ 3. Vollständig reduzible Ringe.

1. Der Ring $\mathfrak{R}$ heißt *vollständig reduzibel*, wenn in der Produktdarstellung seines Nullideals (§ 2, 2) alle Primärkomponenten *Primideale* werden; oder — was nach § 2, 1. und 2. damit identisch ist — wenn $\mathfrak{R}$ sich darstellen läßt als *direkte Summe von endlich vielen Körpern*. Der vollständig reduzible Ring heißt *vollständig reduzibel erster Art*, wenn *alle* Primideale von *erster Art* (§ 2, 4.); im entgegengesetzten Fall *vollständig reduzibel zweiter Art*.

Ist P ein vollkommener Körper, so gibt es also nur vollständige Reduzibilität erster Art; insbesondere ist dies stets der Fall bei algebraisch-abgeschlossenem Körper. Im folgenden bedeute speziell $\overline{\mathsf{P}}$ den aus P abgeleiteten algebraisch-abgeschlossenen Körper; und $\overline{\mathfrak{R}}$ sei gleich $\mathfrak{R}[\overline{\mathsf{P}}]$.

2. Satz. Der Ring $\mathfrak{R}$ ist dann und nur dann vollständig reduzibel erster Art, wenn der Erweiterungsring $\overline{\mathfrak{R}} = \mathfrak{R}[\overline{\mathsf{P}}]$ mit algebraisch-abgeschlossenem $\overline{\mathsf{P}}$ vollständig reduzibel (erster Art) ist.

Der Beweis erfolgt in drei Schritten:

2a. Aus vollständiger Reduzibilität von $\overline{\mathfrak{R}}$ — allgemeiner irgendeines Erweiterungsringes — folgt vollständige Reduzibilität (erster oder zweiter Art) von $\mathfrak{R}$.

Denn nach Voraussetzung gilt für das Nullideal von $\overline{\mathfrak{R}}$ eine Darstellung als kleinstes gemeinsames Vielfaches von Primidealen: $(\overline{0}) = [\overline{\mathfrak{p}}_1, \ldots, \overline{\mathfrak{p}}_s]$. Durch Durchschnittsbildung kommt in $\mathfrak{R}$ als Darstellung des Nullideals:
$(0) = [[\mathfrak{R}, \overline{\mathfrak{p}}_1], \ldots, [\mathfrak{R}, \overline{\mathfrak{p}}_s]]$; die Ideale $[\mathfrak{R}, \overline{\mathfrak{p}}_s]$ sind aber nach § 1, 3. Primideale.

2b. Aus vollständiger Reduzibilität erster Art von $\mathfrak{R}$ folgt vollständige Reduzibilität (erster Art) von $\overline{\mathfrak{R}}$, allgemeiner vollständige Reduzibilität erster Art jedes Zwischenrings von $\mathfrak{R}$ und $\overline{\mathfrak{R}}$.

Da nach § 2, 3. der Darstellung von $\mathfrak{R}$ als direkter Summe eine solche von $\overline{\mathfrak{R}}$ entspricht, derart, daß jede Komponente $\overline{\mathfrak{R}}_i$ Erweiterungsring $\mathfrak{R}_i[\overline{\mathsf{P}}_i]$ wird — wo $\overline{\mathsf{P}}_i$ zu $\overline{\mathsf{P}}$ isomorpher Erweiterungskörper des zu P isomorphen Unterkörpers P_i der Komponente $\mathfrak{R}_i$ ist — so genügt die Betrachtung der *einzelnen* Komponente $\mathfrak{R}_i$. Es kann also ohne Beschränkung der Allgemeinheit angenommen werden, daß $\mathfrak{R}$ *Körper*, und zwar *endlicher Erweiterungskörper erster Art seines Unterkörpers* P ist. Somit wird $\mathfrak{R}$ erzeugt durch Adjunktion *eines* primitiven Elementes (erster Art) zu P; anders ausgedrückt: es wird $\mathfrak{R}$ *isomorph dem Restklassenring* $\mathsf{P}[x] \mid f(x)$, wo $f(x)$ *eine Primfunktion erster Art* in dem Polynombereich $\mathsf{P}[x]$ einer Unbestimmten x bedeutet. Ist Ω ein Erweiterungskörper von P, so wird $\Omega[x] \mid f(x)$ isomorph zu $\mathfrak{R}[\Omega]$; denn da beim Übergang von $\mathsf{P}[x]$ zu $\Omega[x]$ der Rang des Restklassenrings erhalten bleibt — gleich dem Grad von $f(x)$ — so handelt es sich genau um die in § 1, 2. angegebene Konstruktion des Erweiterungsringes. In $\Omega[x]$ zerfällt $f(x)$ in paarweise teilerfremde Primfunktionen erster Art, deren jede ein Primideal in $\Omega[x]$ erzeugt; das heißt aber, daß $\Omega[x] \mid f(x)$ und damit *wegen des Isomorphismus*

auch $\mathfrak{R}[\Omega]$ *vollständig reduzibel erster Art* wird. Da dies für jeden Erweiterungskörper Ω, insbesondere auch für den algebraisch-abgeschlossenen $\bar{\mathsf{P}}$ gilt, ist damit 2 b. bewiesen.

2 c. Ist $\mathfrak{R}$ vollständig reduzibel zweiter Art, so ist $\bar{\mathfrak{R}}$ nicht vollständig reduzibel.

Wie unter 2 b. genügt es, $\mathfrak{R}$ *als Körper* und zwar als *endlichen Erweiterungskörper zweiter Art* von P anzunehmen. Es ist zu zeigen, daß in der Darstellung von $\bar{\mathfrak{R}}$ als direkte Summe primärer Ringe mindestens *eine eigentlich primäre Komponente* auftritt. Dazu genügt der Nachweis eines von Null verschiedenen Elementes aus $\bar{\mathfrak{R}}$, von dem eine Potenz verschwindet. Denn wenn $\bar{\beta} \neq 0$, muß mindestens *eine* Komponente $\bar{\beta}_\lambda \neq 0$ sein; wenn $\bar{\beta}^\sigma = 0$, muß $\bar{\beta}_\lambda^\sigma = 0$ sein (§ 2, 2., Homomorphismus von $\bar{\mathfrak{R}}$ zu $\bar{\mathfrak{R}}_\lambda$); und also wird $\bar{\mathfrak{R}}_\lambda$ kein Körper.

Sei γ ein Element zweiter Art aus $\mathfrak{R}$, vom Exponenten $f \geqq 1$; sei $F(\gamma) = \gamma^{k p^f} + c_1 \gamma^{(k-1) p^f} + \cdots + c_k = 0$ die Gleichung niedrigstens Grades, der γ in bezug auf P genügt, wo p die Charakteristik von P bedeutet; die Elemente $e, \gamma, \gamma^2, \ldots, \gamma^{k p^f - 1}$ aus $\mathfrak{R}$ sind also linear unabhängig in bezug auf P und bleiben folglich nach der Gleichheitsdefinition auch in $\bar{\mathfrak{R}}$ linear unabhängig in bezug auf $\bar{\mathsf{P}}$. Setzt man daher $G(\gamma) = \gamma^{k p^{f-1}} + \sqrt[p]{\bar{c}_1}\, \gamma^{(k-1)p^{f-1}} + \cdots + \sqrt[p]{\bar{c}_k}$, so wird $G(\gamma)$ ein *von Null verschiedenes* Element aus $\bar{\mathfrak{R}}$; denn wegen $p > 1$ und $f \geqq 1$ wird $k p^{f-1}$ stets kleiner als $k p^f$; es kann also keine Abhängigkeit zwischen den in $G(\gamma)$ auftretenden Potenzen von γ bestehen. Es wird aber $(G(\gamma))^p$ gleich $F(\gamma)$ und verschwindet somit; damit ist 2 c. bewiesen.

Aus 2 a. und 2 c. folgt, daß die vollständige Reduzibilität (erster Art) von $\bar{\mathfrak{R}}$ die vollständige Reduzibilität erster Art von $\mathfrak{R}$ nach sich zieht; aus 2 b. folgt die Umkehrung; damit ist der *Satz* unter 2. *bewiesen.*

3. Folgerung. Ist $\mathfrak{R}$ vollständig reduzibel erster Art, so wird $\bar{\mathfrak{R}}$ direkte Summe von Ringen vom Range eins, also von zu $\bar{\mathsf{P}}$ isomorphen Körpern. Eine solche Zerlegung in Ringe vom Rang eins existiert schon in einem Ring $\mathfrak{R}[\Omega]$, wo Ω endlicher Erweiterungskörper von P.

Denn $\bar{\mathfrak{R}}$ wird nach 2 b. direkte Summe von *Körpern*, die als endliche Erweiterungen von zu $\bar{\mathsf{P}}$ isomorphen Unterkörpern (§ 2, 2.) — wegen der algebraischen Abgeschlossenheit von $\bar{\mathsf{P}}$ — mit diesen Unterkörpern identisch werden. Es kommt somit

$$\bar{\mathfrak{R}} = \bar{\mathsf{P}}\bar{\varepsilon}_1 + \cdots + \bar{\mathsf{P}}\bar{\varepsilon}_n \quad \text{mit} \quad e = \bar{\varepsilon}_1 + \cdots + \bar{\varepsilon}_n ;$$

die Komponenten $\bar{\varepsilon}_\lambda$ von e bilden zugleich eine (linear unabhängige) Modulbasis von $\bar{\mathfrak{R}}$.

Werden die $\bar{\varepsilon}_\lambda$ nach § 1, 2. als lineare Kombinationen der γ aus $\mathfrak{R}$ mit Koeffizienten aus $\bar{\mathsf{P}}$ dargestellt, so bestimmt das System aller Koeffizienten einen *endlichen* Erweiterungskörper Ω von P; es gehören also die $\bar{\varepsilon}_\lambda$ zu $\mathfrak{R}[\Omega]$ und aus der

Eigenschaft der Modulbasis kommt: $\mathfrak{R}[\Omega] = \Omega\bar{\varepsilon}_1 + \cdots + \Omega\bar{\varepsilon}_n$. Es gilt somit schon in $\mathfrak{R}[\Omega]$ eine Zerlegung in Ringe vom Range eins, und in jedem Zwischenring von $\mathfrak{R}[\Omega]$ und $\overline{\mathfrak{R}}$ entstehen die unzerlegbaren Komponenten als Erweiterungsringe von $\Omega\bar{\varepsilon}_\lambda$ [1]).

§ 4. Matrizendarstellung, Spuren und Diskriminanten bei Ringen endlichen Ranges.

Die Voraussetzungen über den zugrunde liegenden Ring seien in diesem und dem nächsten Paragraphen etwas allgemeiner als bisher, um auch die Ordnungen in Zahl- und Funktionenkörpern zu umfassen. Es handelt sich um eine allgemeine und gleichmäßige Formulierung von im wesentlichen bekannten Dingen.

Voraussetzung: $\mathfrak{R}$ sei Erweiterungsring eines Ringes Σ ohne Nullteiler; das Einheitselement von $\mathfrak{R}$ sei schon in Σ gelegen. Für jeden Σ-Modul aus $\mathfrak{R}$ — also insbesondere für $\mathfrak{R}$ selbst — existiere wenigstens eine endliche Modulbasis, die aus in bezug auf Σ linear unabhängigen Elementen besteht. — Neben $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ wird $\beta_1, \ldots, \beta_s$ dann und nur dann linear unabhängige Modulbasis desselben Σ-Moduls, wenn die Transformationsdeterminante eine Einheit aus Σ ist.

Die Voraussetzung ist offenbar erfüllt für die bis jetzt betrachteten Ringe endlichen Ranges, wo Σ zum Körper P wird. Sie ist ebenfalls erfüllt für die Ordnungen in Zahl- und Funktionenkörpern, wo Σ der Ring der ganzen rationalen Zahlen, bzw. der Funktionalbereich wird [2]).

1. Zu $\mathfrak{R}$ homomorphe Matrizenringe. Sei $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ eine (linear unabhängige) Σ-Modulbasis des Ideals $\mathfrak{a}$, und γ ein beliebiges Element aus $\mathfrak{R}$. Dann gehört auch $\gamma\alpha_i$ zu $\mathfrak{a}$ und es bestehen somit Gleichungen, mit Koeffizienten aus Σ [3]):

$$\gamma\alpha_i = c_{1i}\alpha_1 + \cdots + c_{si}\alpha_s\,, \qquad (i = 1, \ldots, s)\,;$$

oder in Matrizenform, wenn jeweils $(\tau_1, \ldots, \tau_s)$ die aus diesen Elementen bestehende einzeilige Matrix bedeutet:

$$(\gamma\alpha_1, \ldots, \gamma\alpha_s) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_s)\begin{pmatrix} c_{11} \ldots c_{1s} \\ \vdots \quad\; \vdots \\ c_{s1} \ldots c_{ss} \end{pmatrix} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_s)C\,.$$

Durchläuft γ alle Elemente aus $\mathfrak{R}$, so bildet die Gesamtheit der vermöge der Basis α_i zugeordneten Matrizen C einen homomorphen Ring $R_\mathfrak{a}$; es wird $R_\mathfrak{a}$ isomorph dem Rest-

---

[1]) Man kann den kleinsten derartigen Erweiterungskörper Ω charakterisieren als Vereinigungskörper der durch die Komponenten $\mathfrak{R}_i = \mathfrak{R}\varepsilon_i$ von $\mathfrak{R}$ bestimmten *Galois*schen Körper. Sei nämlich $f_i(x)$ nach 2b. so gewählt, daß $\mathsf{P}[x]\,|\,f_i(x)$ jeweils zu der Komponente $\mathfrak{R}_i$ isomorph wird; sei $\Omega^{(i)}$ der in $\overline{\mathsf{P}}$ gelegene *Galois*sche Erweiterungskörper, der zur Zerlegung von $f_i(x)$ in Linearfaktoren gerade hinreicht; und sei Ω der Vereinigungskörper aller $\Omega^{(i)}$. Der Zerfällung von $f_i(x)$ in Linearfaktoren entspricht eine Darstellung von $\Omega^{(i)}[x]\,|\,f_i(x)$ als direkte Summe von Körpern vom Rang eins; und zwar ist $\Omega^{(i)}$ der kleinste Erweiterungskörper, wo dies statthat. Somit gilt wegen der Isomorphie das gleiche für $\mathfrak{R}_i[\Omega^{(i)}\varepsilon_i]$ und damit für $\mathfrak{R}[\Omega]$.

[2]) Vergl. Idealtheorie, § 3.

[3]) Elemente aus Σ werden mit lateinischen Buchstaben bezeichnet.

klassenring $\mathfrak{R}|((0):\mathfrak{a})$, *wo* $(0):\mathfrak{a}$ *den Idealquotienten des Nullideals durch* $\mathfrak{a}$ *bedeutet.* Denn die Differenz $\beta-\gamma$ ist offenbar $B-C$ zugeordnet; dasselbe gilt vom Produkt. Denn es kommt:

$$(\beta\gamma a_1, \ldots, \beta\gamma a_s) = (\beta a_1, \ldots, \beta a_s)C = (a_1, \ldots, a_s)BC\ ^{1}).$$

Den Elementen c aus Σ sind insbesondere die Diagonalmatrizen cE zugeordnet, wo E die dem Einheitselement e entsprechende Matrix $(^{e}{}_{\cdot}{}^{\cdot}{}_{e})$ bedeutet. Da ferner allen und nur den Elementen γ, für die $\gamma\mathfrak{a}$ gleich dem Nullideal wird, die Nullmatrix zugeordnet ist, so kommt der angegebene Isomorphismus.

Eine Basis $\bar{a}$ *von* $\mathfrak{a}$ *erzeugt einen zu* R_a *isomorphen und zwar äquivalenten Matrizenring* $R_{\bar{a}} = P^{-1}R_aP$. Sei $\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_s$ eine weitere (linear unabhängige) Σ-Modulbasis; also $(\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_s) = (a_1, \ldots, a_s)P$, wo die Determinante der Matrix P eine Einheit aus Σ wird. Somit kommt:

$$(\gamma\bar{a}_1, \ldots, \gamma\bar{a}_s) = (a_1, \ldots, a_s)CP = (\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_s)P^{-1}CP\ ^{1}) \text{ oder } R_{\bar{a}} = P^{-1}R_aP.$$

2. Idealklassen und Darstellungsklassen. Zwei Ideale $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ aus $\mathfrak{R}$ gehören *derselben Idealklasse* an, wenn sie — *aufgefaßt als* $\mathfrak{R}$*-Moduln — isomorph* sind, wenn also ihre Elemente sich derartig eineindeutig zuordnen lassen, daß Differenz und Multiplikation mit demselben Element aus $\mathfrak{R}$ sich entsprechen, so daß aus $\alpha \simeq \beta$ stets $\gamma\alpha \simeq \gamma\beta$ folgt für beliebiges γ aus $\mathfrak{R}$.

Zwei durch Matrizendarstellung nach 1. erzeugte Ringe R_a und $R_{\bar{a}}$ gehören *derselben Darstellungsklasse* an, wenn sie *äquivalent* sind, wenn es also eine (unimodulare) Matrix P gibt, so daß $R_{\bar{a}} = P^{-1}R_aP$ wird [2]).

Die Idealklassen und die Darstellungsklassen entsprechen sich eineindeutig. In 1. war gezeigt, daß die verschiedenen Modulbasen ein und desselben Ideals Ringe $R_a, R_{\bar{a}}$ erzeugen, die derselben Darstellungsklasse angehören; weiter erzeugen aber auch verschiedene Ideale $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ derselben Idealklasse Ringe derselben Darstellungsklasse. Denn sei $\beta_1, \ldots, \beta_s$ die vermöge des Isomorphismus der Basis $a_1, \ldots, a_s$ von $\mathfrak{a}$ zugeordnete Basis von $\mathfrak{b}$; dann entsprechen sich γa_i und $\gamma\beta_i$ und ebenso $c_{1i}a_1 + \cdots + c_{si}a_s$ und $c_{1i}\beta_1 + \cdots + c_{si}\beta_s$; somit werden die Ringe R_a und R_β identisch.

Gehören umgekehrt R_a und $R_{\bar{\beta}}$ derselben Darstellungsklasse an, wird also $R_{\bar{\beta}} = P^{-1}R_aP$ — wobei die a_i eine Basis von $\mathfrak{a}$, die $\bar{\beta}_i$ eine Basis von $\mathfrak{b}$ bilden — so wird auch durch $(\beta_1, \ldots, \beta_s) = (\bar{\beta}_1, \ldots, \bar{\beta}_s)P^{-1}$ eine Basis von $\mathfrak{b}$ gebildet, und es wird $R_\beta = PR_{\bar{\beta}}P^{-1} = R_a$. Ordnet man also jedem Element $\alpha = c_1a_1 + \cdots + c_sa_s$ aus $\mathfrak{a}$ das Element $\beta = c_1\beta_1 + \cdots + c_s\beta_s$ aus $\mathfrak{b}$ zu, so ist die Zuordnung eineindeutig, und Summe und Differenz entsprechen sich. Aus $R_a = R_\beta$ folgt aber weiter,

---

[1]) Die Schreibweise ist so angeordnet, daß sie erhalten bleibt bei nichtkommutativen Ringen $\mathfrak{R}$, für die Σ als mit allen Elementen vertauschbar vorausgesetzt ist.

[2]) Die in speziellen Fällen erledigte Frage, ob *jeder* homomorphe Matrizenring durch ein Ideal aus $\mathfrak{R}$ nach 1. zu erzeugen ist — eventuell bei Zulassung linear abhängiger Basen — wird hier nicht berührt. Die Darstellungsklassen bestehen nach Definition nur aus Matrizenringen, die durch Ideale aus $\mathfrak{R}$ nach 1. erzeugt sind.

daß γa_i und $\gamma \beta_i$ sich entsprechen, da sie sich durch dieselben Linearformen in den a_i bzw. β_i ausdrücken lassen; somit entsprechen sich allgemein γa und $\gamma \beta$; die Ideale $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ gehören derselben Idealklasse an. Als *Hauptklasse* wird die Klasse des Einheitsideals bezeichnet; jede Basis von $\mathfrak{R}$ ergibt also als Darstellungsklasse die Hauptklasse.

3. Spur eines Elementes bezüglich einer Klasse. Sei C die dem Element γ aus $\mathfrak{R}$ in R_a zugeordnete Matrix; der Übergang von R_a zu $R_{\bar{a}}$ zeigt, daß die Determinante $|C|$ und allgemeiner $|tE - C|$, wo t eine Unbestimmte bedeutet, eine Invariante der Darstellungsklasse ist. Damit handelt es sich nach 2. zugleich um eine Invariante der Idealklasse, also um eine *Klasseninvariante*, wie kurz gesagt werden soll. Es werden also die einzelnen Koeffizienten von t in $|tE - C|$ Klasseninvarianten; insbesondere soll der Koeffizient von $(-t^{s-1})$ als *Spur von γ in bezug auf die Klasse* bezeichnet werden; in Zeichen: $S_{(\mathfrak{a})}(\gamma) = c_{11} + c_{22} + \cdots + c_{ss}$. Der von t freie Koeffizient $\pm |C|$ wird als *Norm* von γ in bezug auf die Klasse bezeichnet.

Die Spuren $S_{(\mathfrak{a})}(\gamma)$ in bezug auf eine feste Klasse $(\mathfrak{a})$ *bilden einen Σ-Modul, zu dem $\mathfrak{R}$ — aufgefaßt als Σ-Modul — homomorph wird.* Denn nach dem unter 1. bewiesenen Ringhomomorphismus von $\mathfrak{R}$ zu R_a kommt: $(\beta - \gamma) \sim (B - C)$ und $c\beta \sim cEB = cB$. Daraus folgt aber für die Spuren: $S_{(\mathfrak{a})}(\beta - \gamma) = S_{(\mathfrak{a})}(\beta) - S_{(\mathfrak{a})}(\gamma)$ und $S_{(\mathfrak{a})}(c\beta) = cS_{(\mathfrak{a})}(\beta)$, also Moduleigenschaft und Homomorphismus.

Bemerkung: Ist $\mathfrak{R}$ ein Ring ohne Nullteiler, so ist die Spur eines Elementes unabhängig von der Klasse definiert; man kann also von Spur schlechthin reden; dasselbe gilt von der Norm. Denn wenn es sich um Ringe ohne Nullteiler handelt, so ist jedes (vom Nullideal verschiedene) Ideal vom Range des Rings; somit wird jede Basis eines Ideals zugleich Basis des Einheitsideals im Quotientenkörper. Alle Spuren und Normen werden also zugleich im Quotientenkörper durch das Einheitsideal erzeugt und sind somit unabhängig von der Klasse in $\mathfrak{R}$.

4. Diskriminante eines Ideals bezüglich einer Klasse. Es wird sich nicht die Diskriminante selbst, sondern erst das daraus in Σ abgeleitete Hauptideal als Invariante von Ideal und Klasse ergeben.

Denn seien $\varrho_1, \ldots, \varrho_r$ und $\bar{\varrho}_1, \ldots, \bar{\varrho}_r$ zwei (linear unabhängige) Σ-Modulbasen eines Ideals $\mathfrak{r}$ aus $\mathfrak{R}$. Die *Determinanten* $|S_{(\mathfrak{a})}(\varrho_i \varrho_k)|$ und $|S_{(\mathfrak{a})}(\bar{\varrho}_i \bar{\varrho}_k)|$ *unterscheiden sich nur um das Quadrat einer Einheit aus Σ als Faktor.* Dies gilt nämlich für die beiden Determinanten $|(\varrho_i \varrho_k)|$ und $|(\bar{\varrho}_i \bar{\varrho}_k)|$, die sich um das Quadrat der Transformationsdeterminante zwischen ϱ und $\bar{\varrho}$ unterscheiden. Wegen des unter 3. bewiesenen Modulhomomorphismus bestehen zwischen $S_{(\mathfrak{a})}(\varrho_i \varrho_k)$ und $S_{(\mathfrak{a})}(\bar{\varrho}_i \bar{\varrho}_k)$ dieselben linearen Beziehungen wie zwischen $\varrho_i \varrho_k$ und $\bar{\varrho}_i \bar{\varrho}_k$; also nimmt wegen der kogredienten Transformation die Determinante den gleichen Faktor an.

Als bis auf das Quadrat einer Einheit bestimmte *Diskriminante von $\mathfrak{r}$ bezüglich der Klasse* $(\mathfrak{a})$ wird jede Determinante $|S_{(\mathfrak{a})}(\varrho_i \varrho_k)|$ bezeichnet; als *Diskriminantenideal* das daraus in Σ abgeleitete Hauptideal.

Bemerkung: Ist $\mathfrak{R}$ ein Ring ohne Nullteiler, so wird die Diskriminante eines Ideals unabhängig von der zugrundegelegten Klasse.

Denn diese Unabhängigkeit ist nach 3. für jedes einzelne Element der Determinante erfüllt.

§ 5. Direkte Summen der Klassen.

1. Direkte Summe der Idealklasse oder Darstellungsklasse. Ist das Ideal $\mathfrak{a}$ direkte Summe, $\mathfrak{a} = \mathfrak{b} + \mathfrak{c}$, so folgt aus dem Isomorphismus, daß jedes Ideal $\bar{\mathfrak{a}}$ der Klasse direkte Summe wird, $\bar{\mathfrak{a}} = \bar{\mathfrak{b}} + \bar{\mathfrak{c}}$. Dabei wird jeweils $\bar{\mathfrak{b}}$ zu $\mathfrak{b}$ und $\bar{\mathfrak{c}}$ zu $\mathfrak{c}$ isomorph, die Ideale als $\mathfrak{R}$-Moduln aufgefaßt; man kann also von *direkter Summe der Idealklasse* und von den *Komponentenklassen* reden.

Ist ein Ring R_a einer Darstellungsklasse direkte Summe von Unterringen, die zugleich Ideale in R_a sind, so gilt das wegen des Isomorphismus für jeden Ring $R_{\bar{a}}$ der Darstellungsklasse, und zwar werden die Komponenten äquivalente Ringe. Man kann also von *direkter Summe der Darstellungsklasse* und von den *Komponentenklassen* reden.

Der direkten Summe der Idealklasse entspricht die direkte Summe der Darstellungsklasse; in diesem Sinn soll von direkter Summe der Klasse gesprochen werden[1]). Sei $\beta_1, \ldots, \beta_l$ eine Basis von $\mathfrak{b}$ und $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$ eine Basis von $\mathfrak{c}$; wegen der direkten Summe bilden dann die β und γ zusammen eine (linear unabhängige) Basis α von $\mathfrak{a}$. Ist R_a der vermöge dieser Basis erzeugte Matrizenring, so wird die einem beliebigen Element δ aus $\mathfrak{R}$ in R_a zugeordnete Matrix von der Form $\begin{pmatrix} D^{(\beta)} & 0 \\ 0 & D^{(\gamma)} \end{pmatrix}$. Definiert man daher als $R^{(\beta)}$ das System aller Matrizen $\begin{pmatrix} D^{(\beta)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und ist $R^{(\gamma)}$ entsprechend definiert, so ist zu zeigen, daß $R^{(\beta)}$ und $R^{(\gamma)}$ Unterringe von R_a bilden, und daß R_a *direkte Summe dieser* wird; zugleich werden $R^{(\beta)}$ bzw. $R^{(\gamma)}$ zu den aus $\mathfrak{b}$ bzw. $\mathfrak{c}$ erzeugten Ringen $\mathfrak{R}_\beta$ und $\mathfrak{R}_\gamma$ *isomorph.*

Denn $R^{(\beta)}$ entspricht durch Homomorphie allen solchen Elementen δ aus $\mathfrak{R}$, für die $\delta\mathfrak{c}$ verschwindet, die also dem Quotientenideal $(0) : \mathfrak{c}$ angehören; wegen des Homomorphismus wird somit $R^{(\beta)}$ Ideal in R_a, und das gleiche gilt für $R^{(\gamma)}$. Es wird R_a Summe dieser Ideale, und zwar direkte, da das Produkt $R^{(\beta)}R^{(\gamma)}$ der beiden Ringe verschwindet. Schließlich ergibt die Zuordnung der Matrix $D^{(\beta)}$ zu der $D^{(\beta)}$ und Nullen enthaltenen Matrix aus $R^{(\beta)}$ einen Isomorphismus zwischen $R^{(\beta)}$ und $\mathfrak{R}_\beta$; den Komponentenklassen $(\mathfrak{b})$ und $(\mathfrak{c})$ der Idealklasse von $\mathfrak{a}$ entsprechen in diesem Sinn die Komponentenklassen von R_a.

2. Verhalten von Spur und Diskriminante bei direkter Summe der Klassen. Ist $\mathfrak{a} = \mathfrak{b} + \mathfrak{c}$ und legt man zur Bestimmung der Spur $S_{(\mathfrak{a})}(\delta)$ die Matrix $\begin{pmatrix} D^{(\beta)} & 0 \\ 0 & D^{(\gamma)} \end{pmatrix}$ zugrunde, so liest man daraus unter Berücksichtigung von 1. ab:

Die Spur eines Elementes, genommen in bezug auf eine Klasse, ist die Summe der Spuren, genommen in bezug auf die Komponentenklassen.

Wegen des Verschwindens des Produktes $\mathfrak{b}\mathfrak{c}$ liest man weiter ab:

---

[1]) Auf die Frage, inwieweit alle direkten Summen der Darstellungsklassen durch direkte Summen der Idealklassen erzeugt werden können, soll wieder nicht eingegangen werden.

Ist β Element aus $\mathfrak{b}$, so wird $S_{(\mathfrak{a})}(\beta) = S_{(\mathfrak{b})}(\beta)$; die Spur von β genommen in bezug auf die Klasse $(\mathfrak{a})$ ist gleich der Spur genommen in bezug auf die Klasse $(\mathfrak{b})$.

Daraus folgt unter Berücksichtigung von § 4, 4. weiter:

Das Diskriminantenideal des Komponentenideals $\mathfrak{b}$, genommen in bezug auf die Klasse $(\mathfrak{a})$, ist gleich dem Diskriminantenideal von $\mathfrak{b}$, genommen in bezug auf die Komponentenklasse $(\mathfrak{b})$.

Und schließlich kommt:

Das Diskriminantenideal von $\mathfrak{a}$, genommen in bezug auf die Klasse $(\mathfrak{a})$, ist gleich dem Produkt der Diskriminantenideale der Komponenten, genommen in bezug auf die Komponentenklassen. Denn legt man sowohl zur Diskriminantenbildung wie zur Bildung der Spur die der direkten Summe entsprechende Basis der β, γ zugrunde, so ist eine Basis des Diskriminantenideals von $\mathfrak{a}$, genommen in bezug auf $(\mathfrak{a})$, gegeben durch

$$\begin{vmatrix} S_{(\mathfrak{a})}(\beta_i \beta_k) & 0 \\ 0 & S_{(\mathfrak{a})}(\gamma_\mu \gamma_\nu) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} S_{(\mathfrak{b})}(\beta_i \beta_k) & 0 \\ 0 & S_{(\mathfrak{c})}(\gamma_\mu \gamma_\nu) \end{vmatrix} \quad \begin{pmatrix} i, k = 1, \ldots, l \\ \mu, \nu = 1, \ldots, m \end{pmatrix}.$$

3. Übergang zu Erweiterungsringen. Sei $\overline{\Sigma}$ ein Erweiterungsring ohne Nullteiler von Σ derart, daß der Durchschnitt von $\mathfrak{R}$ und $\overline{\Sigma}$ durch Σ gegeben ist; sei der durch Adjunktion von $\overline{\Sigma}$ entstandene Erweiterungsring $\overline{\mathfrak{R}} = \mathfrak{R}[\overline{\Sigma}]$ wie in § 1, 2. als Ring gleichen Ranges definiert.

Sind $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{r}$ Ideale in $\mathfrak{R}$ und $\bar{\mathfrak{a}}$ und $\bar{\mathfrak{r}}$ ihre Erweiterungsideale in $\overline{\mathfrak{R}}$, so wird auch das Diskriminantenideal von $\bar{\mathfrak{r}}$, genommen in bezug auf $(\bar{\mathfrak{a}})$, Erweiterungsideal in $\overline{\Sigma}$ des von $\mathfrak{r}$ in bezug auf $(\mathfrak{a})$ genommenen. Denn da jede Basis von $\mathfrak{a}$ oder $\mathfrak{r}$ auch $\overline{\Sigma}$-Modulbasis von $\bar{\mathfrak{a}}$ oder $\bar{\mathfrak{r}}$ ist, kann zur Diskriminantenkonstruktion von $\bar{\mathfrak{r}}$ in bezug auf $(\bar{\mathfrak{a}})$ eine Basis von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{r}$ zugrunde gelegt werden. Insbesondere wird also das Diskriminantenideal von $\overline{\mathfrak{R}}$ in bezug auf die Hauptklasse $(\overline{\mathfrak{R}})$ Erweiterungsideal desjenigen von $\mathfrak{R}$ in bezug auf die Hauptklasse $(\mathfrak{R})$; dieses so definierte Ideal in Σ, bzw. $\overline{\Sigma}$ soll kurz als das *Diskriminantenideal des Ringes* bezeichnet werden.

§ 6. Diskriminantenkriterium der vollständigen Reduzibilität erster Art.

Von jetzt an sei $\mathfrak{R}$ *wieder als Erweiterungsring eines Körpers* P *vorausgesetzt* und $\overline{\mathsf{P}}$ sei *Erweiterungskörper* von P. Als notwendige und hinreichende Bedingung für vollständige Reduzibilität erster Art wird sich das Nichtverschwinden der Diskriminante ergeben. Nach § 5, 3. läßt sich das Diskriminantenideal von $\mathfrak{R}$ vermöge des Erweiterungsringes $\overline{\mathfrak{R}} = \mathfrak{R}[\overline{\mathsf{P}}]$ bestimmen; und zwar genügt es nach § 5, 2., sich auf die primären Ringe zu beschränken, aus denen sich $\overline{\mathfrak{R}}$ additiv zusammensetzt. Es sollen daher vorerst Diskriminantenideale primärer Ringe betrachtet werden.

1. Spezielle P-Modulbasen. Sind $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{t}$ Ideale aus $\mathfrak{R}$ und ist $\mathfrak{a}$ *teilbar durch* $\mathfrak{t}$, so läßt sich *jede Basis* $a_1, \ldots, a_s$ *von* $\mathfrak{a}$ durch Hinzufügung von Elementen $\tau_{s+1}, \ldots, \tau_t$

zu einer (linear unabhängigen) *Modulbasis von* t *ergänzen* [1]). Es ist das eine unmittelbare Folge des vorausgesetzten endlichen Ranges in bezug auf den Körper P.

Es sei jetzt $\mathfrak{R}$ als *primärer Ring vorausgesetzt*; sei $\mathfrak{p}$ das zum Nullideal gehörige Primideal, ϱ der Exponent; also $\mathfrak{p}^{\varrho} = (0)$; $\mathfrak{p}^{\varrho-1} \neq (0)$. Dann ergibt sich eine spezielle P-Modulbasis von $\mathfrak{R}$, indem man sukzessive eine Basis von $\mathfrak{p}^{\varrho-1}$ zu einer solchen von $\mathfrak{p}^{\varrho-2}$ ergänzt, allgemein eine solche von $\mathfrak{p}^{\lambda}$ zu einer Basis von $\mathfrak{p}^{\lambda-1}$, wobei $\mathfrak{R}$ als $\mathfrak{p}^{0}$ zu zählen ist. Vermöge einer solchen Basis läßt sich zeigen:

Ist $\mathfrak{R}$ *primärer Ring, so verschwindet die in bezug auf die Hauptklasse* (§ 4, 2.) *genommene Spur jedes durch das zugehörige Primideal* $\mathfrak{p}$ *teilbaren Elementes.* Sei nämlich $\pi_{0,1}, \ldots, \pi_{0,i_0}; \pi_{1,1}, \ldots, \pi_{1,i_1}; \ldots; \pi_{\varrho-1,1}, \ldots, \pi_{\varrho-1,i_{\varrho-1}}$ eine solche spezielle P-Modulbasis mit $\pi_{\lambda,j} \equiv 0\,(\mathfrak{p}^{\lambda})$, $\not\equiv 0\,(\mathfrak{p}^{\lambda+1})$. Aus $\pi \equiv 0\,(\mathfrak{p})$ folgt $\pi\,\pi_{\lambda,j} \equiv 0\,(\mathfrak{p}^{\lambda+1})$; also enthält die π vermöge dieser Basis zugeordnete Matrix in der Diagonale nur Nullen; die Spur von π verschwindet.

2. Diskriminantenideale primärer Ringe mit algebraisch-abgeschlossenem Unterring P. Ist das Nullideal von $\mathfrak{R}$ *Primideal* und P algebraisch abgeschlossen, so wird $\mathfrak{R}$ vom Range eins, also mit P identisch (§ 3, 3.); das Einheitselement e kann als Modulbasis genommen werden. Damit kommt aber: $S_{(\mathfrak{R})}(e^2) = S_{(\mathfrak{R})}(e) = e$; das *Diskriminantenideal wird gleich dem Einheitsideal.*

Es läßt sich weiter zeigen, daß das *Diskriminantenideal eines eigentlich primären Rings* mit algebraisch abgeschlossenem Unterring P *gleich dem Nullideal* wird. Legt man für $\mathfrak{R}$ die unter 1. gegebene spezielle Modulbasis zugrunde — oder ergänzt man nur irgendeine Basis von $\mathfrak{p}$ zu einer Basis von $\mathfrak{R}$ —, so wird i_0 gleich eins, da der Restklassenring $\mathfrak{R} \mid \mathfrak{p}$ ein Ring vom Rang eins wird; als $\pi_{0,1}$ kann etwa das Einheitselement e genommen werden. Damit werden aber alle von e^2 verschiedenen Basisprodukte durch $\mathfrak{p}$ teilbar, und ihre in bezug auf die Hauptklasse genommene Spur verschwindet. Damit verschwindet aber auch die Diskriminante als mindestens zweireihige Determinante — $\mathfrak{R}$ war als eigentlich primär vorausgesetzt, muß also mindestens ein von e verschiedenes Basiselement besitzen —, für die alle von $S_{(\mathfrak{R})}(e^2)$ verschiedenen Elemente verschwinden.

3. Satz. Der Ring $\mathfrak{R}$ von endlichem Rang in bezug auf einen Unterkörper P ist dann und nur dann vollständig reduzibel erster Art, wenn sein Diskriminantenideal das Einheitsideal in P ist — m. a. W. wenn die bis auf das Quadrat einer Einheit bestimmte Diskriminante von Null verschieden ist.

Die vollständige Reduzibilität erster Art ist nach dem Satz § 3, 2. identisch damit, daß der Erweiterungsring $\overline{\mathfrak{R}} = \mathfrak{R}[\overline{\mathsf{P}}]$ vollständig reduzibel ist, daß also dessen

---

[1]) Die durch diese Basis vermittelte Matrizendarstellung eines beliebigen Elementes γ wird dann von der Form $\begin{pmatrix} C_\alpha & 0 \\ C_1 & C_2 \end{pmatrix}$, und umgekehrt folgt aus einer solchen, durch t vermittelten Matrizendarstellung die Existenz eines Vielfachen α von t. Da bei vollständiger Reduzibilität die unzerlegbaren Komponenten kein vom Null- oder Einheitsideal verschiedenes Ideal besitzen, kann in der Darstellungsklasse dieser Komponentenideale eine solche Darstellung nicht auftreten. Nimmt man den in § 5, 1. gegebenen Zusammenhang zwischen direkter Summe der Klassen hinzu, so *kommt man auf die in der Literatur übliche Definition der vollständigen Reduzibilität.*

unzerlegbare Komponenten zu $\overline{\mathsf{P}}$ isomorphe Körper werden. Nach § 5, 3. ist das Diskriminantenideal von $\mathfrak{R}$ und $\overline{\mathfrak{R}}$ gleichzeitig Null- bzw. Einheitsideal, und es wird das Diskriminantenideal von $\overline{\mathfrak{R}}$ nach § 5, 2. das Produkt der Diskriminantenideale der Komponenten, genommen in bezug auf diese Komponenten. Diese einzelnen Diskriminantenideale entstehen aber aus den unter 2. betrachteten — wo die Komponenten als für sich betrachtete Ringe und nicht als Ideale von $\overline{\mathfrak{R}}$ auftreten — indem jeweils der zu $\overline{\mathsf{P}}$ isomorphe Körper $\overline{\mathsf{P}}_i = \overline{\mathsf{P}}\bar{\varepsilon}_i$ durch $\overline{\mathsf{P}}$ selbst ersetzt wird. Daraus folgt, daß bei vollständiger Reduzibilität von $\overline{\mathfrak{R}}$ das Diskriminantenideal von $\overline{\mathfrak{R}}$ als Produkt von Einheitsidealen selbst das Einheitsideal wird, während, wenn $\overline{\mathfrak{R}}$ nicht vollständig reduzibel, für mindestens eine Komponente das Diskriminantenideal gleich dem Nullideal wird, wodurch auch für das Diskriminantenideal von $\overline{\mathfrak{R}}$ sich das Nullideal ergibt. Damit ist der Satz bewiesen.

4. Darstellung von Spur, Norm und Diskriminante durch konjugierte Elemente im Fall der vollständigen Reduzibilität erster Art. Sei nach § 3, 3. bei vollständiger Reduzibilität erster Art $\mathfrak{R}[\Omega] = \Omega\bar{\varepsilon}_1 + \cdots + \Omega\bar{\varepsilon}_n$ eine Darstellung als direkte Summe von Ringen vom Rang eins — also von zu Ω isomorphen Körpern — und sei Ω der kleinste Erweiterungskörper, in dem eine solche Darstellung möglich. Die n Komponenten von $\mathfrak{R}$ sind dann gegeben durch $K_i\bar{\varepsilon}_i$, wo jeweils K_i Unterkörper von Ω und wo $\mathfrak{R}$ homomorph zu K_i; es sollen Spur, Norm und Diskriminante (inbezug auf die Hauptklasse) durch *Elemente aus K_i ausgedrückt* werden.

Legt man $\bar{\varepsilon}_1, \ldots, \bar{\varepsilon}_n$ als Modulbasis zugrunde, so wird jedem Element $\gamma = c_1\bar{\varepsilon}_1 + \cdots + c_n\bar{\varepsilon}_n$ die Matrix $\begin{pmatrix} c_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & c_n \end{pmatrix}$ zugeordnet, wobei also c_λ Element aus K_λ, wenn γ Element aus $\mathfrak{R}$. Somit kommt: $S(\gamma) = c_1 + \cdots + c_n$, $N(\gamma) = c_1 \cdots c_n$, unter $S(\gamma)$ die Spur, $N(\gamma)$ die Norm in bezug auf die Hauptklasse verstanden.

Bedeutet weiter $a_1, \ldots, a_n$ eine aus Elementen aus $\mathfrak{R}$ bestehende Modulbasis von $\mathfrak{R}$, so ist die Diskriminante $|S(a_i a_k)|$ durch Elemente aus allen K_λ auszudrücken. Sei $a_i = a_i^{(1)}\bar{\varepsilon}_1 + \cdots + a_i^{(n)}\bar{\varepsilon}_n$, also $a_i a_k = a_i^{(1)} a_k^{(1)}\bar{\varepsilon}_1 + \cdots + a_i^{(n)} a_k^{(n)}\bar{\varepsilon}_n$ und $S(a_i a_k) = a_i^{(1)} a_k^{(1)} + \cdots + a_i^{(n)} a_k^{(n)}$, so kommt

$$|S(a_i a_k)| = \Big|\sum_\lambda a_i^{(\lambda)} a_k^{(\lambda)}\Big| = \begin{vmatrix} a_1^{(1)} & \cdots & a_n^{(1)} \\ \vdots & & \vdots \\ a_n^{(1)} & \cdots & a_n^{(n)} \end{vmatrix}^2.$$

Ist insbesondere $\mathfrak{R}$ *selbst Körper*, also Erweiterungskörper erster Art des Unterkörpers P, so geht der Homomorphismus von $\mathfrak{R}$ zu K_i in einen *Isomorphismus* über, wobei die Elemente aus P sich selbst entsprechen — denn die Komponente von P ist gegeben durch $\mathsf{P}\varepsilon_i$. Die K_i werden somit — da sie alle in dem gemeinsamen Umfassungskörper Ω gelegen sind — in bezug auf P konjugierte Körper; und zwar sind die n Isomorphismen alle unter sich verschieden, wie die obige Determinantendarstellung der von Null verschiedenen Diskriminante $|S(a_i a_k)|$ zeigt.

Ist $\mathfrak{R}$ *Körper, so ergibt also die Darstellung als direkte Summe in* $K_1, \ldots, K_n$ *die n konjugierten, im Galoisschen Erweiterungskörper gelegenen und zu* $\mathfrak{R}$ *isomorphen Erweiterungskörper n-ten Grades über* P. *Die Darstellung von Spur, Norm und Diskriminante geht in die bekannte Darstellung durch konjugierte Elemente über.* Dabei sei nochmals darauf hingewiesen, daß $\mathfrak{R}$ nur als zu den K_i äquivalenter und nicht im Galoisschen Erweiterungskörper Ω gelegener Körper vorausgesetzt ist [1]).

§ 7. Der Diskriminantensatz für die Ordnungen eines algebraischen Zahl- oder Funktionenkörpers.

1. Die in Betracht kommenden Zahl- und Funktionenkörper — wobei es sich bei algebraischen Funktionen von mehr als einer Unbestimmten und bei ganzzahligen algebraischen Funktionen um Erweiterung des Funktionalbereichs handelt — ordnen sich alle dem folgenden Körpertypus mit Festlegung der ganzen Elemente unter [2]):

Sei $\mathfrak{h}$ ein *Hauptidealring ohne Nullteiler* und *mit Einheitselement* (Ring der ganzen rationalen Zahlen, Polynombereich einer Unbestimmten mit Koeffizienten aus einem Körper, Funktionalbereich) und $\mathfrak{K}$ sein *Quotientenkörper*; sei $\mathfrak{L}$ eine *endliche Erweiterung erster Art* von $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{S}$ der *Ring aller in bezug auf* $\mathfrak{h}$ *ganzen Größen* aus $\mathfrak{L}$ [3]). *Jeder Unterring von* $\mathfrak{S}$, *der* $\mathfrak{h}$ *umfaßt, wird eine Ordnung genannt*; $\mathfrak{S}$ *selbst wird als Hauptordnung bezeichnet.*

Jeder $\mathfrak{h}$-Modul in $\mathfrak{S}$, insbesondere alle Ideale einer Ordnung und die Ordnung selbst, besitzen eine *linear unabhängige Modulbasis* in bezug auf $\mathfrak{h}$ [4]). Ist $\mathfrak{L}$ vom Grade n in bezug auf $\mathfrak{K}$, so genügt es sich auf Ordnungen vom Range n in bezug auf $\mathfrak{h}$ zu beschränken, da jede Ordnung von niedrigerem Rang durch Quotientenbildung einen Zwischenkörper von $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{L}$ von eben diesem Grad erzeugt, für den alle Voraussetzungen erhalten bleiben.

Jede *Ordnung* $\mathfrak{T}$ ist also ein Ring, für den die *allgemeineren Voraussetzungen* von § 4 und § 5 *zutreffen*, und zwar ein Ring ohne Nullteiler; somit ist die *Diskriminante* $D_{\mathfrak{T}}$ *der Ordnung* bis auf das Quadrat einer Einheit aus $\mathfrak{h}$ als Faktor *eindeutig definiert.* Diese Diskriminante ist zugleich bis auf eine Einheit aus $\mathfrak{K}$ als Faktor mit der Diskriminante des Körpers $\mathfrak{L}$, dieser aufgefaßt als $\mathfrak{K}$-Modul, identisch und somit *von Null verschieden*, da $\mathfrak{L}$ als Erweiterung erster Art vorausgesetzt war (§ 6, 3.). Die Diskriminante läßt zugleich die in § 6, 4. gegebene Darstellung durch das Determinantenquadrat konjugierter Basiselemente zu.

Die Idealtheorie in $\mathfrak{T}$ ist gegeben durch den Satz [5]): *In* $\mathfrak{T}$ *läßt sich jedes vom Nullideal verschiedene Ideal eindeutig darstellen als Produkt von endlich vielen paarweise teilerfremden Primäridealen, deren zugehörige Primideale keinen vom Einheitsideal verschiedenen echten Teiler besitzen.*

---

[1]) Vergl. hierzu letzte Anmerkung zu § 1, 2.
[2]) Idealtheorie, § 3, 3. und 4.
[3]) Zur Definition der in bezug auf einen Ring ganzen Größen vergl. Idealtheorie, § 1, 3.
[4]) Idealtheorie, § 3, 1.
[5]) Idealtheorie, § 7, 3.

2. Übergang von der Ordnung zu den Ringen endlichen Ranges in bezug auf einen Körper. Sei p eine Primgröße aus $\mathfrak{H}$, also das aus p in $\mathfrak{H}$ abgeleitete Hauptideal ein von Null- und Einheitsideal verschiedenes Primideal $\mathfrak{H}p$ aus $\mathfrak{H}$; bezeichne entsprechend $\mathfrak{T}p$ das aus p in $\mathfrak{T}$ abgeleitete Hauptideal [1]). *Der Restklassenring* $\mathfrak{R} = \mathfrak{T}|\mathfrak{T}p$ *wird ein Ring vom Range n in bezug auf einen zu dem Körper* $\mathfrak{H}|\mathfrak{H}p$ *isomorphen Unterkörper* P; *es wird* $\mathfrak{T}$ *homomorph zu* $\mathfrak{T}|\mathfrak{T}p$. Die Homomorphie $\mathfrak{T} \sim \mathfrak{T}|\mathfrak{T}p$ gilt allgemein für jeden Restklassenring; daß $\mathfrak{R}$ einen zu $\mathfrak{H}|\mathfrak{H}p$ isomorphen Unterkörper P enthält, folgt aus dem zweiten Isomorphiesatz [2]); denn der Unterring $(\mathfrak{H}, \mathfrak{T}p)|\mathfrak{T}p$ wird isomorph zu $\mathfrak{H}|[\mathfrak{H}, \mathfrak{T}p] = \mathfrak{H}|\mathfrak{H}p$. Schließlich wird $\mathfrak{R}$ auch vom Range n in bezug auf P. Denn sei etwa $a_1, \ldots, a_n$ eine linear unabhängige Modulbasis von $\mathfrak{T}$ in bezug auf $\mathfrak{H}$ und seien $(a_1), \ldots, (a_n)$ die durch die Elemente a_i bestimmten Restklassen nach $\mathfrak{T}p$. Dann entsteht jede in bezug auf P lineare Abhängigkeit zwischen den (a_i) durch den Homomorphismus aus einer Kongruenz: $c_1 a_1 + \cdots + c_n a_n \equiv 0 \ (\mathfrak{T}p)$, also aus einer Relation: $c_1 a_1 + \cdots + c_n a_n = p\gamma$, wo γ Element aus $\mathfrak{T}$. Aus der Darstellbarkeit von γ durch die Basis der a_i und aus der Eindeutigkeit dieser Darstellung folgt aber, daß jedes c_i durch p teilbar wird, daß also das Element (c_i) aus P verschwindet, womit die Linearunabhängigkeit der (a_i) in bezug auf P gezeigt ist.

Durch den Homomorphismus geht die Diskriminante $D_{\mathfrak{T}}$ *von* $\mathfrak{T}$ *in die Diskriminante von* $\mathfrak{R}$ *über, die Idealzerlegung von* $\mathfrak{T}p$ *in die Zerlegung des Nullideals von* $\mathfrak{R}$. Denn wegen der eben bewiesenen Linearunabhängigkeit der (a_i) kann die Diskriminante von $\mathfrak{R}$ vermöge dieser Basis und als $|S((a_i)(a_k))|$ gebildet werden, entsteht also vermöge des Homomorphismus aus der vermöge der Basis der a_i gebildeten Diskriminante $|S(a_i a_k)|$ von $\mathfrak{T}$. Zur Definition der Spur ist dabei die Matrizendarstellung zugrunde gelegt und nicht die für $\mathfrak{T}$, nicht aber notwendig für $\mathfrak{R}$ gültige Darstellung durch konjugierte Elemente; die Spur und damit die Diskriminante entsteht also durch Ringverknüpfungen aus Ringelementen.

Ist $\mathfrak{T}p = \mathfrak{q}_1 \ldots \mathfrak{q}_r = [\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_r]$ die Darstellung von $\mathfrak{T}p$ in $\mathfrak{T}$, so geht diese durch den Homomorphismus über in $(0) = [(\mathfrak{q}_1), \ldots, (\mathfrak{q}_r)]$ in $\mathfrak{R}$. Dabei wird nach dem ersten Isomorphiesatz [3]) $\mathfrak{R}|(\mathfrak{q}_i)$ isomorph zu $\mathfrak{T}|\mathfrak{q}_i$; es sind also gleichzeitig $\mathfrak{q}_i$ und $(\mathfrak{q}_i)$ eigentliche Primärideale oder Primideale; wegen des Homomorphismus sind die $(\mathfrak{q}_i)$ paarweise teilerfremd.

3. Diskriminantensatz. *Eine Primgröße p aus* $\mathfrak{H}$ *geht dann und nur dann in der Diskriminante* $D_{\mathfrak{T}}$ *einer Ordnung* $\mathfrak{T}$ *auf, wenn in der Zerlegung des Hauptideals* $\mathfrak{T}p$ *in paarweise teilerfremde Primärkomponenten aus* $\mathfrak{T}$ *mindestens eine eigentliche Primärkomponente oder mindestens ein Primideal zweiter Art auftritt* [4]).

---

[1]) Diese Bezeichnung der Hauptideale wird von jetzt an gewählt, um zugleich den Ring anzugeben, in dem sie betrachtet werden.

[2]) Vergl. letzte Anmerkung zu § 1.

[3]) Vergl. Idealtheorie § 4, 3 und § 6 (nach Satz II).

[4]) Ein Beispiel für das Auftreten von Primidealen zweiter Art ist das folgende: Sei $\mathfrak{H}$ der aus allen Polynomen in x mit ganzen rationalen Zahlkoeffizienten abgeleitete Funktionalbereich, $\mathfrak{K}$ der Quotientenkörper und $\mathfrak{L}$ der durch Adjunktion von $\sqrt{x}$ entstehende Erweiterungskörper. Betrachtet wird die Ordnung $\mathfrak{T}$ mit der Modulbasis 1, $\sqrt{x}$ in bezug auf $\mathfrak{H}$ (es handelt sich, wie die

Ist der Restklassenkörper $\mathfrak{H}|\mathfrak{H}p$ ein vollkommener Körper, so besitzt also jede in $D_{\mathfrak{T}}$ aufgehende Primgröße p (und nur diese) mindestens eine eigentliche Primärkomponente. Ist $\mathfrak{H}|\mathfrak{H}p$ vollkommen und wird für $\mathfrak{T}$ die Hauptordnung $\mathfrak{S}$ gewählt, so geht also p dann und nur dann in der Diskriminante auf, wenn es mindestens durch das Quadrat eines Primideals aus $\mathfrak{S}$ teilbar ist.

Denn wegen des Entsprechens der Idealzerlegung des Hauptideals $\mathfrak{T}p$ in $\mathfrak{T}$ und des Nullideals in $\mathfrak{R} = \mathfrak{T}|\mathfrak{T}p$ (vgl. 2.) bedeutet das Auftreten einer eigentlichen Primärkomponente oder eines Primideals zweiter Art von $\mathfrak{T}p$, daß $\mathfrak{R}$ *nicht* vollständig reduzibel erster Art ist. Das ist aber nach dem Satz § 6, 3. dann und nur dann der Fall, wenn die Diskriminante von $\mathfrak{R}$ verschwindet, was wegen des Homomorphismus nach 2. die Teilbarkeit von $D_{\mathfrak{T}}$ durch p aussagt.

§ 8. Der Diskriminantensatz für die Ordnungen von Relativkörpern.

Legt man statt des Hauptidealrings $\mathfrak{H}$ schon als *Ausgangsring die Hauptordnung eines Zahl- oder Funktionenkörpers zugrunde* — allgemeiner einen *Multiplikationsring* [1]), d. h. einen Ring, in dem die Idealtheorie der Hauptordnung gilt — so tritt an Stelle der Diskriminante $D_{\mathfrak{T}}$ das *Diskriminantenideal* von $\mathfrak{T}$ in bezug auf $\mathfrak{H}$ [2]); der Diskriminantensatz überträgt sich vollständig vermöge der folgenden Überlegungen.

1. Sei $\mathfrak{H}$ ein *Multiplikationsring*, also ein Ring ohne Nullteiler und mit Einheitselement, in dem jedes von Null- und Einheitsideal verschiedene Ideal sich eindeutig als Potenzprodukt von Primidealen darstellen läßt, und wo diese Primideale keinen vom Einheitsideal verschiedenen echten Teiler besitzen [3]). Seien weiter $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{T}$ wie unter § 7, 1. definiert; dann gilt in $\mathfrak{T}$ die unter § 7, 1. angegebene Idealtheorie [4]).

Substitution $x = y^2$ zeigt, um die Hauptordnung). Die Diskriminante ergibt sich zu $\begin{vmatrix} 1 & \sqrt{x} \\ 1 & -\sqrt{x} \end{vmatrix}^2 = 2^2 x$; das Hauptideal $\mathfrak{T}2$ bleibt Primideal in $\mathfrak{T}$, aber zweiter Art. Denn die Ordnung $\mathfrak{T}$ ist — wegen der Modulbasis $1, \sqrt{x}$ — isomorph dem Restklassenring $\mathfrak{H}[t] \mid t^2 - x$, wo t eine neue Unbestimmte bedeutet; damit aber wird $\mathfrak{T} \mid \mathfrak{T}2 = \mathfrak{R}$ isomorph zu $\mathsf{P}[t] \mid t^2 - x$, wo P den Körper aller rationalen Funktionen von x und der im Funktionalbereich auftretenden Unbestimmten u mit Koeffizienten modulo 2 bedeutet. Da $t^2 - x$ Primfunktion in $\mathsf{P}[t]$ und zwar Primfunktion zweiter Art ist, wird $\mathfrak{R}$ Körper und zwar Erweiterungskörper zweiter Art von P; somit wird $\mathfrak{T}2$ Primideal zweiter Art; dagegen wird $\mathfrak{T}x = (\mathfrak{T}\sqrt{x})^2$ eigentlich primär.

Daß $\mathfrak{R}$ durch Adjunktion *eines* Elementes zu P erzeugt wird, trifft im allgemeinen nicht zu; man braucht nur die eine Unbestimmte x durch x und y zu ersetzen, um in der aus $1, \sqrt{x}, \sqrt{y}, \sqrt{xy}$ abgeleiteten Ordnung — die wieder die Hauptordnung wird — das Hauptideal $\mathfrak{T}2$ als Primideal zweiter Art zu erkennen, für das $\mathfrak{R}$ erst durch Adjunktion von zwei Elementen zu P erzeugt wird (vergl. zu den Beispielen *Ostrowski*, a. a. O.).

[1]) Die kurze Bezeichnung „Multiplikationsring“ entnehme ich der Note von *W. Krull:* Über Multiplikationsringe. Heidelberger Berichte, 1925, 5. Abhandlung, Nr. 3. *Krull* bezeichnet allerdings die hier auftretenden Ringe ohne Nullteiler als „reguläre Multiplikationsringe“.

[2]) In der Literatur tritt im Fall der „Relativzahlkörper“ nur das Diskriminantenideal der Hauptordnung auf, die „Relativdiskriminante“. Vergl. *Hilbert,* Zahlbericht, § 14 und *Hecke*, Theorie der algebraischen Zahlen, § 38.

[3]) Zur Axiomatik der Multiplikationsringe vergl. Idealtheorie, etwa Einleitung.

[4]) Idealtheorie, § 3, 2. und § 7, 3.

Besitzt insbesondere ein *Multiplikationsring* $\mathfrak{H}$ nur *ein* vom Null- und Einheitsideal verschiedenes *Primideal*, so wird $\mathfrak{H}$ *Hauptidealring*. Denn sei $\mathfrak{p}$ dieses Primideal; sei $p \equiv 0\ (\mathfrak{p})$, $\not\equiv 0\ (\mathfrak{p}^2)$. Da nach Voraussetzung jedes vom Null- und Einheitsideal verschiedene Ideal eine Potenz von $\mathfrak{p}$ wird, gilt dies insbesondere für das Hauptideal $\mathfrak{H}p$. Somit wird wegen $p \not\equiv 0\ (\mathfrak{p}^2)$ notwendig $\mathfrak{H}p$ gleich $\mathfrak{p}$, und damit auch jede Potenz von $\mathfrak{p}$ Hauptideal; ebenso sind Null- und Einheitsideal Hauptideale.

2. Spur und Diskriminantenideal. Die Spur jedes Elementes γ aus $\mathfrak{T}$ ist *definiert als Spur von γ aus* $\mathfrak{L}$, wobei $\mathfrak{L}$ *aufgefaßt ist als* $\mathfrak{R}$*-Modul*; jedes System von n in bezug auf $\mathfrak{R}$ linear unabhängigen Elementen aus $\mathfrak{L}$ kann somit als Basis zur Erzeugung einer die Spur definierenden Matrizendarstellung gewählt werden. Ist $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ ein solches System, so wird — da $\mathfrak{L}$ als Erweiterung erster Art vorausgesetzt — $|S(\alpha_i \alpha_k)|$ ein von Null verschiedenes Element aus $\mathfrak{R}$, und zwar das Determinantenquadrat der konjugierten Basiselemente (§ 6, 4). Aus der ganzen Abgeschlossenheit von $\mathfrak{H}$ in $\mathfrak{R}$ [1]) folgt daraus, daß $|S(\alpha_i \alpha_k)|$ Element aus $\mathfrak{H}$, sobald alle α zu $\mathfrak{S}$ gehören.

Diskriminantenideal: Es durchlaufe $\tau_1, \ldots, \tau_n$ alle Systeme von je n Elementen aus $\mathfrak{T}$; zu jedem System sei die Determinante $|S(\tau_i \tau_k)|$ gebildet, die also Element aus $\mathfrak{H}$ wird, und zwar von Null verschieden, sobald die τ linear unabhängig. Das *aus der Gesamtheit dieser Determinanten in* $\mathfrak{H}$ *abgeleitete Ideal* wird als das *Diskriminantenideal der Ordnung* $\mathfrak{T}$ *in bezug auf* $\mathfrak{H}$ bezeichnet; es wird also vom Nullideal verschieden.

Bedeutet ferner $\beta_1, \ldots, \beta_m$ mit $m \geqq n$ eine (stets existierende) [2]) $\mathfrak{H}$-Modulbasis von $\mathfrak{T}$, so ergeben die endlich vielen Determinanten die je n Elementen β entsprechen, eine Idealbasis des Diskriminantenideals Das folgt aus der Modulhomomorphie von $\mathfrak{T}$ zum System der Spuren aus $\mathfrak{T}$ (§ 4, 3.). Denn die aus den Produkten $\tau_i \tau_k$ gebildeten Determinanten $|(\tau_i \tau_k)|$ sind linear, mit Koeffizienten aus $\mathfrak{H}$, darstellbar durch die endlich vielen Determinanten $|(\beta_i \beta_k)|$, die je n Elementen β entsprechen; also gilt das gleiche für die $|S(\tau_i \tau_k)|$ in bezug auf die $|S(\beta_i \beta_k)|$. Besitzt insbesondere die Ordnung eine linear unabhängige Modulbasis $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, so kann die Determinante $|S(\alpha_i \alpha_k)|$ als Basis des Diskriminantenideals genommen werden; die Definition deckt sich mit der in § 7, 1.

3 Übergang zum Quotientenring [3]). Ist $\mathfrak{a}$ ein beliebiges Ideal aus $\mathfrak{T}$, so ist der Quotientenring $\mathfrak{T}_\mathfrak{a}$ definiert als Gesamtheit der Elemente des Quotientenkörpers $\mathfrak{L}$ von $\mathfrak{T}$, die ein zu $\mathfrak{a}$ primes Element aus $\mathfrak{T}$ im Nenner haben [4]). Der Ring $\mathfrak{T}_\mathfrak{a}$ besitzt außer Null- und Einheitsideal keine weiteren Primideale als die Erweiterungsideale der zu $\mathfrak{a}$ gehörigen Primideale. Es besteht eineindeutiges Ent-

---

[1]) Idealtheorie, § 9, 7.

[2]) Idealtheorie, § 9. und § 3, 1.

[3]) Für die Beweise aller angeführten Sätze dieser Nummer vergl. *H. Grell* (in der Anmerkung [6]), S. 83 zitierten Arbeit).

[4]) Da die Primideale aus $\mathfrak{T}$ keinen vom Einheitsideal verschiedenen echten Teiler besitzen, wird hier prim mit teilerfremd — im Idealsinn — identisch.

sprechen und Isomorphismus der Restklassenringe zwischen allen — vom Null- und Einheitsideal verschiedenen — Idealen aus $\mathfrak{T}_\mathfrak{a}$ und denjenigen Idealen aus $\mathfrak{T}$, deren zugehörige Primideale unter den zu $\mathfrak{a}$ gehörigen enthalten sind; außerdem entsprechen Null- und Einheitsideal sich eineindeutig.

Dieselben Überlegungen gelten für den Multiplikationsring $\mathfrak{H}$. Ist insbesondere $\mathfrak{p}$ ein Primideal, so besitzt $\mathfrak{H}_\mathfrak{p}$ nur *ein* von Null- und Einheitsideal verschiedenes Primideal; wegen des Isomorphismus der Restklassenringe ist mit $\mathfrak{H}$ auch $\mathfrak{H}_\mathfrak{p}$ Multiplikationsring, und nach 1. wird somit $\mathfrak{H}_\mathfrak{p}$ *Hauptidealring*; die Basis des aus $\mathfrak{p}$ abgeleiteten Primideals wird eine Primgröße p aus $\mathfrak{H}_\mathfrak{p}$. Das Erweiterungsideal eines beliebigen Ideals $\mathfrak{c}$ aus $\mathfrak{H}$ wird erzeugt durch die zu $\mathfrak{p}$ gehörige Primärkomponente von $\mathfrak{c}$, wird also gleich $(p)^\varrho$ oder dem Einheitsideal, je nachdem $\mathfrak{p}$ in $\mathfrak{c}$ aufgeht — und zwar zur ϱ-ten Potenz — oder nicht aufgeht Daraus folgt noch: Stimmen die Erweiterungen zweier Ideale $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ aus $\mathfrak{H}$ in *allen Quotientenringen* $\mathfrak{H}_\mathfrak{p}$ *überein*, so sind $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ *identisch*; denn sie sind durch dieselben Primideale $\mathfrak{p}$ und zur gleichen Potenz teilbar.

4. Das Diskriminantenideal beim Übergang zum Quotientenring. Sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal aus $\mathfrak{H}$ und bezeichne $\mathfrak{P} = \mathfrak{T}\mathfrak{p}$ das Erweiterungsideal in $\mathfrak{T}$. *Der Quotientenring* $\mathfrak{T}_\mathfrak{P}$ *besitzt eine aus linear unabhängigen Elementen bestehende Modulbasis in bezug auf den Hauptidealring* $\mathfrak{H}_\mathfrak{p}$; zugleich ist $\mathfrak{T}_\mathfrak{P}$ eine endliche $\mathfrak{H}_\mathfrak{p}$-Ordnung in dem Erweiterungskörper $\mathfrak{L}$ des Quotientenkörpers $\mathfrak{K}$ von $\mathfrak{H}_\mathfrak{p}$[1]). Somit ist in $\mathfrak{T}_\mathfrak{P}$ in bezug auf $\mathfrak{H}_\mathfrak{p}$ der *Diskriminantensatz* (§ 7, 3.) *erfüllt.*

Die Diskriminante $D_{\mathfrak{T}_\mathfrak{P}}$ bildet dabei eine Basis des in $\mathfrak{H}_\mathfrak{p}$ genommenen Erweiterungsideals des Diskriminantenideals von $\mathfrak{T}$ in bezug auf $\mathfrak{H}$. Man nehme nämlich, was immer möglich, als $\mathfrak{H}_\mathfrak{p}$-Modulbasis von $\mathfrak{T}_\mathfrak{P}$ Elemente $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ aus $\mathfrak{T}$; dann gehört $|S(\alpha_i \alpha_k)|$ zum Diskriminantenideal, und nach 1. wird jede Determinante $|S(\tau_i \tau_k)|$ in $\mathfrak{H}_\mathfrak{p}$ durch $|S(\alpha_i \alpha_k)|$ teilbar [2]).

5. Allgemeiner Diskriminantensatz. *Ein Primideal* $\mathfrak{p}$ *aus einem Multiplikationsring* $\mathfrak{H}$ *geht dann und nur dann in dem Diskriminantenideal einer Ordnung in bezug auf* $\mathfrak{H}$ *auf, wenn in der Idealzerlegung von* $\mathfrak{T}\mathfrak{p}$ *in paarweise teilerfremde Primärkomponenten aus* $\mathfrak{T}$ *mindestens eine eigentliche Primärkomponente oder mindestens ein Primideal zweiter Art auftritt.*

---

[1]) Zum Beweis vergl. *H. Grell.*

[2]) Hieraus ergibt sich — wenn $\mathfrak{H}$ die Hauptordnung eines algebraischen Zahlkörpers — die Übereinstimmung mit der von *Hilbert* definierten Relativdiskriminante (die mit der von *Hecke* definierten bekanntlich übereinstimmt). Bedeutet nämlich $\omega_1, \ldots, \omega_m$ eine $\mathfrak{H}$-Modulbasis der Hauptordnung des Relativkörpers — *Hilbert* wählt insbesondere eine Modulbasis in bezug auf den Ring der ganzen rationalen Zahlen — so bilde man nach *Hilbert* alle Determinanten aus je n Basiselementen und ihren Konjugierten; die „Relativdiskriminante" ist das aus dem Produkt je zwei (gleicher oder verschiedener) dieser Determinanten in $\mathfrak{H}$ abgeleitete Ideal.

Somit geht die Relativdiskriminante in $\mathfrak{H}_\mathfrak{p}$ über in das Determinantenquadrat der Basis $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ und ihrer konjugierten Elemente, also in $|S(\alpha_i \alpha_k)|$. Es stimmen also die Erweiterungen von Relativdiskriminante und Diskriminantenideal (der Relativhauptordnung) in allen Quotientenringen $\mathfrak{H}_\mathfrak{p}$ überein; die beiden Ideale werden nach 3. Schluß identisch.

Aus 3. und 4. folgt, daß ein Primideal $\mathfrak{p}$ aus $\mathfrak{H}$ dann und nur in dem Diskriminantenideal von $\mathfrak{T}$ aufgeht, wenn p aus $\mathfrak{H}_\mathfrak{p}$ in der Diskriminante $D_{\mathfrak{T}_\mathfrak{P}}$ aufgeht. Das ist aber identisch damit, daß der Restklassenring $\mathfrak{T}_\mathfrak{P} | \mathfrak{T}_\mathfrak{P} p$ nicht vollständig reduzibel erster Art ist; da nach 3. dieser Restklassenring isomorph ist zu $\mathfrak{T} | \mathfrak{T}\mathfrak{p}$, ist damit der allgemeine Diskriminantensatz bewiesen.

Als Spezialisierung auf Relativdiskriminanten von Zahlkörpern kommt: *Ein Primideal $\mathfrak{p}$ der Hauptordnung eines Zahlkörpers geht dann und nur dann in der Relativdiskriminante eines Erweiterungskörpers auf, wenn $\mathfrak{p}$ in der Hauptordnung des Erweiterungskörpers durch das Quadrat eines Primideals teilbar wird.*

Göttingen, 30. März 1926.

Naturphilosophische Untersuchungen von Euler und Riemann.

Von *Andreas Speiser* in Zürich.

*Riemann*s Habilitationsvorlesung über die Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde liegen, ist bisher fast nur nach der mathematischen Seite durchgearbeitet worden; sie enthält aber mehrfach Andeutungen über einen physikalischen Raum, und ich möchte im folgenden unter Heranziehung einiger anderer Bemerkungen *Riemann*s die Rekonstruktion desselben versuchen. Der Ursprung der *Riemann*schen Untersuchungen liegt in der *Herbarth*schen Naturphilosophie, wie *Riemann* stets betont. Anläßlich der Herausgabe von Band III 1 der *Euler*schen Werke habe ich jedoch bemerkt, daß ein wichtiger Gedanke von *Euler* stammt, den *Riemann* auch einmal als Gewährsmann nennt (Werke, 2. Auflage, pg. 507). Ich bin diesen Zusammenhängen weiter nachgegangen und möchte nun die gefundenen Resultate als kleinen Beitrag zu dem doppelten Jubiläum des hundertsten Geburtstages von *Riemann* und vom *Crelle*schen Journal veröffentlichen.

§ 1. Die Eulersche Erklärung der Gravitation.

Euler hat in den Jahren 1740—1750 die Grundlagen der Physik einer scharfen Revision unterzogen. Seine Lehre ist im wesentlichen diejenige *Epikur*s in der Fassung von *Gassendi*: das einzige Wirkliche in der Physik sind der leere Raum und die darin eingepackten und beweglichen Atome, welche ausgedehnt und undurchdringlich sind. Dieser absolute Raum hatte durch *Descartes*' Einführung der Koordinaten eine unwiderstehliche, mathematische Evidenz erhalten, und *Newton* hatte ihn zu einem sensorium Dei erklärt. Dagegen war bei *Newton* die Fernkraft, welche er Gravitation nannte, entschieden ein Relikt aus der *Platon*ischen Philosophie, und man war bald allgemein der Ansicht, sie müsse ebenfalls mechanisch erklärt werden. Gerade das hat *Euler* in äußerst geistreicher Weise geleistet; bevor ich es aber auseinandersetze, möchte ich kurz die übrigen Arbeiten *Euler*s aus diesem Gebiet erwähnen.

In der Arbeit: „Enodatio quaestionis: Utrum materiae facultas cogitandi tribui possit nec ne?" (Opusc. var. arg. 1, pg. 277) verneint er, daß der Materie die Denkfähigkeit zukomme, mit folgender Begründung, die sich sowohl gegen *Leibniz* als gegen *Epikur* richtet:

Die vis inertiae (Trägheit) der Körper besteht darin, daß ein Körper seinen eigenen Zustand nicht ändern könne, die Denkfähigkeit kann dagegen in keiner Weise von der Fähigkeit, seinen Zustand zu ändern, losgelöst werden. Daher widersprechen sich die Fähigkeit des Denkens und die vis inertiae, und die Materie denkt nicht.

„Reflexions sur l'espace et le temps" (Mém. Berl. 4, pg. 324). Der absolute Raum existiert, denn er wird von der Trägheit der Körper gefordert. Falls diese nicht durch den Raum gegeben wäre, so müßte man sagen, die Fixsterne leiteten die Körper in betreff der Trägheit: „ce serait une proposition bien étrange et contraire à quantité d'autres dogmes de la Métaphysique de dire que les étoiles fixes dirigent les corps dans leur inertie; cette règle se trouverait également fausse s'il nous était permis d'en faire l'application aux corps qui sont proches de quelque étoile fixe".

Die Hauptleistung *Eulers* bestand aber in dem großzügigen Versuch, die Phänomene der Gravitation, des Lichts, der Elektrizität und des Magnetismus durch die Hypothese einer unendlich flüssigen Materie, des Äthers, zu erklären. Diese Arbeiten befinden sich in französischer Übersetzung im 2. Band der Brüsseler Ausgabe der Werke *Eulers* (1838) zusammen mit den Briefen an eine Deutsche Prinzessin, welche eine vollständige Übersicht über seine naturphilosophischen Ansichten geben. Hier wird sie auch *Riemann* gelesen haben. Einen vollen Erfolg hatte *Euler* in der Theorie der Fortpflanzung des Lichtes, er leitet die zugehörigen partiellen Differentialgleichungen ab und integriert sie im Fall der Kugelwellen. (Vgl. opera omnia III 1, Abhandlungen über den Schall). Seine Untersuchungen über Elektrizität und Magnetismus waren seinerzeit sehr berühmt, heute sind sie selbstverständlich völlig überholt. Dagegen möchte ich seine Erklärung der Gravitation mitteilen (opera omnia III 1, pg. 3 ff. und 149 ff.). Der Gedankengang ist folgender:

Weil der Äther unendlich flüssig ist und unter ungeheurem Druck steht (über zwanzig Millionen Atmosphären), so leistet er der Bewegung der Körper keinen Widerstand. Eine Kraft kann er auf die Körper nur durch den Druck ausüben. Supponiert man nun, daß der Druck in der Umgebung der Sonne abnimmt wie const. $-\frac{1}{r}$, so ergibt sich eine Druckresultante, welche nach Größe und Richtung der Gravitation proportional ist.

Hieraus zieht nun *Euler* eine merkwürdige Folgerung: Die Druckresultante ist dem Volumen der Körper proportional, andrerseits fallen alle Körper gleich rasch. Daraus folgt: Das wahre Volumen (d. h. das Volumen der Atome, welche den Körper bilden) ist der trägen Masse proportional, *die Massendichte ist also eine universelle Konstante. Euler* sagt: Peut-être que cette uniformité est une suite nécessaire de l'essence de la matière et que, si nous la connaissions plus parfaitement, nous ne manquerions pas de voir que ce degré de densité est aussi essentiel à la matière qu'il est à un triangle que ses angles ensembles soient égaux à deux droits.

Aber *Euler* findet zwei Schwierigkeiten:

1. Der ungeheure Druck, unter dem der Äther steht, ist nur schwer vereinbar mit der Unendlichkeit des Raumes.

2. Die Abnahme des Druckes in der Nähe eines Atomes erzeugt eine Bewegung des Äthers nach dem Atom zu, deren Geschwindigkeit der Gradient des Druckes, d. h. ebenfalls die Druckresultante ist.

Man kann also sagen, die Beschleunigung eines Körpers ist proportional der Geschwindigkeit des Äthers, und sich vorstellen, daß fortgesetzt eine konstante Menge von Äther in das Atom einströmt. Aber was wird alsdann aus dem Äther?

§ 2. Riemanns Entdeckung vom 1. März 1853.

Unter den Fragmenten philosophischen Inhaltes findet sich auf pg. 528 der Werke *Riemanns* eine Arbeit mit dem Titel: „Neue Mathematische Prinzipien der Naturphilosophie", und der Anmerkung „Gefunden am 1. März 1853". Sie ist bisher wenig beachtet worden; allein sowohl der Titel als die Angabe des Datums lassen sicher darauf schließen, daß *Riemann* ihr eine fundamentale Bedeutung beigemessen hat. Der Fund vom 1. März 1853 ist die Antwort auf *Eulers* Frage nach dem, was mit dem Äther geschieht. Ich zitiere hier *Riemann*:

„Der Grund der allgemeinen Bewegungsgesetze für Ponderabilien ... liegt in dem inneren Zustand derselben. Versuchen wir aus unserer eigenen inneren Wahrnehmung nach der Analogie auf denselben zu schließen. Es treten in uns fortwährend neue Vorstellungsmassen auf, welche sehr rasch aus unserm Bewußtsein wieder verschwinden. Wir beobachten eine stetige Tätigkeit unserer Seele. Jedem Akt liegt etwas bleibendes zu Grunde, welches sich bei besonderen Anlässen (durch die Erinnerung) als solches kundgibt, ohne einen dauernden Einfluß auf die Erscheinungen auszuüben. Es tritt also fortwährend (mit jedem Denkakt) etwas bleibendes in unsere Seele ein, welches aber auf die Erscheinungswelt keinen dauernden Einfluß ausübt. Jedem Akt unserer Seele liegt also etwas bleibendes zu Grunde, welches mit diesem Akt in unsere Seele eintritt, aber in demselben Augenblick aus der Erscheinungswelt völlig verschwindet.

„Von dieser Tatsache geleitet mache ich die Hypothese, daß der Weltraum mit einem Stoff erfüllt ist, welcher fortwährend in die ponderablen Atome strömt und dort aus der Erscheinungswelt (Körperwelt) verschwindet.

Beide Hypothesen lassen sich durch die Eine ersetzen, daß in allen ponderablen Atomen beständig Stoff aus der Körperwelt in die Geisteswelt eintritt. Die Ursache, weshalb der Stoff dort verschwindet, ist zu suchen in der unmittelbar vorher dort gebildeten Geistessubstanz, und die ponderablen Körper sind hiernach der Ort, wo die Geisteswelt in die Körperwelt eingreift. (Anm. In jedes ponderable Atom tritt in jedem Augenblick eine bestimmte, der Gravitationskraft proportionale Stoffmenge ein und verschwindet dort.)"

Den physikalischen Teil dieser Hypothese hat *Riemann* in der Arbeit: „Gravitation und Licht" (pg. 532) näher ausgeführt; er sagt dort vom Äther: „Dieser Stoff kann also vorgestellt werden als ein physischer Raum, dessen Punkte sich in dem geometrischen bewegen".

Dem metaphysischen Teil hat *Riemann* eine längere Arbeit gewidmet unter dem Titel: „Zur Psychologie und Metaphysik". Der Inhalt ist eine gegenüber der *Herbarth*schen veränderte Psychologie, und es ist wohl sicher anzunehmen, daß ihm eine mathematische Theorie zu Grunde liegt, ähnlich wie dem Habilitationsvortrag. Ihre Auffindung würde sicher wichtige Resultate ergeben.

Riemann hat also *Euler*s Theorie der Gravitation adoptiert und die Frage nach dem Verschwinden des Äthers auf seine Weise gelöst. Aber im weiteren Fortgang der Arbeit trennen sich die Wege völlig, insbesondere wird *Riemann* die Überlegungen, welche *Euler* zum Satz von dem absoluten Wert der Massendichte führen, nicht mitmachen. *Riemann* fährt in der Abhandlung, nach einer Bemerkung über die Fortpflanzung des Lichtes auf pg. 530 ungefähr folgendermaßen fort:

Man betrachte ein mit Stoff angefülltes Volumenelement (es handelt sich hier nicht um die ponderable Materie, sondern um den hypothetischen flüssigen Stoff). Führt man ein Euklidisches Koordinatensystem ein, so wird die Entfernung eines beliebigen Stoffpunktes von demjenigen im Ursprung durch

$$dx_1^2 + dx_2^2 + dx_2^3$$

bestimmt sein. Nach Verlauf einiger Zeit wird das Volumen sich verändert haben. Indem wir mit dx_1, dx_2, dx_3 denselben Massenpunkt, wie früher bezeichnen (es sind jetzt nur noch Parameter), so wird die Entfernung desselben von dem Stoffpunkt, der früher im Ursprung lag, durch eine positiv definite quadratische Form bestimmt sein. Beide Formen lassen sich gleichzeitig auf die Hauptachsen transformieren, man kann daher die zweite Form von vorneherein in der Gestalt annehmen:

$$G_1 dx_1^2 + G_2 dx_2^2 + G_3 dx_3^2.$$

„Die Größen $G_1 - 1, G_2 - 1, G_3 - 1$ heißen dann die Hauptdilatationen des Stoffteilchens in 0 beim Übergang von der ersteren Form zur letzteren. Ich nehme nun an, daß aus der Verschiedenheit der früheren Formen des Stoffteilchens von seiner Form zur Zeit t eine Kraft resultiert, welche diese [Form] zu verändern strebt, und daß der Einfluß einer früheren Form desto geringer wird, je länger vor t sie stattfand . . ." Im weiteren Verlauf der Arbeit reduziert *Riemann* die drei Größen G auf zwei und schließt mit der Frage: „Wie müssen nun diese zwei Funktionen beschaffen sein, damit Gravitation, Licht und strahlende Wärme durch den Raumstoff vermittelt werde?"

Wie man sieht, ist Riemann auf Linienelemente in drei Variabeln geführt, deren Koeffizienten von drei Parametern und von der Zeit abhängen, und es scheint mir nun sehr wahrscheinlich, daß hier der Ausgangspunkt für die Untersuchungen liegt, welche er ein Jahr später in seinem Habilitationsvortrag veröffentlicht hat. Er mußte auf seine Linienelemente die *Gauß*ische Flächentheorie ausdehnen. Um aber von hier aus die weiteren Bemerkungen, welche *Riemann* über den physikalischen Raum macht, vollständig zu verstehen, muß ich etwas näher auf die Geschichte des Raumbegriffes eingehen, denn meiner Ansicht nach findet man die Erklärung des *Riemann*schen Standpunktes bei *Leibniz*.

§ 3. Die historischen Grundlagen des Raumbegriffs von Leibniz und Riemann.

Ich habe bisher nur von dem epikuräischen absoluten Raum gesprochen und seiner mathematischen Fixierung durch *Descartes*. Aber die früher herrschende Raumauffassung war davon völlig verschieden. Man dachte sich nicht die Körper in einen absoluten Raum verpackt, sondern vielmehr bildeten die Körper selber, oder ihre Formen, den Raum. *Aristoteles* drückt sich hierüber bei seinen Beweisen für die Endlichkeit des Raumes klar aus. Auch *Dantes* Ansicht, daß die entfernten Sternsphären nach einem Punkt konvergieren, weil sie sich in Wirklichkeit Gott als dem Zentrum nähern, ist absolut sinnlos, wenn man die Gegenstände in einen vorgebildeten Raum hineinsetzt. Am tiefsten führt uns aber *Plotin* in die antike Anschauung hinein.

Danach besteht die Wirklichkeit aus Formen, welche einander hierarchisch unter- und übergeordnet sind. Unsere sinnlichen Wahrnehmungen sind Spiegelbilder dieser Formen, gespiegelt an der Materie. Diese hat keine Größe, sondern die Formen bringen ihre Abmessungen selber mit, die Materie ist bloß das fügsame Ressort, welches immer gerade die richtige Größe hat. Sie ist als das absolut formlose (schlechte) durch keine echte Wahrnehmung zu erfassen, sondern höchstens durch eine unechte, etwa wie man sagen kann, man „sieht die Finsternis". (Vgl. hierzu Enneaden II 6 und III 6).

Eine der merkwürdigsten Leistungen von *Leibniz* ist es nun, daß er an dieser Raumanschauung trotz der *Cartesi*schen Entdeckung festgehalten hat. Eine mathematische Formulierung ist ihm nicht gelungen, dazu bedurfte es erst der Flächentheorie von *Gauß*, aber er hat sich wenigstens kurz vor seinem Tod im 5. Brief an den Newtonianer *Clarke* (Gerh. Bd. 7 pg. 400) so deutlich darüber ausgesprochen, daß man sie identifizieren kann. In seinem letzten Brief an *Johann Bernoulli* (23. Oktober 1716) schreibt er: „Du weißt, daß die Engländer aus dem Raum etwas absolutes und reales machen ... für mich aber ist der Raum nichts anderes als eine ordo coexistendi und wenn man die Gegenstände wegnimmt, so ist er nichts mehr; ferner, wenn die Lage aller Dinge dieselbe bleibt, so ist auch der Raum derselbe". Aber diese Ansichten waren wohl für die meisten Gelehrten jener Zeit völlig unverständlich und als im Jahre 1746 *Euler* die *Leibnizi*aner durch ein Preisausschreiben der Berliner Akademie [1]) aufforderte, aus der Monadenlehre den Raum aufzubauen, da zeigte es sich, daß das niemand mehr konnte. Mit diesem Jahr 1746 beginnt die unbestrittene Herrschaft des absoluten Euklidischen Raumes in der Physik. Für letztere war es auch völlig belanglos, als *Kant* den Raum von seiner hohen Stellung als Kampfplatz der Atome zu einer bloßen Form unserer äußeren Anschauung degradierte. Dadurch wurde keine *Euler*sche Gleichung und kein *Newton*sches Experiment im geringsten tangiert, vielmehr wurden sie besser fundiert. Aber eine leise Opposition hat es doch immer gegeben, und zu den Gegnern *Kant*s hat *Herbarth* gehört, welcher die *Leibniz*sche Raumlehre auf *Riemann* überliefert hat. So schreibt *Herbarth* in seiner Einleitung in die Philosophie § 160:

[1]) Vgl. hierzu Schmalenbach, Leibniz (München 1926) pg. 540 ff.

„... Noch viel roher wäre das Beginnen, wenn man mit einigen neueren Physikern sich die Materie als aus Molekülen bestehend dächte, deren Entfernungen weit größer wären als ihre Durchmesser, und die nur vermittelst ihrer sie kugelförmig umgebenden anziehenden Kräfte zusammenhingen. Die Wesen [*Riemann* sagt: „das dem Raum zu Grunde liegende Wirkliche"] haben gar keine räumlichen Prädikate, am wenigsten räumliche Kräfte; ihre Kohäsion und Repulsion ist gerade das, was man erklären, nicht voraussetzen soll.

„Um zu dieser Erklärung den Weg zu finden, muß man sich hüten, daß man sich nicht der Geometrie unbehutsam in die Arme werfe. Hierdurch hat sich *Kant* die Naturlehre verdorben.

„Die Geometrie nimmt den Raum als gegeben an ... Aber für einfache Wesen ist kein Raum gegeben; er muß samt allen seinen Bestimmungen erst gemacht werden. Der Standpunkt der Geometrie ist für die Metaphysik zu niedrig; sie muß sich erst selber die Möglichkeit und die Giltigkeit der Geometrie deutlich machen, ehe sie deren Hilfe gebrauchen kann".

Um nun die Ansichten von *Leibniz* und *Riemann* kennen zu lernen, ist es am bequemsten, von der *Riemann*schen Formulierung des Problems aus, die ich am Ende des vorigen Paragraphen wiedergegeben habe, die verschiedenen Lösungen zu besprechen. Es wird sich eine immer freiere Auffassung in der Reihenfolge: *Newton*, *Kant*, *Leibniz*, *Riemann* ergeben.

§ 4. Vergleich der verschiedenen Raumauffassungen.

1. *Newton.* Weil alle Vorgänge sich in einem festen Euklidischen Raum, dem sensorium Dei, abspielen, so sind die Raumkrümmungen unserer dreiparametrigen Schar von Linienelementen immer gleich Null, und wir haben es bei dem Problem von *Riemann* mit der Strömung einer kompressiblen Flüssigkeit im festen Raum zu tun.

2. *Kant.* Der Euklidische Raum, die Form unserer äußeren Anschauung, zwingt uns, den Linienelementen die Krümmung 0 zuzuschreiben. Die dreiparametrigen Scharen zu zwei verschiedenen Zeiten lassen sich daher ineinander transformieren (Kausalitätsgesetz), und wir stellen uns das den Erscheinungen zugrunde liegende als die Strömung einer kompressibeln Flüssigkeit vor.

In diesen beiden ersten Fällen ist jedoch zu beachten, daß sowohl *Newton* als *Kant* die Möglichkeit des leeren Raumes zugegeben haben, was die andere Raumlehre als sinnlos verwirft.

3. *Leibniz*: Die unendlich vielen Linienelemente, welche wir in einem bestimmten Moment perzipieren, werden von uns unbewußt zu einem endlichen Raum summiert. Nennen wir ihn den physischen Raum; seine Stellen sind die einzelnen Massenpunkte. Damit haben wir aber noch nicht den Raum der Phänomene, oder den *geometrischen Raum*, wie *Riemann* sagt. Dazu müssen wir erst ein Prinzip angeben, welches gestattet, zu zwei verschiedenen Zeiten dieselbe Stelle des Raumes zu definieren. Und das geschieht folgendermaßen. Wir „supponieren,

oder fingieren", daß unter den Massenpunkten eine bestimmte Anzahl ruht, und gründen auf sie ein Koordinatensystem. Dies gibt uns den Raum.

Man sieht, daß *Leibniz* viel Willkür in dem Raum der Epikuräer erkennt und ihm jede Realität absprechen muß. So werden wir für geodätische Zwecke als ruhend die Häuser, oder die Signale auf den Bergspitzen ansehen und bekommen einen ersten Raum. Für astronomische Zwecke sehen wir die Fixsterne als ruhend an, und schließlich für die Himmelsmechanik einen Massenpunkt, auf den keine Kräfte wirken. Irgend welche Realität kommt keiner dieser Wahlen zu, sie sind nur aus Zweckmäßigkeitsgründen gewählt und wohl fundiert.

Ich will den Originaltext hier wiedergeben und nur die Definition der „gleichen Stelle" weglassen. (Gerh. 7 pg. 400.)

„Voici comme les hommes viennent à se former la notion de l'espace. Ils considèrent que plusieurs choses existent à la fois et ils y trouvent un certain ordre de coexistance, suivant lequel le rapport des uns et des autres est plus ou moins simple. C'est leur situation ou distance . . . Pour avoir une idée de l'espace, il suffit de considérer ces rapports et les règles de leur changements, sans avoir besoin de se figurer ici aucune réalité absolue hors des choses dont on considère la situation. . . . Au reste je fais ici à peu près comme Euclide, qui ne pouvant pas bien faire entendre absolument ce que c'est *raison* prise dans le sens des Géomètres [Proportion], définit bien ce que c'est *mêmes raisons*. Et c'est ainsi que, pour expliquer ce que c'est que la place, j'ai voulu définir ce que c'est que *la même place* . . . Et quant à cette objection que l'Espace et le Temps sont des quantités ou plutôt des choses douées de quantité, et que la situation et l'ordre ne le sont point, je réponds que l'ordre a aussi sa quantité; il y a ce qui précède et ce qui suit, il y a distance ou intervalle. Les choses Relatives ont leur quantité, aussi bien que les Absolues . . . Ainsi quoique le Temps et l'Espace consistent en rapports, ils ne laissent pas d'avoir leur quantité".

Leibniz denkt sich wie *Riemann* „l'espace plein d'une matiere originairement fluide" (Einl. zu den Nouveaux essays, Gerh. V pg. 52).

4. *Riemann.* Die Erfahrung zeigt, daß Räume von endlicher Abmessung Euklidisch sind. Daraus folgt, daß der Durchschnittswert der Krümmungen nahezu 0 ist. Für ultramikroskopische Räume gilt das keineswegs mehr, denn die Phänomene der Elektrizität und des Magnetismus und die zugehörigen Kräfte ändern die Krümmung fortgesetzt. Aber auch bei ultrateleskopischen Räumen kann man wahrscheinlich die Abweichung des statistischen Wertes der Krümmung von 0 nicht mehr vernachlässigen.

Nach *Riemann* ist der Raum nur so weit Euklidisch, wie etwa ein Stück Papier, das wohl gestattet, Euklidische Dreiecke zu zeichnen, mikroskopisch betrachtet aber nicht die Krümmung Null hat. *Riemann* will, wie wir sahen, alle Änderungen der Linienelemente in der Zeit als die Wirkung von Kräften ansehen.

Freilich, wenn der Stoff aus diskreten Punkten bestände, dann hätten wir keine Möglichkeit, einen Raum daraus herzuleiten und die Krümmungen zu berechnen, sondern als einziges Maß bliebe die Anzahl der Stoffteilchen übrig.

Ich glaube, daß dies der Inhalt der rätselhaften Stelle (Werke pg. 286) ist: „Es muß also entweder das dem Raume zugrunde liegende Wirkliche eine diskrete Mannigfaltigkeit bilden, oder der Grund der Maßverhältnisse außerhalb, in darauf wirkenden bindenden Kräften, gesucht werden".

Man nimmt gewöhnlich an, der geometrische Raum, wenn er nicht Euklidisch ist, sei mindestens von konstanter Krümmung. Diese Ansicht ist sicher nicht diejenige von *Leibniz* und *Riemann*, vielmehr ist es eine Konsequenz dieser Anschauung, daß er sogar, wenn er Euklidisch ist, nicht unendlich zu sein braucht. Ich will als Beispiel die Aristotelische Raumlehre aus dem Ptolemäischen System herleiten.

Die ruhende Erde gibt die Grundlage für einen geometrischen Raum. In diesem rotiert der physische Raum außerhalb der Erde. Wir wollen *Aristoteles* gern zugeben, daß ein unendlicher mit Materie ausgefüllter Raum, welcher rotiert, eine physikalische Unmöglichkeit ist, obschon die 6 Beweise, die er dafür gibt, zum Teil mathematische Fehlschlüsse enthalten. Die beiden endlichen Räume, der physische und der geometrische, koinzidieren stets. Wir nehmen nun an, daß sie ihre Gestalt nicht ändern; dann folgt, daß sie Rotationskörper sind. Nun führt aber der physische Raum noch eine zweite Rotation aus um eine Achse senkrecht zur Ekliptik, welche die Präzession der Äquinoktien liefert. Der Rotationskörper muß daher zwei Achsen haben und ist also eine Kugel. Ob man ihre Oberfläche mit zur Materie hinzunehmen will, oder sie als „Form" für immateriell erklärt, ist eine Frage der Metaphysik.

Man sieht an diesem Beispiel, wieviele verschiedene Erkenntnisquellen zur Entstehung eines Raumbildes beitragen, empirische, mathematische und philosophische. Der *Cartesi*sche Raum wurde erst durch die *Kopernikani*sche Lehre möglich, aber für seine Wahl ist offenbar hauptsächlich seine mathematische Vollkommenheit die Ursache gewesen: Er enthält alle Euklidischen Figuren und wir haben keinen Grund, bereits mit einem Teilgebiet aufzuhören. Die *Kant*ische Auffassung, daß er allen mathematischen Dingen übergeordnet ist, hat freilich kein Mathematiker jemals geteilt.

§ 5. Die Verknüpfung von physischem und geometrischem Raum.

In diesem Paragraphen möchte ich einige weitere Bemerkungen über den physischen und den geometrischen Raum anschließen. Wenn es gelungen ist, zu einem physischen Raum einen geometrischen zu konstruieren, der mit ihm koinzidiert, der also nicht bloß ein „lokales Bezugssystem" ist, so können zwei Fälle eintreten: entweder der geometrische Raum ist dadurch vollständig festgelegt, wie beim *Aristoteli*schen Raum und bei den astronomischen Koordinaten, oder es besteht in der Verkoppelung der beiden Räume eine gewisse Freiheit.

Im letzteren Fall werden zwei mögliche geometrische Räume R und R' durch eine Punkttransformation miteinander verbunden sein, und man kann leicht zeigen, daß diese eine Gruppe bilden. Das liegt daran, daß man den Übergang von R zu R' vollständig loslösen kann von den beiden Räumen, die er verbindet, so daß die

Transformation selber als etwas Primäres erscheint. Man hat nur zu bedenken, daß es nach Voraussetzung in keiner Weise möglich ist, die Verkoppelungen der verschiedenen geometrischen Räume mit dem physischen zu unterscheiden. Haben wir uns also für einen der Räume entschieden, den wir als ruhend annehmen, so gibt es immer einen zweiten, der sich zu ihm verhält, wie R' zu R. Die Transformation, welche R in R' überführt, kann also ebensogut an irgendeinen Raum R'' geheftet werden und liefert einen neuen Raum R'''. Wenn also zwei Transformationen dadurch gegeben sind, daß sie R in R' resp. in R'' überführen, so kann man sie hintereinander ausführen, und wenn man erst die zweite, dann die erste, die auch durch $R' \rightarrow R'''$ bezeichnet werden kann, ausführt, so erhält man die Transformation $R \rightarrow R'''$, womit die Gruppeneigenschaft nachgewiesen ist.

Wenn der geometrische Raum konstruiert, aber nicht eindeutig festgelegt werden kann, so ist es nicht möglich, von einem Körper die Aussage zu machen, daß er ruht. Man kann nur sagen, er ruhe in einem der zulässigen geometrischen Räume und drückt das dadurch aus, daß man sagt, er *ändert seinen Zustand nicht.* Andrerseits braucht man dann diese Bewegungen nicht zu erklären, und *Euler* hat also vollkommen recht, wenn er die Trägheit allein durch ein analytisches Urteil vom zureichenden Grund beweist (opera omnia III 1 pg. 39 ff.). Für *Leibniz* und *Riemann* gilt das jedoch nicht.

Riemann sagt in der Anmerkung pg. 532: „Jeder materielle Körper würde, wenn er sich im Raum allein befände, entweder seinen Ort in demselben nicht verändern oder mit unveränderlicher Geschwindigkeit in gerader Linie durch denselben sich bewegen.

„Dieses Bewegungsgesetz kann nicht aus dem Prinzip des zureichenden Grundes erklärt werden. Daß der Körper seine Bewegung fortsetzt, muß eine Ursache haben, welche nur in dem inneren Zustand der Materie gesucht werden kann".

Und *Eulers* pg. 2 zitierte Bemerkung über die Fixsterne zeigt, daß auch er in dieser Frage volle Klarheit besaß.

Ein Naturgesetz, welches einen geometrischen Raum mit einem physischen verknüpft, kann man ein *absolutes* Gesetz nennen. Das Gravitationsgesetz ist ein solches, denn es verbindet die Geschwindigkeitsänderung in einem geometrischen Raum mit den Distanzen in einem physischen. Hierher gehört auch die spezielle Relativitätstheorie, denn sie setzt eine geometrische 4-dimensionale Mannigfaltigkeit voraus.

Ein Naturgesetz, welches allein in einem physischen Raum Verknüpfungen herstellt, heißt ein *relatives* und *Leibniz* läßt nur solche zu. (Vgl. den 5. Brief an *Clarke*, Abschnitt 52 und 53, Gerh. VII pg. 403). Er hat auch in dem Begriff des Extremalprinzips (Variationsprinzip) diejenige Gesetzesform ersonnen, welche für Relativgesetze die geeignetste ist. *Euler* hat sie analytisch formuliert, und wir finden auch *Riemann* auf der Suche nach einem solchen Prinzip (Werke pg. 538). Die allgemeine Relativitätstheorie gehört hierher, und man kann sagen: die *Leibniz-*

*Riemann*sche Raumlehre verhält sich zur *Newton*schen, wie die allgemeine Relativitätstheorie zur speziellen.

Zum Schluß möchte ich auf das historische Kuriosum hinweisen, daß gerade diejenige Lehre, durch welche *Euler* die Herrschaft der *Newton*schen befestigen wollte, zu ihrem Sturz geführt hat, denn es ist wohl sicher, daß *Riemann* durch das Problem vom Verschwinden des Äthers in der Materie auf seine Untersuchungen gekommen ist.

Neue Begründung der komplexen Multiplikation.

Erster Teil: Einordnung in die allgemeine Klassenkörpertheorie.

Von *Helmut Hasse* in Halle (Saale).

Inhalt.

Einleitung 115
I. Der absolute Klassenkörper K zu Ω. 117
§ 1. Die Funktion $j(w_1, w_2)$. 117
§ 2. Die absoluten Klasseninvarianten $j(\mathfrak{k})$ von Ω. 120
§ 3. Das Zerlegungsgesetz für die Primideale 1. Grades von Ω in den Körpern $\Omega(j(\mathfrak{k}))$ 122
II. Der Strahlklassenkörper $K_\mathfrak{m}$ mod. $\mathfrak{m}$ zu Ω. 127
§ 1. Die Funktion $\tau(u, \mathfrak{w})$. 127
§ 2. Die Strahlklasseninvarianten $\tau(\mathfrak{k}^*)$ mod. $\mathfrak{m}$ zu $\mathfrak{k}$ von Ω. 130
§ 3. Das Zerlegungsgesetz für die Primideale 1. Grades von Ω in den Körpern $\Omega(j(\mathfrak{k}), \tau(\mathfrak{k}^*))$. 134

Einleitung.

Vor nahezu hundert Jahren gab *N. H. Abel* in seiner Arbeit *Recherches sur les fonctions elliptiques*, die im zweiten und dritten Bande dieses Journals erschien, die erste komplexe Multiplikationsformel für eine elliptische Funktion. Daraus entwickelte sich unter *Abel*s eigenen Händen, sowie durch die Arbeiten von *L. Kronecker* und *H. Weber*, die zum Teil ebenfalls in diesem Journal erschienen, eine an interessanten Ideen und wertvollen Resultaten reiche Theorie, in der sich Arithmetik, Algebra und Funktionentheorie die Hand reichen, um mittels der Theorie der Modulfunktionen und elliptischen Funktionen die über einem imaginär-quadratischen Grundkörper Ω relativ -*Abel*schen Zahlkörper völlig zu übersehen. Man nennt diese Theorie wegen des Auftretens der komplexen Multiplikationsformeln für die elliptischen Funktionen in ihr, sachlich nicht ganz treffend, wohl mehr dem angeführten historischen Gesichtspunkt Rechnung tragend: Komplexe Multiplikation. Jeder, der die von *Weber* gegebene zusammenfassende Darstellung [1]) gelesen hat, wird einen ihr noch anhaftenden Mangel empfunden haben, der auch *Weber* selbst bewußt war, wenn er schreibt [2]):

---

[1]) *H. Weber*, Lehrbuch der Algebra 2. Aufl. Bd. 3 (Braunschweig 1908), drittes und viertes Buch. — Im folgenden zitiert mit *W.*

[2]) *W.*, S. 576.

„Für den Nachweis der Existenz des Teilungskörpers ist die Benutzung der *Weierstraß*schen $\wp$-Funktion und der daraus abgeleiteten τ-Funktion sehr zweckmäßig, und es wäre am bequemsten, wenn man darauf auch die weitere Untersuchung dieses Körpers gründen könnte. Dafür aber ist die arithmetische Natur der Multiplikationsformeln noch nicht genügend bekannt, und es ist darum zurzeit noch notwendig, die komplexe Multiplikation und Teilung auch der *Jacobi*schen elliptischen Funktionen zu betrachten".

Der hier angedeutete Mangel, der *Weber* zur Heranziehung der *Jacobi*schen elliptischen Funktionen und dadurch übrigens zu einigen Inkorrektheiten und Fehlern [1]) veranlaßte, haftet ebenfalls der ganz auf die *Weber*schen Grundlagen gestellten Einordnung der *Weber*schen Theorie in die allgemeine Klassenkörpertheorie durch *Takagi* [2]) an, und wird auch nicht durch die in jüngster Zeit erschienene Darstellung von *Fueter* [3]) beseitigt, obwohl dort im Vorwort dieser Anschein erweckt wird. Zur näheren Begründung des Letztgesagten und zur weiteren Einleitung in das Folgende darf ich auf meine Besprechung des *Fueter*schen Buches verweisen [4]).

Die vorliegende und eine weitere Abhandlung setzen sich zum Ziel, das *Weber*sche Desideratum zu erfüllen, d. h. die „komplexe Multiplikation" ohne direkte (*Weber*, *Takagi*) oder verschleierte (*Fueter*) Verwendung von Modulfunktionen und elliptischen Funktionen von höherer als der *ersten Stufe* (im Sinne von *F. Klein*) aufzubauen. Das gelingt mir durch weitgehende Analogisierung der auf die elliptischen Funktionen gegründeten Theorie des Strahlklassenkörpers mod. $\mathfrak{m}$ zu Ω (kurz: *Theorie II*) zu der auf die Modulfunktionen gegründeten Theorie des absoluten Klassenkörpers zu Ω (kurz: *Theorie I*), die in bekannter Weise der obigen Forderung gemäß durchführbar ist. Wie in der Theorie I begründe ich auch in der Theorie II den zentralen Teil, nämlich das Zerlegungsgesetz für die Primideale 1. Grades von Ω, durch das *transzendente Prinzip der q-Entwicklung*, und mache dadurch die bisher an dieser Stelle benötigte „genaue Kenntnis der arithmetischen Natur der Multiplikationsformeln", die man für die *Weber*sche τ-Funktion nicht in demselben Maße besitzt wie für die *Jacobi*schen elliptischen Funktionen [5]), entbehrlich.

Beim Aufbau der Theorien I und II kann man die folgenden beiden Ziele im Auge haben:

a) Es soll unter möglichst weitgehender Voraussetzung der allgemeinen Klassenkörpertheorie [6]) die funktionentheoretische Konstruktion der Klassenkörper für die speziellen Grundkörper Ω unter Heranziehung eines möglichst ge-

---

[1]) Siehe meinen im Jahresber. d. D. M. V. 35 (1926) erschienenen Bericht über die Klassenkörpertheorie, Erl. 50. — Im folgenden zitiert mit K. Th.

[2]) *T. Takagi,* Über eine Theorie des relativ-*Abel*schen Zahlkörpers, Journ. Coll. Science Vol. 41 Art. 9 (Tokyo 1920).

[3]) *R. Fueter,* Vorl. ü. d. singul. Mod. u. d. kompl. Mult. d. ell. Funkt., erster Teil (Leipzig 1924).

[4]) Jahresber. d. D. M. V. 35 (1926), S. *55.*

[5]) *W.*, S. 576—596.

[6]) Vgl. die Zitate [1]), [2]) a. d. S.

ringen Materials aus der Theorie der Modulfunktionen und elliptischen Funktionen durchgeführt werden.

b) Es sollen die in möglichst geringem Umfange vorausgesetzten Resultate der allgemeinen Klassenkörpertheorie für die speziellen Grundkörper Ω unter möglichst weitgehender Ausnutzung der Theorie der Modulfunktionen und der elliptischen Funktionen begründet werden.

Ich lege in dieser Abhandlung wie *Takagi* (l. c.) den Gesichtspunkt a) zugrunde. Es ist dann lediglich zu zeigen [1]), daß für die zugrundegelegte Modulfunktion bzw. elliptische Funktion (§§ 1) gewisse sog. „singuläre" Werte algebraische Zahlen sind (§§ 2), und daß in dem durch deren Adjunktion zu Ω entstehenden Körper für die Primideale 1. Grades von Ω dasjenige Zerlegungsgesetz gilt, das in dem zu konstruierenden Klassenkörper nach der allgemeinen Theorie gelten muß (§§ 3). Daß man mit meinen Methoden auch alles bisher unter dem bei *Weber* (l. c.) und *Fueter* (l. c.) zugrundeliegenden Gesichtspunkt b) Geleistete erreichen kann, gedenke ich in der oben erwähnten weiteren Abhandlung darzulegen.

Wie bisher ist auch in meiner jetzigen Darstellung die Theorie I eine unentbehrliche Grundlage für die Theorie II. Die Elemente beider Theorien setze ich im Prinzip als bekannt voraus [2]), stelle sie jedoch in den §§ 1, 2 in kurzer Skizze voran, um die Analogie beider Theorien möglichst deutlich hervortreten zu lassen, und damit meine Abhandlung gleichzeitig als Abriß eines systematischen Aufbaus der ganzen Theorie dienen kann. Das eigentlich Neue bringen die §§ 3. Obwohl für die Theorie I die bisherige Fassung dieses Teils der obigen methodischen Forderung genügt [3]), lasse ich hier auch in der Theorie I eine Modifikation eintreten, so wie es dem analogen Teil der Theorie II entspricht.

I. Der absolute Klassenkörper K zu Ω.

§ 1. Die Funktion $j(w_1, w_2)$.

Es seien w_1, w_2 komplexe Variable, und es werde die Funktion $j(w_1, w_2)$ in bekannter Weise definiert:

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} g_2(w_1, w_2) &= 60 \sum_{n_1, n_2}{}' \frac{1}{(n_1 w_1 + n_2 w_2)^4} \\ g_3(w_1, w_2) &= 140 \sum_{n_1, n_2}{}' \frac{1}{(n_1 w_1 + n_2 w_2)^6} \end{aligned}\right\} \qquad (n_1, n_2 \text{ ganzzahlig}, \neq 0, 0)$$

$$(2)\qquad \Delta(w_1, w_2) = g_2^3(w_1, w_2) - 27\, g_3^2(w_1, w_2)$$

$$(3)\qquad j(w_1, w_2) = 2^6 3^3 \frac{g_2^3(w_1, w_2)}{\Delta(w_1, w_2)}.$$

Von dieser Funktion $j(w_1, w_2)$ benötigen wir die folgenden Eigenschaften:

---

[1]) Gemäß K. Th., Satz 9.

[2]) Zur genaueren Orientierung sei auf die zitierten Darstellungen von *Weber* oder *Fueter* verwiesen.

[3]) *W.*, S. 435—449.

Satz 1. *Die Funktion $j(w_1, w_2)$ ist homogen von der Dimension 0 in w_1, w_2.* Hiernach hängt $j(w_1, w_2)$ nur von dem Verhältnis

$$w = \frac{w_1}{w_2}$$

ab. Aus Symmetriegründen führen wir jedoch die häufig verwendete Schreibweise $j(w)$ für $j(w_1, w_2)$ hier nicht ein.

Es sei ferner $\mathfrak{S}$ die *weitere homogene Modulgruppe*, d. h. die Gesamtheit der ganzzahligen linearen homogenen Substitutionen

$$\begin{aligned} w_1' &= s_{11} w_1 + s_{12} w_2 \\ w_2' &= s_{21} w_1 + s_{22} w_2 \end{aligned}, \quad \text{kurz} \quad (w_1', w_2') = S(w_1, w_2)$$

der Determinante $|S| = \pm 1$. Dann gilt

Satz 2. *Die Funktion $j(w_1, w_2)$ ist bei $\mathfrak{S}$ invariant.*

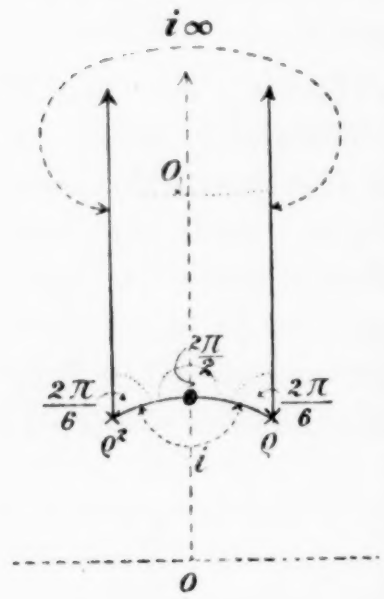


Fig. 1.

Die Gruppe $\mathfrak{S}$ ist als Substitutionsgruppe für w (*weitere inhomogene Modulgruppe*) in der w-Ebene eigentlich diskontinuierlich. Sie führt zu der bekannten Einteilung der w-Ebene in Diskontinuitätsbereiche, nämlich in Kreisbogendreiecke mit Randzuordnung, deren Winkel (unter Berücksichtigung der Randzuordnungen) $0, \frac{2\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}$ sind. Man legt zweckmäßig das in Fig. 1 gezeichnete, spezielle dieser Kreisbogendreiecke als „den" Diskontinuitätsbereich D von $\mathfrak{S}$ zugrunde. Als uniformisierende Variable für einen endlichen Punkt w_0 von D kann die Potenz $(w - w_0)^n$ gewählt werden, wenn die Umgebung von w_0 innerhalb D den Winkel $\frac{2\pi}{n}$ bildet. Im allgemeinen ist $n = 1$, in dem mit • markierten Punkte $n = 2$ und in den beiden mit × markierten (nach $\mathfrak{S}$ äquivalenten) Punkten $n = 3$. Für den unendlich fernen Grenzpunkt $i\infty$ von D mit dem Winkel 0 ist

$$q = e^{2\pi i w} = e^{2\pi i \frac{w_1}{w_2}}$$

uniformisierende Variable. Es gilt

Satz 3. *Die Funktion $j(w_1, w_2)$ ist eine analytische Funktion zu D, d. h. von rationalem Charakter in den zu D gehörigen Uniformisierenden. Sie ist ferner eine Funktion 1. Ordnung zu D, d. h. nimmt jeden Wert (in den zu D gehörigen Uniformisierenden gemessen) ein- und nur einmal an, oder auch: D ist gleichzeitig Fundamentalbereich für $j(w_1, w_2)$. Speziell liegt ihr einziger Pol 1. Ordnung in D in dem Grenzpunkt $i\infty$ von D.*

Da bei der oben erwähnten Einteilung der w-Ebene in Diskontinuitätsbereiche dem Grenzpunkt $i\infty$ von D außer unendlich fernen Punkten nur noch die sämtlichen rationalen Punkte der reellen Achse entsprechen, so besteht hiernach der *Regularitätsbereich* von $j(w_1, w_2)$ aus dem Innern der oberen und unteren

w-Halbebene, also aus zwei durch die reelle Achse als singuläre Linie getrennten Teilen.

Eine bei $\mathfrak{S}$ invariante, von der Dimension 0 homogene Funktion von w_1, w_2 heißt *Modulfunktion*, wenn sie analytische Funktion zu D ist, und speziell *ganze Modulfunktion*, wenn sie in D nur in dem Grenzpunkt $i\infty$ unendlich wird. Weiß man von einer bei $\mathfrak{S}$ invarianten, von der Dimension 0 homogenen Funktion von w_1, w_2, daß sie im Regularitätsbereich von $j(w_1, w_2)$ im gewöhnlichen Sinne analytisch ist, so folgt vermöge der Invarianz bei $\mathfrak{S}$ und Homogenëität von selbst, daß sie auch in den zu den endlichen Punkten von D gehörigen Uniformisierenden analytisch ist. Damit sie Modulfunktion ist, hat man dann also nur noch zu fordern, daß sie eine in einer Umgebung des Grenzpunktes $i\infty$ von D konvergente Entwicklung nach steigenden ganzen Potenzen der dortigen Uniformisierenden q mit nur endlich vielen negativen Potenzen von q (eine sog. *q-Entwicklung*) besitzt. Weiß man nur, daß eine solche Entwicklung nach gebrochenen Potenzen von q vorhanden ist, so folgt wie eben, daß die gebrochenen Potenzen in Wahrheit nicht auftreten.

Aus Satz 3 folgt nach funktionentheoretischen Sätzen

Satz 4. *Jede Modulfunktion ist eine rationale Funktion von $j(w_1, w_2)$ (und umgekehrt), speziell jede ganze Modulfunktion mit Pol n-ter Ordnung im Grenzpunkt $i\infty$ von D eine ganze rationale Funktion n-ten Grades von $j(w_1, w_2)$ (und umgekehrt).*

Über die q-Entwicklung der Funktion $j(w_1, w_2)$ ergibt sich aus den bekannten[1]) für $|q| < 1$ konvergenten q-Entwicklungen der Funktionen (1)

$$(1') \quad \begin{cases} g_2(w_1, w_2) = \left(\dfrac{2\pi}{w_2}\right)^4 \dfrac{1}{2^2 3} \left(1 + 240 \sum\limits_{n,\, n'=1}^{\infty} n^3 q^{nn'}\right) \\ g_3(w_1, w_2) = \left(\dfrac{2\pi}{w_2}\right)^6 \dfrac{1}{2^3 3^3} \left(1 - 504 \sum\limits_{n,\, n'=1}^{\infty} n^5 q^{nn'}\right) \end{cases}$$

sowie der aus diesen folgenden q-Entwicklung der Funktion (2)

$$(2') \qquad \Delta(w_1, w_2) = \left(\frac{2\pi}{w_2}\right)^{12} q\,(1 + c_1 q + c_2 q^2 + \cdots)$$

mit ganzen rationalen Koeffizienten $c_1, c_2, \ldots$ durch Zusammenfassung gemäß (3)

Satz 5. *Die für $|q| < 1$ konvergente q-Entwicklung der Funktion $j(w_1, w_2)$ hat die Form*

$$(3') \qquad j(w_1, w_2) = q^{-1}(1 + a_1 q + a_2 q^2 + \cdots)$$

mit ganzen rationalen Koeffizienten $a_1, a_2, \ldots$.

Die Sätze 4, 5 ergeben das für alles folgende fundamentale

q-Entwicklungsprinzip: *Gehören die Koeffizienten der q-Entwicklung einer ganzen Modulfunktion einem Zahlring an, so gehören auch die Koeffizienten ihrer ganz-rationalen Darstellung durch $j(w_1, w_2)$ diesem Zahlring an.*

---

[1]) Siehe etwa Enz. d. Math. Wiss. II 2, Art. 3 (*R. Fricke*), Gl. (223).

§ 2. Die absoluten Klasseninvarianten $j(\mathfrak{k})$ von Ω.

Es sei Ω ein imaginär-quadratischer Zahlkörper. Ist $\mathfrak{k}$ eine absolute Idealklasse von Ω, $\mathfrak{a}$ ein Ideal [1]) aus $\mathfrak{k}$ und α_1, α_2 eine Basis von $\mathfrak{a}$, so hängt der „singuläre" Wert $j(\alpha_1, \alpha_2)$ nur von der Klasse $\mathfrak{k}$, nicht von dem speziellen Ideal $\mathfrak{a}$ aus $\mathfrak{k}$ (Satz 1) und von der speziellen Basis α_1, α_2 von $\mathfrak{a}$ (Satz 2) ab. Er kann somit eindeutig durch $j(\mathfrak{k})$ bezeichnet werden und heißt die *Klasseninvariante von* $\mathfrak{k}$.

Nach Satz 3 gilt zunächst

Satz 6. *Die absoluten Klasseninvarianten $j(\mathfrak{k})$ von Ω sind voneinander verschieden.*

Um die Natur der absoluten Klasseninvarianten von Ω näher zu bestimmen, hat man die *Transformationstheorie* der Funktion $j(w_1, w_2)$ heranzuziehen. Ist m eine natürliche Zahl und definiert man in der Menge $\mathfrak{M}$ der ganzzahligen primitiven Transformationen [2])

$$\begin{aligned} w_1' &= m_{11} w_1 + m_{12} w_2, \\ w_2' &= m_{21} w_1 + m_{22} w_2, \end{aligned} \qquad \text{kurz} \quad (w_1', w_2') = M(w_1, w_2)$$

der Determinante $|M| = \pm m$ eine Äquivalenzrelation durch die Festsetzung

$$M' \sim M\,(\mathfrak{S}), \text{ wenn } M' = SM \text{ mit } S \text{ aus } \mathfrak{S},$$

so zerfällt dadurch $\mathfrak{M}$ in eine endliche Anzahl $\psi(m)$ von Klassen untereinander äquivalenter Transformationen M, die sog. *Transformationsklassen* für den Grad m. Es sei nun M_ν $(\nu = 1, \ldots, \psi(m))$ ein vollständiges Repräsentantensystem für diese Klassen. Als solches kann das System

$$M_\nu = \begin{pmatrix} a_\nu & b_\nu \\ 0 & d_\nu \end{pmatrix} \tag{4}$$

mit den Bedingungen $a_\nu d_\nu = m$; $d_\nu > 0$; $b_\nu \bmod. d_\nu$; $(a_\nu, b_\nu, d_\nu) = 1$ gewählt werden. Wir bilden dann die $\psi(m)$ Funktionen $j(M_\nu(w_1, w_2))$. Diese sind, unabhängig von den speziellen Repräsentanten M_ν, deren Klassen eindeutig zugeordnet. Das aus ihnen gebildete Polynom

$$J_m(t;\ w_1, w_2) = \prod_{\nu=1}^{\psi(m)} (t - j(M_\nu(w_1, w_2)))$$

heißt die *Transformationsgleichung* von $j(w_1, w_2)$ oder die *Invariantengleichung* für den Grad m. Über diese gilt

Satz 7. *Die Invariantengleichung $J_m(t; w_1, w_2)$ ist ein Polynom $J_m(t, j(w_1, w_2))$ in t und $j(w_1, w_2)$ mit ganzen rationalen Koeffizienten.*

Beweis: Die Koeffizienten von $J_m(t; w_1, w_2)$, d. h. die symmetrischen Grundfunktionen der $j(M_\nu(w_1, w_2))$ sind im Regularitätsbereich von $j(w_1, w_2)$ analytische und reguläre, homogene Funktionen 0-ter Dimension von w_1, w_2. Da zudem die $j(M_\nu(w_1, w_2))$ bei einer Modulsubstitution S — wegen $|MS| = |M| = \pm m$ und weil $M' \sim M\,(\mathfrak{S})$ mit $M'S \sim MS\,(\mathfrak{S})$ gleichbedeutend ist — nur untereinander

---

[1]) Ganz oder gebrochen. — Soll im folgenden eine vorkommende algebraische Zahl oder ein Ideal ganz sein, so wird dies ausdrücklich gesagt.

[2]) *Transformation* schlechthin bedeutet im folgenden stets *ganzzahlige primitive Transformation.*

vertauscht werden, sind ihre symmetrischen Grundfunktionen bei $\mathfrak{S}$ invariant, also (unter Berücksichtigung des Vorhandenseins der unten angegebenen q-Entwicklungen) ganze Modulfunktionen und daher Polynome in $j(w_1, w_2)$ (Satz 4).

Daß diese Polynome ganze rationale Koeffizienten haben, beweisen wir mittels des q-Entwicklungsprinzips. Aus der q-Entwicklung (3′) (Satz 5) für $j(w_1, w_2)$ ergibt sich die für $j(M_\nu(w_1, w_2))$, indem q gemäß (4) durch $\zeta_{d_\nu}^{b_\nu} q^{\frac{a_\nu}{d_\nu}}$ ersetzt wird. Dabei ist $\zeta_{d_\nu} = e^{\frac{2\pi i}{d_\nu}}$ gesetzt. So erhält man q-Entwicklungen der Form

$$j(M_\nu(w_1, w_2)) = \zeta_{d_\nu}^{-b_\nu} q^{-\frac{a_\nu}{d_\nu}} \left(1 + \left[\zeta_{d_\nu}^{b_\nu}, q^{\frac{a_\nu}{d_\nu}}\right]\right), \tag{5}$$

wo hier wie im folgenden $\left[\zeta_{d_\nu}^{b_\nu}, q^{\frac{a_\nu}{d_\nu}}\right]$ eine bei $q = 0$ verschwindende Potenzreihe in $q^{\frac{a_\nu}{d_\nu}}$ bezeichnet, deren Koeffizienten ganzzahlige Polynome in $\zeta^{\frac{b_\nu}{d_\nu}}$ sind. Die symmetrischen Grundfunktionen der $j(M_\nu(w_1, w_2))$ haben hiernach algebraisch ganze q-Entwicklungskoeffizienten, die wegen des gleichartigen Auftretens konjugierter Einheitswurzeln in den Entwicklungen (5) zudem rational sind. Somit haben die symmetrischen Grundfunktionen der $j(M_\nu(w_1, w_2))$ ganze rationale q-Entwicklungskoeffizienten und sind daher Polynome in $j(w_1, w_2)$ mit ganzen rationalen Koeffizienten.

Mittels Satz 7 beweisen wir nun

Satz 8. *Die absoluten Klasseninvarianten $j(\mathfrak{k})$ von Ω sind ganze algebraische Zahlen.*

Beweis: Es sei m eine nicht-quadratische natürliche Zahl, die Norm einer ganzen Zahl μ ohne ganz-rationalen Teiler aus Ω ist (etwa $m = -d_0$ für $d \neq -4$ bzw. $m = 2$ für $d = -4$, wenn d die Diskriminante von Ω und d_0 ihr quadratfreier Kern ist[1]). Ist dann $\mathfrak{k}$ eine absolute Idealklasse von Ω, $\mathfrak{a}$ ein Ideal aus $\mathfrak{k}$ und a_1, a_2 eine Basis von $\mathfrak{a}$, so hängt die Basis $\mu a_1, \mu a_2$ von $(\mu)\mathfrak{a}$ mit a_1, a_2 durch eine Transformation m-ten Grades

$$\mu(a_1, a_2) = M(a_1, a_2)$$

zusammen. Daher ist

$$j(\mathfrak{k}) = j(a_1, a_2) = j(\mu(a_1, a_2)) = j(M(a_1, a_2))$$

Wurzel des Polynoms $J_m(t, t)$. Da dessen Koeffizienten nach Satz 7 ganze rationale Zahlen sind, ist $j(\mathfrak{k})$ zunächst eine algebraische Zahl, die überdies ganz ist, wenn der höchste Koeffizient von $J_m(t, t)$ gleich ± 1 ist. Daß letzteres der Fall ist, wird nach den Sätzen 4, 5 bewiesen sein, wenn gezeigt ist, daß der niedrigste Koeffizient der q-Entwicklung von

$$J_m(j(w_1, w_2),\ j(w_1, w_2)) = \prod_{\nu=1}^{\psi(m)} (j(w_1, w_2) - j(M_\nu(w_1, w_2))) \tag{7}$$

gleich ± 1 ist. Das ergibt sich aber für nicht-quadratisches m unmittelbar durch Bildung des Produkts rechts in (7) aus den q-Entwicklungen (3′) und (5).

---

[1]) Unter dem Gesichtspunkt a) (S. 116/17) kann man zum Existenznachweis eines solchen m auch einfach den (unter dem Gesichtspunkt b) nicht vorauszusetzenden) Satz von der arithmetischen Progression in Ω (K. Th., Satz 13) anwenden, nach dem es in Ω unendlich viele Primhauptideale 1. Grades (ϖ) gibt. Die Norm p jedes solchen ϖ kann als m gewählt werden.

§ 3. Das Zerlegungsgesetz für Primideale 1. Grades von Ω in den Körpern Ω(j(𝔣)).

Wir haben jetzt neben der Funktion $j(w_1, w_2)$ auch die bei deren Definition auftretende Funktion $\Delta(w_1, w_2)$ zu betrachten. Diese ist bei $\mathfrak{S}$ invariant, homogen von der Dimension -12 in w_1, w_2, verschwindet im Regularitätsbereich von $j(w_1, w_2)$ nicht und besitzt nach (2′) (S. 119) eine q-Entwicklung der Form

$$\Delta(w_1, w_2) = \left(\frac{2\pi}{w_2}\right)^{12} q(1 + [q]). \tag{8}$$

Wir bilden nun mittels des Repräsentantensystems (4) die $\psi(m)$ Funktionen

$$\varphi_{M_\nu}(w_1, w_2) = m^{12} \frac{\Delta(M_\nu(w_1, w_2))}{\Delta(w_1, w_2)}. \tag{9}$$

Diese Funktionen hängen nicht von den speziellen Repräsentanten M_ν, sondern nur von deren Transformationsklassen ab. Sie sind ferner homogen von der Dimension 0 in w_1, w_2 und im Regularitätsbereich von $j(w_1, w_2)$ analytisch und regulär. Das aus ihnen gebildete Polynom

$$\Phi_m(t;\, w_1,\, w_2) = \prod_{\nu=1}^{\psi(m)} (t - \varphi_{M_\nu}(w_1, w_2))$$

heißt die *Multiplikatorgleichung* von $\Delta(w_1, w_2)$ für den Grad m. Ganz analog wie Satz 7 beweist man über sie zunächst

Satz 9. *Die Multiplikatorgleichung $\Phi_m(t; w_1, w_2)$ ist ein Polynom $\Phi_m(t, j(w_1, w_2))$ in t und $j(w_1, w_2)$ mit ganzen rationalen Koeffizienten.*

Im singulären Falle, d. h. wenn für w_1, w_2 eine Idealbasis a_1, a_2 aus Ω eingesetzt wird, sind also alle $\varphi_{M_\nu}(a_1, a_2)$ ganze algebraische Zahlen (Satz 8). Über diese beweisen wir nun für den Fall, daß m eine in Ω in zwei verschiedene Primideale zerfallende Primzahl ist, den folgenden Satz, der die arithmetische Grundlage für die Herleitung des Zerlegungsgesetzes sowohl hier als auch im analogen Falle des Abschnitts II bildet:

Satz 10. *Es sei p eine Primzahl, die in Ω in zwei verschiedene Primideale 1. Grades $\mathfrak{p}$ und $\overline{\mathfrak{p}}$ zerfällt. Ist dann $\mathfrak{a}$ ein Ideal aus Ω, a_1, a_2 eine Basis von $\mathfrak{a}$, und sind P und $\overline{P}$ Repräsentanten derjenigen, eindeutig bestimmten Transformationsklassen p-ten Grades, die die Transformation der Basis a_1, a_2 von $\mathfrak{a}$ in die sämtlichen Basen von $\mathfrak{p}\mathfrak{a}$ und $\overline{\mathfrak{p}}\mathfrak{a}$ bewirken, so sind die singulären Werte $\varphi_P(a_1, a_2)$ und $\varphi_{\overline{P}}(a_1, a_2)$ Darstellungen der Ideale $\overline{\mathfrak{p}}^{12}$ und $\mathfrak{p}^{12}$ als Hauptideale, (während die den übrigen Transformationsklassen p-ten Grades entsprechenden singulären Werte $\varphi_{P_\nu}(a_1, a_2)$ Einheiten sind).*

In dem genannten singulären Falle hat ferner die Multiplikatorgleichung $\Phi_p(t, j(w_1, w_2))$ die Kongruenzeigenschaft

$$\Phi_p(t, j(a_1, a_2)) \equiv t^{p+1} + \gamma t \bmod. p,$$

wo γ prim zu p ist.

Beweis: a) Wir beweisen zunächst die letztere Behauptung, ohne aber dabei vorerst auf den singulären Fall einzugehen. Dazu knüpfen wir an den oben nicht

ausgeführten Beweis von Satz 9 an, der sich in unserem jetzigen Spezialfall $m = p$ folgendermaßen gestaltet:

Die Koeffizienten von $\Phi_p(t; w_1, w_2)$, d. h. die symmetrischen Grundfunktionen der $\varphi_{P_\nu}(w_1, w_2)$ sind zunächst als ganze Modulfunktionen Polynome in $j(w_1, w_2)$ (Satz 4). Aus dem in (4) angegebenen vollständigen Repräsentantensystem für die $\psi(m)$ Transformationsklassen m-ten Grades, das für den Spezialfall $m = p$ das System der $\psi(p) = p + 1$ Transformationen

$$(10) \qquad P_\nu = \begin{pmatrix} 1 & \nu \\ 0 & p \end{pmatrix} \quad (\nu = 1, \ldots, p), \quad P_{p+1} = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ist, erhält man ferner gemäß (8), (9) q-Entwicklungen der folgenden Form für die $\varphi_{P_\nu}(w_1, w_2)$:

$$(11) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \varphi_{P_\nu}(w_1, w_2) = \zeta_p^\nu q^{\frac{1}{p}-1}\left(1 + \left[\zeta_p^\nu, q^{\frac{1}{p}}\right]\right) \\ \varphi_{P_{p+1}}(w_1, w_2) = p^{12} q^{p-1}(1 + [q]) \end{array} \right\} \qquad (\nu = 1, \ldots, p).$$

Wir bezeichnen diese $p + 1$ Entwicklungen in der angegebenen Reihenfolge mit $A_1, \ldots, A_{p+1}$. Wegen des gleichartigen Vorkommens von $\zeta_p^1, \ldots, \zeta_p^{p-1}$ in $A_1, \ldots, A_{p-1}$ haben die symmetrischen Grundfunktionen von $A_1, \ldots, A_{p+1}$ ganze rationale Koeffizienten. Nach dem q-Entwicklungsprinzip ist also $\Phi_p(t; w_1, w_2)$ ein Polynom $\Phi_p(t, j(w_1, w_2))$ in t und $j(w_1, w_2)$ mit ganzen rationalen Koeffizienten.

Aus diesem Beweis des Spezialfalles $m = p$ von Satz 9 entnehmen wir nun weiter folgendes:

Nach (11) gilt identisch in q

$$(12) \qquad A_1 \equiv A_2 \equiv \cdots \equiv A_p \bmod. (1 - \zeta_p),$$

weil alle Potenzen ζ_p^ν zu einander kongruent mod. $(1 - \zeta_p)$ sind, sowie

$$(13) \qquad A_{p+1} \equiv 0 \bmod p.$$

Bezeichnen nun $\bar{S}_\mu$ und S_μ die μ-ten symmetrischen Grundfunktionen der $A_1, \ldots, A_p$ und der $A_1, \ldots, A_{p+1}$, wobei noch $\bar{S}_0 = 1$, $\bar{S}_{p+1} = 0$ gesetzt werde, so daß

$$(14) \qquad S_\mu = \bar{S}_{\mu-1} A_{p+1} + \bar{S}_\mu \qquad (\mu = 1, \ldots, p+1)$$

ist, so folgt aus (13) und der nach (12) gültigen Kongruenz

$$(15) \quad \bar{S}_\mu \equiv \binom{p}{\mu} A_1 \bmod. (1 - \zeta_p), \text{ also } \bar{S}_\mu \equiv 0 \bmod. p \quad (\mu = 1, \ldots, p-1)$$

gemäß (14)

$$S_\mu \equiv 0 \bmod. p \quad (\mu = 1, \ldots, p-1, p+1, \text{ d. h. } \mu \neq p).$$

Diese in q identischen Kongruenzen gelten nach dem q-Entwicklungsprinzip auch identisch in $j(w_1, w_2)$. Somit besteht die Kongruenz

$$(16) \qquad \Phi_p(t, j(w_1, w_2)) \equiv t^{p+1} \pm S_p(w_1, w_2) t \bmod. p$$

identisch in t und $j(w_1, w_2)$, und dabei ist

$$(17) \qquad S_p(w_1, w_2) = \sum_{\nu=1}^{p+1} \frac{\prod_{\nu'=1}^{p+1} \varphi_{P_{\nu'}}(w_1, w_2)}{\varphi_{P_\nu}(w_1, w_2)}.$$

b) Um die übrigen Behauptungen des Satzes zu beweisen, bemerken wir zunächst, daß das in (17) auftretende Produkt nach (11) eine q-Entwicklung der Form

$$\prod_{\nu=1}^{p+1} \varphi_{P_\nu}(w_1, w_2) = p^{12}(1 + [q])$$

hat, also als ganze Modulfunktion ohne Pol bei $q = 0$ eine Konstante ist (Satz 4). Somit ist

$$(18) \qquad \prod_{\nu=1}^{p+1} \varphi_{P_\nu}(w_1, w_2) = p^{12}.$$

Im singulären Falle, d. h. für jede Idealbasis a_1, a_2 aus Ω sind also die ganzen algebraischen Zahlen $\varphi_{P_\nu}(a_1, a_2)$ Teiler von p^{12}.

Es seien nun ferner $P^{(1)} = P$, $P^{(2)}, \ldots, P^{(f)}$ solche Transformationen p-ten Grades, daß (a_1, a_2), $P^{(1)}(a_1, a_2)$, $P^{(2)}P^{(1)}(a_1, a_2), \ldots, P^{(f)}\ldots P^{(1)}(a_1, a_2)$ Basen der Ideale $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{p}\mathfrak{a}$, $\mathfrak{p}^2\mathfrak{a}, \ldots, \mathfrak{p}^f\mathfrak{a}$ sind. Unter f sei dabei die Ordnung der absoluten Idealklasse von $\mathfrak{p}$ verstanden und

$$\mathfrak{p}^f = (\varpi), \quad \bar{\mathfrak{p}}^f = (\bar{\varpi}) \quad \text{mit} \quad \varpi\bar{\varpi} = p^f$$

gesetzt. Dann gilt nach (9)

$$(19) \qquad \begin{aligned} &\varphi_{P^{(1)}}(a_1, a_2)\,\varphi_{P^{(2)}}(P^{(1)}(a_1, a_2)) \ldots \varphi_{P^{(f)}}(P^{(f-1)}\ldots P^{(1)}(a_1, a_2)) \\ &= p^{12f}\frac{\Delta(P^{(f)}\ldots P^{(1)}(a_1, a_2))}{\Delta(a_1, a_2)} = p^{12f}\frac{\Delta(\varpi a_1, \varpi a_2)}{\Delta(a_1, a_2)} = \frac{p^{12f}}{\varpi^{12}} = \bar{\varpi}^{12}, \end{aligned}$$

wobei benutzt wurde, daß die Idealbasis $P^{(f)}\ldots P^{(1)}(a_1, a_2)$ von $\mathfrak{p}^f\mathfrak{a} = (\varpi)\mathfrak{a}$ im Argument von Δ durch die nach $\mathfrak{S}$ äquivalente ϖa_1, ϖa_2 ersetzt werden darf, und dann, daß Δ homogen von der Dimension -12 ist. Da nun die f Faktoren links in (19) nach dem zuvor Gezeigten ganze algebraische Zahlen sind, die nach (18) in $p^{12} = \mathfrak{p}^{12}\bar{\mathfrak{p}}^{12}$ und nach (19) in $\varpi^{12} = \bar{\mathfrak{p}}^{12f}$ aufgehen, geht jeder von ihnen auch im größten gemeinsamen Teiler $(\mathfrak{p}^{12}\bar{\mathfrak{p}}^{12}, \bar{\mathfrak{p}}^{12f})$ auf, der wegen der Voraussetzung $\mathfrak{p} \neq \bar{\mathfrak{p}}$ gleich $\bar{\mathfrak{p}}^{12}$ ist. Es kann dann aber keiner von ihnen echter Teiler von $\bar{\mathfrak{p}}^{12}$ sein, weil sonst ihr Produkt echter Teiler von $\bar{\mathfrak{p}}^{12f}$ wäre, entgegen (19). Sie sind also alle untereinander assoziiert und Darstellungen des Ideals $\bar{\mathfrak{p}}^{12}$ als Hauptideal. Damit ist die Behauptung des Satzes über $\varphi_P(a_1, a_2) = \varphi_{P^{(1)}}(a_1, a_2)$ bewiesen. Entsprechend schließt man für $\varphi_{\bar{P}}(a_1, a_2)$. Aus (18) folgt dann schließlich, daß die übrigen $\varphi_{P_\nu}(a_1, a_2)$ Einheiten sind, da schon die den Faktoren $\varphi_P(a_1, a_2)$ und $\varphi_{\bar{P}}(a_1, a_2)$ entsprechenden Hauptideale das mit dem vollen Produkt (18) übereinstimmende Produkt $\bar{\mathfrak{p}}^{12}\mathfrak{p}^{12} = p^{12}$ ergeben. Dabei ist von der ohne weiteres aus $\mathfrak{p} \neq \bar{\mathfrak{p}}$ folgenden Tatsache Gebrauch gemacht, daß P und $\bar{P}$ verschiedenen Transformationsklassen p-ten Grades angehören.

c) Wir haben nun noch zu zeigen, daß der Koeffizient $\pm S_p(w_1, w_2)$ aus (16) im singulären Falle eine zu p prime Zahl $\gamma = \pm S_p(a_1, a_2)$ ist. Nach (17), (18) ist

$$\pm \gamma = S_p(a_1, a_2) = \frac{p^{12}}{\varphi_{\mathfrak{P}}(a_1, a_2)} + \frac{p^{12}}{\varphi_{\bar{\mathfrak{P}}}(a_1, a_2)} + \cdots .$$

Da nun nach dem unter b) Bewiesenen die beiden ersten Summanden rechts als Hauptideale $\mathfrak{p}^{12}$ und $\bar{\mathfrak{p}}^{12}$, die weiteren Summanden p^{12} sind, ist die Summe $\pm \gamma$ prim zu $\mathfrak{p}$ und $\bar{\mathfrak{p}}$, d. h. zu p.

Damit ist Satz 10 bewiesen. Wir beweisen nunmehr

Satz 11. *Ist $\mathfrak{p}$ ein nicht in der Diskriminante von Ω aufgehendes Primideal 1. Grades von Ω, p seine Norm und $\mathfrak{k}_{\mathfrak{p}}$ seine absolute Idealklasse, so gilt für jede absolute Idealklasse $\mathfrak{k}$ von Ω die Kongruenz*

$$j^p(\mathfrak{k}) \equiv j(\mathfrak{k}_{\mathfrak{p}}^{-1}\mathfrak{k}) \mod \mathfrak{p}. \text{ [1]}$$

Beweis: Wir betrachten die $\psi(p) = p + 1$ Funktionen

$$\delta_{P_\nu}(w_1, w_2) = j^p(w_1, w_2) - j(P_\nu(w_1, w_2))$$

und bilden aus ihnen und den Funktionen $\varphi_{P_\nu}(w_1, w_2)$ das Polynom

$$G_p(t;\, w_1,\, w_2) = \sum_{\nu=1}^{p+1} \frac{\Phi_p(t,\, j(w_1,\, w_2))}{t - \varphi_{P_\nu}(w_1, w_2)}\, \delta_{P_\nu}(w_1,\, w_2)\,.$$

Dieses ist zunächst nach derselben Schlußweise, wie im vorigen Beweis unter a), ein Polynom $G_p(t, j(w_1, w_2))$ in t und $j(w_1, w_2)$ mit ganzen rationalen Koeffizienten. Es tritt in bekannter Weise als Zähler in den Darstellungen

$$\delta_{P_\nu}(w_1, w_2) = \frac{G_p(\varphi_{P_\nu}(w_1,\, w_2),\; j(w_1,\, w_2))}{\Phi_p'(\varphi_{P_\nu}(w_1,\, w_2),\; j(w_1,\, w_2))} \tag{20}$$

auf, deren Nenner die Ableitung der Multiplikatorgleichung $\Phi_p(t,\, j(w_1,\, w_2))$ nach t ist.

Wir zeigen nun, daß identisch in t und $j(w_1, w_2)$ gilt

$$G_p(t,\, j(w_1,\, w_2)) \equiv 0 \mod p. \tag{21}$$

Dazu seien $A_1, \ldots, A_{p+1}$ und $B_1, \ldots, B_{p+1}$ die q-Entwicklungen der $\varphi_{P_\nu}(w_1, w_2)$ und der $\delta_{P_\nu}(w_1, w_2)$, bezogen auf die in (10) vorliegende Reihenfolge der P_ν. Es ist dann

$$\begin{aligned} G_p(t,\, j(w_1,\, w_2)) &= (t - A_1) \cdots (t - A_p) B_{p+1} \\ &+ (t - A_{p+1})\big((t - A_2) \cdots (t - A_p) B_1 + \cdots + (t - A_1) \cdots (t - A_{p-1}) B_p\big). \end{aligned} \tag{22}$$

Nun ist wie oben in (12)

$$A_1 \equiv \cdots \equiv A_p \mod (1 - \zeta_p), \qquad B_1 \equiv \cdots \equiv B_p \mod (1 - \zeta_p) \tag{23}$$

---

[1]) In den bisherigen Darstellungen der Theorie I resultiert an Stelle dieser Kongruenz nur die weniger präzise Aussage, daß die fragliche Kongruenz nach einem *Primteiler von* $\mathfrak{p}$ *oder* $\bar{\mathfrak{p}}$ als Modul gilt. Den Hinweis auf die Möglichkeit und einen (etwas anderen) Beweis der hier angegebenen Verschärfung dieses Resultats, die für meine Behandlung der Theorie II grundlegend ist, verdanke ich einer brieflichen Mitteilung von Herrn *E. Hecke*.

und daher wie oben in (15)

$$(24) \qquad (t - A_2) \cdots (t - A_p) B_1 + \cdots + (t - A_1) \cdots (t - A_{p-1}) B_p \equiv 0 \mod p.$$

Wird weiter

$$j(w_1, w_2) = \sum_{n=-1}^{\infty} a_n q^n$$

gesetzt, so ist nach Satz 5 und (10)

$$(25) \qquad j^p(w_1, w_2) \equiv \sum_{n=-1}^{\infty} a_n q^{np} \mod p$$

$$(26) \qquad j(P_{p+1}(w_1, w_2)) = j(p w_1, w_2) = \sum_{n=-1}^{\infty} a_n q^{np},$$

also

$$(27) \qquad B_{p+1} \equiv 0 \mod p.$$

Aus (22), (24), (27) ergibt sich die Richtigkeit von (21) zunächst, wie alle bisherigen Kongruenzen, identisch in t und q, also nach dem q-Entwicklungsprinzip auch identisch in t und $j(w_1, w_2)$.

Es sei nun a_1, a_2 eine Basis eines Ideals $\mathfrak{a}$ aus $\mathfrak{k}$, $\bar{\mathfrak{p}}$ das zu $\mathfrak{p}$ konjugierte Primideal und $\overline{P}$ eine Transformation von a_1, a_2 in eine Basis von $\bar{\mathfrak{p}}\mathfrak{a}$. Dann ist nach Satz 10, der nach der Voraussetzung über $\mathfrak{p}$ anwendbar ist,

$$(28) \qquad \Phi'_p(\varphi_{\overline{P}}(a_1, a_2),\ j(a_1, a_2)) \equiv \varphi^p_{\overline{P}}(a_1, a_2) + \gamma \mod p$$
$$\equiv \gamma \mod \mathfrak{p}, \text{ also prim zu } \mathfrak{p} \text{ (insbesondere } \neq 0).$$

Somit versagt die Darstellung (20) für $\delta_{\overline{P}}(a_1, a_2)$ nicht durch Verschwinden des Nenners, und es gilt nach (21), (28)

$$(29) \qquad \delta_{\overline{P}}(a_1, a_2) \equiv 0 \mod \mathfrak{p}.$$

Daraus folgt die Behauptung des Satzes, weil

$$\delta_{\overline{P}}(a_1, a_2) = j^p(a_1, a_2) - j(\overline{P}(a_1, a_2)) = j^p(\mathfrak{k}) - j(\mathfrak{k}_{\mathfrak{p}}\mathfrak{k}) = j^p(\mathfrak{k}) - j(\mathfrak{k}_{\mathfrak{p}}^{-1}\mathfrak{k})$$

ist.

Aus den Sätzen 6, 8, 11 folgert man nun in bekannter Weise das folgende Zerlegungsgesetz für die Primideale 1. Grades von Ω in den Körpern $\Omega(j(\mathfrak{k}))$:

Satz 12. *Ist $\mathfrak{k}$ eine absolute Idealklasse von Ω und $\mathfrak{p}$ ein Primideal 1. Grades von Ω, das nicht aufgeht*

1. *in der Diskriminante von Ω,*
2. *in der Relativdiskriminante von $j(\mathfrak{k})$ bezüglich Ω,*
3. *in dem Differenzenprodukt $\prod_{\mathfrak{k}_1 \neq \mathfrak{k}_2} (j(\mathfrak{k}_1) - j(\mathfrak{k}_2))$,*

so zerfällt $\mathfrak{p}$ im Körper $\Omega(j(\mathfrak{k}))$ in verschiedene Primideale f-ten Relativgrades bezüglich Ω, wenn f die Ordnung der absoluten Idealklasse von $\mathfrak{p}$ ist.

Bezüglich des Beweises dieses Satzes verweisen wir auf den unten näher ausgeführten Beweis des analogen Satzes 24.

Satz 12 besagt nach der allgemeinen Klassenkörpertheorie[1]), daß jeder der Körper $\Omega(j(\mathfrak{k}))$ mit dem absoluten Klassenkörper K von Ω zusammenfällt. Insbesondere gilt hiernach das Zerlegungsgesetz von Satz 12 für alle Primideale von Ω.

II. Der Strahlklassenkörper $\mathsf{K}_{\mathfrak{m}}$ mod. $\mathfrak{m}$ von Ω.

§ 1. Die Funktion $\tau(u, \mathfrak{w})$.

Es seien wie bisher w_1, w_2 komplexe Variable. Bei Funktionen von w_1, w_2, wie den in I, § 1, (1)—(3) genannten, die bei der Modulgruppe $\mathfrak{S}$ invariant sind, also nur von dem durch w_1, w_2 erzeugten *Modul* $\mathfrak{w}$ nicht von der speziellen Basis w_1, w_2 von $\mathfrak{w}$ abhängen, schreiben wir fortan im Argument $\mathfrak{w}$ für w_1, w_2.

Es sei nun u eine weitere komplexe Variable und

$$(30) \qquad \wp(u, \mathfrak{w}) = \frac{1}{u^2} + \sum_{n_1, n_2}{}' \left(\frac{1}{(u - n_1 w_1 - n_2 w_2)^2} - \frac{1}{(n_1 w_1 + n_2 w_2)^2} \right)$$
$$(n_1, n_2 \text{ ganzzahlig}, \neq 0, 0)$$

die *Weierstraß*sche $\wp$-Funktion. Aus ihr bilden wir die diesem Abschnitt zugrundeliegende *Weber*sche τ-Funktion, die außer von u, $\mathfrak{w}$ noch von dem zu betrachtenden imaginär-quadratischen Zahlkörper Ω abhängt: Wir bezeichnen mit e die Anzahl der Einheiten (Einheitswurzeln) in Ω, also

$$\begin{aligned} &e = 2, \quad \text{wenn } d \neq -4, -3, \quad \text{d. h. } \Omega \neq \mathsf{P}(\sqrt{-1}), \ \mathsf{P}(\sqrt{-3}) \\ &e = 4, \quad \text{wenn } d = -4, \quad\quad\quad \text{d. h. } \Omega = \mathsf{P}(\sqrt{-1}) \\ &e = 6, \quad \text{wenn } d = -3, \quad\quad\quad \text{d. h. } \Omega = \mathsf{P}(\sqrt{-3}), \end{aligned}$$

wo d die Diskriminante von Ω und P der rationale Zahlkörper ist. Dann setzen wir mit geringer Modifikation des *Weber*schen Ansatzes[2])

$$(31) \qquad \tau(u, \mathfrak{w}) = g^{(e)}(\mathfrak{w})(-1)^{\frac{e}{2}} \wp^{\frac{e}{2}}(u, \mathfrak{w}),$$

wobei

$$(32) \qquad \begin{cases} g^{(2)}(\mathfrak{w}) = 2^7 3^5 \dfrac{g_2(\mathfrak{w})\, g_3(\mathfrak{w})}{\Delta(\mathfrak{w})} \\ g^{(4)}(\mathfrak{w}) = 2^8 3^4 \dfrac{g_2^2(\mathfrak{w})}{\Delta(\mathfrak{w})} \\ g^{(6)}(\mathfrak{w}) = 2^9 3^6 \dfrac{g_3(\mathfrak{w})}{\Delta(\mathfrak{w})}. \end{cases}$$

Es gilt zunächst

Satz 13. *Die Funktion $\tau(u, \mathfrak{w})$ ist für jedes feste $\mathfrak{w}$ aus dem Regularitätsbereich von $j(\mathfrak{w})$* (also für jeden wirklich zweigliedrigen Modul $\mathfrak{w}$ aus komplexen

---

[1]) Die endlich vielen Ausnahmen 1.—3. in Satz 12 für p machen für die Anwendung von K. Th., Satz 9 nichts aus, da man die absolute Hauptklasse als Idealgruppe nach irgendeinem ganzen Ideal als Modul, also z. B. nach dem Produkt der Ausnahmeprimideale 1.—3. erklären kann.

[2]) *W.*, S. 572.

Zahlen) *eine für alle endlichen u analytische Funktion von u mit den Perioden* $\mathfrak{w}$, *die bis auf Pole bei* $u \equiv 0$ mod. $\mathfrak{w}$ *im Endlichen regulär ist.*

Ferner benötigen wir die folgenden Tatsachen über das Verhalten von $\tau(u, \mathfrak{w})$ als Funktion von u, die zu den in I, § 1, Satz 1—5 zusammengestellten Tatsachen über das Verhalten von $j(w_1, w_2)$ als Funktion von w_1, w_2 weitgehend analog sind:

Analog zu Satz 1 gilt

Satz 14. *Die Funktion* $\tau(u, \mathfrak{w})$ *ist homogen von der Dimension* 0 *in* $u, \mathfrak{w}$.

Es sei ferner $\mathfrak{a}$ ein Ideal von Ω und $\mathfrak{U}_\mathfrak{a}$ die Gruppe der linearen Substitutionen in u, die das Ideal $\mathfrak{a}$ in sich überführen. Ist α_1, α_2 eine Basis von $\mathfrak{a}$, so sind das die Substitutionen

$$u' = \varepsilon u + n_1 \alpha_1 + n_2 \alpha_2, \quad \text{wo } n_1, n_2 \text{ ganzzahlig und } \varepsilon^e = 1; \quad \text{kurz } u' \equiv \varepsilon u \text{ mod. } \mathfrak{a}.$$

Dann gilt für die Ω zugeordnete τ-Funktion [1]) analog zu Satz 2

Satz 15. *Die Funktion* $\tau(u, \mathfrak{a})$ *ist bei* $\mathfrak{U}_\mathfrak{a}$ *invariant.*

Die Gruppe $\mathfrak{U}_\mathfrak{a}$ ist in der u-Ebene eigentlich diskontinuierlich. Sie führt zu einer Einteilung der u-Ebene in Diskontinuitätsbereiche, nämlich in geradlinige Dreiecke mit Randzuordnung. Man erhält deren vollständiges Netz, wenn man von dem speziellen Diskontinuitätsbereich $D_\mathfrak{a}$ ausgeht, der in Fig. 2—4 entsprechend den drei Fällen für e gezeichnet ist [2]),

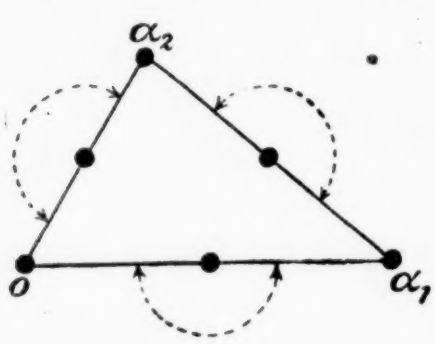


Fig. 2.

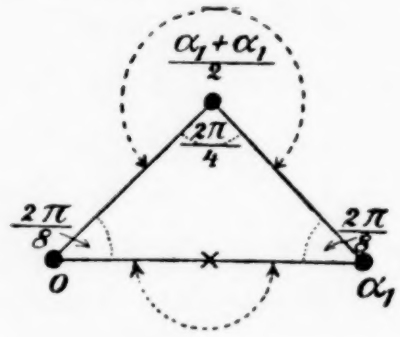


Fig. 3.

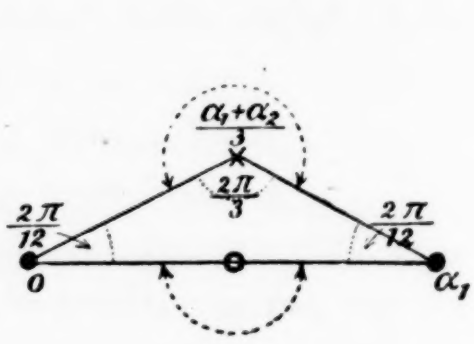


Fig. 4.

und die Randzuordnungen berücksichtigt. Als Uniformisierende für einen Punkt u_0 von $D_\mathfrak{a}$ kann die Potenz $(u - u_0)^n$ gewählt werden, wenn die Umgebung von u_0 innerhalb $D_\mathfrak{a}$ den Winkel $\frac{2\pi}{n}$ bildet. Im allgemeinen ist $n = 1$, in den mit ● markierten Punkten $n = e$, in den mit $\times$ markierten $n = \frac{e}{2}$ und in dem mit O markierten $n = \frac{e}{3}$. Analog zu Satz 3 gilt

Satz 16. *Die Funktion* $\tau(u, \mathfrak{a})$ *ist analytische Funktion zu* $D_\mathfrak{a}$, *d. h. von rationalem Charakter in den zu* $D_\mathfrak{a}$ *gehörigen Uniformisierenden. Sie ist ferner eine Funktion 1. Ordnung zu* $D_\mathfrak{a}$, *d. h. nimmt jeden Wert (in den zu* $D_\mathfrak{a}$ *gehörigen Uniformisierenden gemessen) ein- und nur einmal an, oder auch:* $D_\mathfrak{a}$ *ist gleichzeitig Funda-*

---

[1]) Wenn im folgenden der Periodenmodul $\mathfrak{w}$ von $\tau(u, \mathfrak{w})$ durch ein Ideal $\mathfrak{a}$ aus Ω ersetzt wird („singulärer" Fall), so ist stets die Ω zugeordnete Funktion $\tau(u, \mathfrak{w})$ zugrundezulegen.

[2]) $D_\mathfrak{a}$ ist der e-te Teil des Periodenparallelogramms $0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2$ von $\wp(u, \mathfrak{a})$.

mentalbereich für $\tau(u, \mathfrak{a})$. Speziell liegt ihr einziger Pol 1. Ordnung in $D_\mathfrak{a}$ in dem Eckpunkt 0 von $D_\mathfrak{a}$ (und den dazu nach $\mathfrak{U}_\mathfrak{a}$ äquivalenten Eckpunkten).

Hiernach besteht der Regularitätsbereich von $\tau(u, \mathfrak{a})$ aus allen endlichen u mit Ausnahme der sämtlichen $u \equiv 0$ mod. $\mathfrak{a}$, wo $\tau(u, \mathfrak{a})$ Pole hat, die in gewöhnlichem Sinne von e-ter Ordnung sind. Da aus der Invarianz bei $\mathfrak{U}_\mathfrak{a}$ einer im endlichen analytischen Funktion von u folgt, daß sie auch analytisch zu $D_\mathfrak{a}$ ist, ergibt sich nach funktionentheoretischen Sätzen aus Satz 16 analog zu Satz 4

Satz 17. *Jede bei $\mathfrak{U}_\mathfrak{a}$ invariante, im Endlichen analytische Funktion von u ist eine rationale Funktion von $\tau(u, \mathfrak{a})$ (und umgekehrt).*

Analog zu Satz 5 haben wir schließlich eine Entwicklung der Funktion $\tau(u, \mathfrak{w})$ nach Potenzen von

$$q = e^{2\pi i \frac{w_1}{w_2}} \quad \text{und} \quad z = e^{2\pi i \frac{u}{w_2}}.$$

Diese ergibt sich aus der bekannten [1]) für $|q| < 1$ und $|q| < |z| < |q|^{-1}$ konvergenten *Fourier*-Entwicklung der Funktion (30)

$$(30') \qquad \wp(u, \mathfrak{w}) =$$

$$-\left(\frac{2\pi}{w_2}\right)^2 \frac{1}{2^2 3}\left(1 + \frac{12}{(z^{\frac{1}{2}} - z^{-\frac{1}{2}})^2} - 24 \sum_{n,\, n'=1}^{\infty} n q^{nn'} + 12 \sum_{n,\, n'=1}^{\infty} n q^{nn'} (z^n + z^{-n})\right)$$

und der aus (1'), (2') (S. 119) folgenden q-Entwicklung des Normierungsfaktors (32)

$$(32') \qquad g^{(e)}(\mathfrak{w}) = \frac{1}{\left(\frac{2\pi}{w_2}\right)^e} 2^e 3^{\frac{e}{2}} q^{-1} (1 + [q])$$

durch Zusammenfassung gemäß (31):

Satz 18. *Die Funktion $\tau(u, \mathfrak{w})$ besitzt eine für $|q| < 1$ und $|q| < |z| < |q|^{-1}$ konvergente q-z-Entwicklung der Form*

$$(31') \qquad \tau(u, \mathfrak{w}) =$$

$$q^{-1}(1 + [q])\left(1 + \frac{12}{(z^{\frac{1}{2}} - z^{-\frac{1}{2}})^2} - 24 \sum_{n,\, n'=1}^{\infty} n q^{nn'} + 12 \sum_{n,\, n'=1}^{\infty} n q^{nn'} (z^n + z^{-n})\right)^{\frac{e}{2}}.$$

Über das Verhalten von $\tau(u, \mathfrak{w})$ als Funktion von $\mathfrak{w}$ heben wir neben der schon in der Bezeichnung ausgedrückten Invarianz bei $\mathfrak{S}$ noch die folgende Tatsache hervor:

Satz 19. *Für jedes nicht ganzzahlige komplexe Zahlenpaar a_1, a_2 ist $\tau(a_1 w_1 + a_2 w_2; w_1, w_2)$ eine von der Dimension 0 homogene, für alle w_1, w_2 des Regularitätsbereichs von $j(w_1, w_2)$ reguläre, analytische Funktion von w_1, w_2.*

---

[1]) Siehe etwa Enz. d. Math. Wiss. II 2, Art. 3 (*R. Fricke*), Gl. (227), (229).

§ 2. Die Strahlklasseninvarianten $\tau(\mathfrak{f}^*)$ mod. $\mathfrak{m}$ zu $\mathfrak{k}$ von Ω.

Es sei irgendein ganzes Ideal $\mathfrak{m} \neq 1$ aus Ω vorgegeben. Wir betrachten dann neben den absoluten Idealklassen $\mathfrak{k}$ von Ω die *Strahlklassen* $\mathfrak{f}^*$ mod. $\mathfrak{m}$ von Ω. Diese ergeben sich, wenn man als Hauptklasse zugrundelegt den *Strahl* mod. $\mathfrak{m}$ von Ω, d. h. die Gruppe aller Hauptideale (α) aus Ω, die durch zu $\mathfrak{m}$ prime α mit der Kongruenzeigenschaft

$$\alpha \equiv 1 \mod.^* \mathfrak{m} \quad ^1)$$

geliefert werden, und hierzu die Nebengruppen in der Gruppe aller zu $\mathfrak{m}$ primen Ideale bildet.

Es sei nun $\mathfrak{k}$ irgendeine absolute Idealklasse aus Ω und $\mathfrak{k}_\mathfrak{m}$ die absolute Idealklasse von $\mathfrak{m}$. Wir ordnen dann $\mathfrak{k}$ diejenigen Strahlklassen $\mathfrak{f}^*$ mod. $\mathfrak{m}$ zu, in die die absolute Idealklasse $\mathfrak{k}^{-1}\mathfrak{k}_\mathfrak{m}$ zerfällt und schreiben: $\mathfrak{f}^*$ *zu* $\mathfrak{k}$ für die so definierte Zuordnung. Es ist dabei umgekehrt $\mathfrak{k}$ durch $\mathfrak{f}^*$ eindeutig bestimmt.

Wir ordnen nun ferner den einer festen absoluten Idealklasse $\mathfrak{k}$ zugeordneten Strahlklassen $\mathfrak{f}^*$ auf folgende Weise je einen bestimmten Wert der Funktion $\tau(u, \mathfrak{w})$ zu: Es werde irgendein Ideal $\mathfrak{a}$ aus der Klasse $\mathfrak{k}$ gewählt, es werde ferner irgendein ganzes Ideal $\mathfrak{r}$ aus der Strahlklasse $\mathfrak{f}^*$ gewählt, und es werde schließlich irgendeine der assoziierten Körperzahlen ϱ gewählt, für die

$$(\varrho) = \frac{\mathfrak{r}\mathfrak{a}}{\mathfrak{m}} \tag{33}$$

ist. Der so bestimmte Funktionswert $\tau(\varrho, \mathfrak{a})$ werde der Strahlklasse $\mathfrak{f}^*$ zugeordnet. Nach dem Zusammenhang zwischen der $\mathfrak{f}^*$ enthaltenden absoluten Idealklasse $\mathfrak{k}^{-1}\mathfrak{k}_\mathfrak{m}$ mit $\mathfrak{k}$ ist $\frac{\mathfrak{r}\mathfrak{a}}{\mathfrak{m}}$ sicher Hauptideal, so daß unsere Vorschrift stets ausführbar ist. Nach den Sätzen 14, 15 ist ferner der $\mathfrak{f}^*$ zugeordnete Wert $\tau(\varrho, \mathfrak{a})$ weder von der Auswahl von $\mathfrak{a}$ aus $\mathfrak{k}$, noch von der Auswahl von $\mathfrak{r}$ aus $\mathfrak{f}^*$, noch von der Auswahl von ϱ unter assoziierten abhängig.

Genauerer Begründung bedarf nur die Unabhängigkeit von der Auswahl von $\mathfrak{r}$ aus $\mathfrak{f}^*$. Seien also $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{r}'$ ganze Ideale aus $\mathfrak{f}^*$. Dann kann

$$\mathfrak{r}' = (\xi)\mathfrak{r} \quad \text{mit} \quad \xi \equiv 1 \mod.^* \mathfrak{m}$$

gesetzt werden, und, da ξ höchstens den reduzierten Idealnenner $\mathfrak{r}$ hat, ist

$$\xi \equiv 1 \mod. \frac{\mathfrak{m}}{\mathfrak{r}}, \quad \text{also} \quad \xi\varrho \equiv \varrho \mod. \frac{\mathfrak{m}}{\mathfrak{r}}\frac{\mathfrak{r}\mathfrak{a}}{\mathfrak{m}}, \quad \text{d. h. mod. } \mathfrak{a}.$$

---

[1]) Wir bezeichnen für zu $\mathfrak{m}$ prime α, β aus Ω mit $\alpha \equiv \beta \mod.^* \mathfrak{m}$ die Kongruenz im *multiplikativen* Sinne, d. h. die Tatsache, daß $\alpha - \beta$ als reduzierter Idealbruch die Form $\frac{\mathfrak{a}\mathfrak{m}}{\mathfrak{b}}$ mit ganzen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ und $(\mathfrak{b}, \mathfrak{m}) = 1$ hat. Diese Tatsache besagt weniger als die für beliebige komplexe α, β und einen beliebigen komplexen Modul $\mathfrak{m}$ erklärte Kongruenz $\alpha \equiv \beta \mod. \mathfrak{m}$ im gewöhnlichen, *additiven* Sinne, d. h. die Tatsache, daß $\alpha - \beta$ Zahl aus $\mathfrak{m}$ ist (also, wenn $\mathfrak{m}$ ein ganzes oder gebrochenes Ideal aus Ω und α, β ganze oder gebrochene Zahlen aus Ω sind, daß $\alpha - \beta$ als Ideal von der Form $\mathfrak{a}\mathfrak{m}$ mit ganzem $\mathfrak{a}$ ist).

Da nun für die aus $\mathfrak{r}, \mathfrak{r}'$ nach (33) gebildeten Zahlen ϱ, ϱ' gilt

$$(\varrho') = (\xi)(\varrho), \quad \text{also} \quad \varrho' = \varepsilon\xi\varrho \quad \text{mit} \quad \varepsilon^e = 1,$$

so ergibt sich

$$\varrho' \equiv \varepsilon\varrho \bmod \mathfrak{a}$$

und somit nach Satz 15

$$\tau(\varrho', \mathfrak{a}) = \tau(\varrho, \mathfrak{a}).$$

Der oben konstruierte Wert $\tau(\varrho, \mathfrak{a})$ hängt somit nur von der Strahlklasse $\mathfrak{k}^*$ ab, kann daher eindeutig durch $\tau(\mathfrak{k}^*)$ bezeichnet werden und heißt die *Strahlklasseninvariante* von $\mathfrak{k}^*$.

Analog zu Satz 6 beweisen wir zunächst

Satz 20. *Die Strahlklasseninvarianten* $\tau(\mathfrak{k}^*)$ mod. $\mathfrak{m}$ *zu einer festen absoluten Idealklasse* $\mathfrak{k}$ *von* Ω *sind voneinander verschieden.*

Beweis: Durchläuft (ξ) ein vollständiges System von ganzen Repräsentanten der die absolute Hauptklasse zusammensetzenden Strahlklassen mod. $\mathfrak{m}$ und ist $\mathfrak{r}$ ein ganzes Ideal aus $\mathfrak{k}^*$, so durchläuft $(\xi)\mathfrak{r}$ ein vollständiges System von ganzen Repräsentanten der mit $\mathfrak{k}^*$ in derselben absoluten Idealklasse $\mathfrak{k}^{-1}\mathfrak{k}_\mathfrak{m}$ liegenden Strahlklassen mod. $\mathfrak{m}$. Daher erhält man die Strahlklasseninvarianten mod. $\mathfrak{m}$ zu $\mathfrak{k}$ in der Form $\tau(\xi\varrho, \mathfrak{a})$, wenn $\tau(\varrho, \mathfrak{a})$ eine von ihnen ist. Wäre nun für zwei der Argumente $\xi\varrho$

$$\tau(\xi'\varrho, \mathfrak{a}) = \tau(\xi\varrho, \mathfrak{a}),$$

so folgte nach Satz 16, daß $\xi'\varrho$ und $\xi\varrho$ nach $\mathfrak{U}_\mathfrak{a}$ äquivalent wären, also

$$\xi'\varrho \equiv \varepsilon\xi\varrho \bmod \mathfrak{a} \quad \text{mit} \quad \varepsilon^e = 1.$$

Daraus ergäbe sich durch Wegdivision von ϱ

$$\xi' \equiv \varepsilon\xi \bmod \frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{r}\mathfrak{a}}, \quad \text{d. h. mod.} \frac{\mathfrak{m}}{\mathfrak{r}},$$

also, weil $(\mathfrak{r}, \mathfrak{m}) = 1$,

$$\xi' \equiv \varepsilon\xi \bmod^* \mathfrak{m}.$$

Es gehörten also (ξ') und (ξ), also auch $(\xi')\mathfrak{r}$ und $(\xi)\mathfrak{r}$ zur selben Strahlklasse mod. $\mathfrak{m}$. Anders ist daher eine Gleichheit zweier Strahlklasseninvarianten mod. $\mathfrak{m}$ zu $\mathfrak{k}$ nicht möglich.

Um die Natur der Strahlklasseninvarianten mod. $\mathfrak{m}$ zu $\mathfrak{k}$ näher zu bestimmen, haben wir — analog wie in I, § 2 die Transformationsgleichung $J_m(t, j(\mathfrak{w}))$ der Funktion $j(\mathfrak{w})$ für den Transformationsgrad m — hier die Teilungsgleichung der Funktion $\tau(u, \mathfrak{w})$ für den Divisor m heranzuziehen. Es sei m eine natürliche Zahl > 1. Wir betrachten dann die m-ten *Teilwerte* der Funktion $\tau(u, \mathfrak{w})$, d. h. die Funktionen

$$\tau\left(\frac{x_1 w_1 + x_2 w_2}{m};\ w_1, w_2\right) \qquad (x_1, x_2 \text{ ganzzahlig}, \ (x_1, x_2, m) = 1).$$

Diese hängen nach Satz 13 nur von den Restklassen x_1 mod. m, x_2 mod. m ab. Das aus ihnen gebildete Polynom

$$T_m(t; w_1, w_2) = \prod_{\substack{x_1, x_2 \bmod m \\ (x_1, x_2, m) = 1}} \left(t - \tau\left(\frac{x_1 w_1 + x_2 w_2}{m};\ w_1, w_2\right)\right)$$

heißt die *Teilungsgleichung* von $\tau(u, \mathfrak{w})$ für den Divisor m. Wir beweisen über sie analog zu Satz 7

Satz 21. *Die Teilungsgleichung $T_m(t; w_1, w_2)$ ist ein Polynom $T_m(t, j(\mathfrak{w}))$ in t und $j(\mathfrak{w})$ mit rationalen Koeffizienten, in deren Generalnenner höchstens Primfaktoren von m aufgehen.*

Beweis: Die $\tau\left(\frac{x_1 w_1 + x_2 w_2}{m};\ w_1, w_2\right)$ sind im Regularitätsbereich von $j(\mathfrak{w})$ analytische und reguläre, homogene Funktionen 0-ter Dimension von w_1, w_2 (Satz 19). Sie vertauschen sich bei einer Modulsubstitution

$$\begin{pmatrix} w_1' \\ w_2' \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \quad ^{1})$$

nur untereinander. Denn wegen der Invarianz bei $\mathfrak{S}$ und Periodizität der τ-Funktion wird

$$\tau\left(\frac{(x_1\, x_2)\begin{pmatrix} w_1' \\ w_2' \end{pmatrix}}{m},\ \begin{pmatrix} w_1' \\ w_2' \end{pmatrix}\right) = \tau\left(\frac{(x_1,\, x_2)\, S\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}}{m},\quad S\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}\right) = \tau\left(\frac{(x_1', x_2')\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}}{m},\ \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}\right)$$

wenn

$$(x_1', x_2') \equiv (x_1, x_2)\, S \bmod m$$

gesetzt wird. Da nun diese Transformation mod. m eineindeutig ist, bedeutet sie nur eine Vertauschung der betrachteten Paare (x_1, x_2) mod. m. Die symmetrischen Grundfunktionen der $\tau\left(\frac{x_1 w_1 + x_2 w_2}{m};\ w_1,\ w_2\right)$ sind also bei $\mathfrak{S}$ invariant, somit (unter Berücksichtigung des Vorhandenseins der unten angegebenen q-Entwicklungen) ganze Modulfunktionen und daher nach Satz 4 Polynome in $j(\mathfrak{w})$.

Daß die Koeffizienten dieser Polynome rationale Zahlen sind, ergibt sich aus dem q-Entwicklungsprinzip. Um aus der q-z-Entwicklung (31′) von $\tau(u, \mathfrak{w})$ die q-Entwicklungen der $\tau\left(\frac{x_1 w_1 + x_2 w_2}{m};\ w_1, w_2\right)$ herzustellen, haben wir in (31′)

$$z \text{ durch } e^{2\pi i \frac{x_1 w_1 + x_2 w_2}{m w_2}} = \zeta_m^{x_2} q^{\frac{x_1}{m}}$$

zu ersetzen, wo $\zeta_m = e^{\frac{2\pi i}{m}}$ gesetzt ist. Um im Konvergenzbereich von (31′) zu bleiben, legen wir für x_1 das absolut kleinste Restsystem (für gerades m eines der beiden) zugrunde, so daß also $|x_1| \leqq \frac{m}{2}$ und für $|q| < 1$ somit $|q|^{\frac{1}{2}} \leqq |z| \leqq |q|^{-\frac{1}{2}}$

---

[1]) Diese Schreibweise soll besagen, daß mit $\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$ und S, anschließend auch mit (x_1, x_2), nach dem Matrizenkalkül zu rechnen ist.

ist. Dann ergeben sich aus (31′) durch leichte Rechnung für $|q| < 1$ konvergente q-Entwicklungen der Form

$$(34)\quad \begin{cases} \tau\left(\dfrac{x_1 w_1 + x_2 w_2}{m};\ w_1, w_2\right) = \{\zeta_m^{x_2},\ q^{\frac{1}{m}}\} & \text{für } x_1 \not\equiv 0 \bmod m \\ \tau\left(\dfrac{x_1 w_1 + x_2 w_2}{m};\ w_1, w_2\right) = \dfrac{1}{(1-\zeta_m^{x_2})^e}\ \{\zeta_m^{x_2}, q\} & \text{für } x_1 \equiv 0 \bmod m. \end{cases}$$

Dabei bezeichnet $\{\zeta_m^{x_2},\ q^{\frac{1}{m}}\}$ eine nach steigenden ganzen Potenzen von $q^{\frac{1}{m}}$ fortschreitende[1]) Reihe, deren Koeffizienten ganzzahlige Polynome in $\zeta_m^{x_2}$ sind, und für festes x_1 unterscheiden sich jene Reihen immer nur durch den Exponenten x_2 von ζ_m. Ersetzt man daher in den Entwicklungen (34) ζ_m durch eine Potenz ζ_m^c mit $(c, m) = 1$, so kommt dies auf die Ersetzung von x_2 durch cx_2 in den τ-Argumenten hinaus. Da nun cx_2 für jedes feste x_1 gleichzeitig mit x_2 alle Restklassen mod. m mit $(x_1, x_2, m) = (x_2, (x_1, m)) = 1$ jede einmal durchläuft, werden bei dieser Ersetzung je alle $\tau\left(\dfrac{x_1 w_1 + x_2 w_2}{m};\ w_1, w_2\right)$ mit festem x_1 nur untereinander vertauscht. Daher gestatten die q-Entwicklungskoeffizienten der symmetrischen Grundfunktionen der $\tau\left(\dfrac{x_1 w_1 + x_2 w_2}{m};\ w_1, w_2\right)$ jeden Automorphismus $\zeta_m \to \zeta_m^c$ des Körpers $\mathsf{P}(\zeta_m)$ der m-ten Einheitswurzeln und sind somit rationale Zahlen. Nach dem q-Entwicklungsprinzip sind also diese symmetrischen Grundfunktionen, d. h. die Koeffizienten von $T_m(t; w_1, w_2)$ rationalzahlige Polynome in $j(\mathfrak{w})$.

Aus (34) ergibt sich schließlich, daß der Generalnenner der Koeffizienten dieser Polynome in dem Produkt

$$(35)\quad \prod_{\substack{x_2 \bmod m \\ (x_2, m) = 1}} (1 - \zeta_m^{x_2})^e = \begin{cases} 1 \text{ für } m = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots \\ p^e \text{ für } m = p^a \end{cases}$$

aufgeht.

Mittels Satz 21 beweisen wir nunmehr analog zu Satz 8

Satz 22. *Die Strahlklasseninvarianten $\tau(\mathfrak{k}^*)$ mod. $\mathfrak{m}$ von Ω sind algebraische Zahlen, in deren reduzierten Nennern höchstens Primteiler der Norm von $\mathfrak{m}$ aufgehen.*

Beweis: Ist $\mathfrak{k}$ eine absolute Idealklasse von Ω, $\mathfrak{a}$ ein Ideal aus $\mathfrak{k}$, a_1, a_2 eine Basis von $\mathfrak{a}$ und m das kleinste ganze positive Multiplum von $\mathfrak{m}$ (das wegen $\mathfrak{m} \neq 1$ der Bedingung $m > 1$ genügt), so besitzen die Argumente ϱ der Strahlklasseninvarianten $\tau(\varrho, \mathfrak{a})$ mod. $\mathfrak{m}$ zu $\mathfrak{k}$ Darstellungen der Form

$$\varrho = \frac{r_1 a_1 + r_2 a_2}{m}$$

mit rationalen r_1, r_2. Nach (33) sind dabei r_1, r_2 sogar ganz rational, und zudem ist der Wahl von m zufolge $(r_1, r_2, m) = 1$. Somit sind die $\tau(\mathfrak{k}^*) = \tau(\varrho, \mathfrak{a}) = \tau\left(\dfrac{r_1 a_1 + r_2 a_2}{m};\ a_1, a_2\right)$ Wurzeln der singulären Teilungsgleichung

---

[1]) nicht mehr notwendig bei $q = 0$ verschwindende oder auch nur endliche, aber immer nur endlich viele negative Potenzen von $q^{\frac{1}{m}}$ enthaltende.

$$T_m(t,\ j(\mathfrak{k})) = \prod_{\substack{x_1,\ x_2 \bmod m \\ (x_1,\ x_2,\ m)=1}} \Big(t - \tau\Big(\frac{x_1 a_1 + x_2 a_2}{m};\ a_1,\ a_2\Big)\Big).$$

Deren Koeffizienten sind nach den Sätzen 8, 21 algebraische Zahlen (nämlich solche aus dem absoluten Klassenkörper K zu Ω), und in ihrem Generalnenner gehen höchstens Primteiler von m oder, was dasselbe besagt, der Norm von $\mathfrak{m}$ auf. Daraus folgt die Behauptung.

Genauer ergibt sich übrigens nach (35), daß die $\tau(\mathfrak{k}^*)$ sogar ganze algebraische Zahlen sind, wenn $\mathfrak{m}$ aus zu mindestens zwei verschiedenen Primzahlen gehörigen Primteilern zusammengesetzt ist. Doch brauchen wir diese Tatsache weiterhin nicht.

§ 3. Das Zerlegungsgesetz für die Primideale 1. Grades von Ω in den Körpern $\Omega(j(\mathfrak{k}), \tau(\mathfrak{k}^*))$.

Wir beweisen zunächst analog zu Satz 11, wieder mit den in Satz 9, 10 entwickelten Hilfsmitteln

Satz 23. *Ist $\mathfrak{p}$ ein Primideal 1. Grades von Ω der Norm p, das nicht aufgeht*

1. *in der Diskriminante von Ω*
2. *in der Norm von $\mathfrak{m}$*
3. *in den Relativdiskriminanten der sämtlichen Körper $\Omega(\tau(\mathfrak{k}^*))$ bezüglich Ω, wo $\mathfrak{k}^*$ alle Strahlklassen* mod. $\mathfrak{m}$ *von Ω durchläuft,*

und $\mathfrak{k}_\mathfrak{p}^*$ seine Strahlklasse mod. $\mathfrak{m}$, *so gilt für jede Strahlklasse $\mathfrak{k}^*$* mod. $\mathfrak{m}$ *die Kongruenz*

$$\tau^p(\mathfrak{k}^*) \equiv \tau(\mathfrak{k}_\mathfrak{p}^* \mathfrak{k}^*) \bmod.^* \mathfrak{p}.$$

Beweis: a) Es sei m das kleinste ganze positive Multiplum von $\mathfrak{m}$ und es durchlaufe x_1, x_2 ein vollständiges Repräsentantensystem der Restklassenpaare mod. m mit $(x_1, x_2, m) = 1$. Wir bilden dann mittels der Repräsentanten P_ν (S. 123, (10)) die Funktionen

$$(36) \qquad \delta_{P_\nu}(x_1, x_2; w_1, w_2) =$$
$$\tau^p\Big(\frac{x_1 w_1 + x_2 w_2}{m};\ w_1, w_2\Big) - \tau\Big(\frac{p(x_1 w_1 + x_2 w_2)}{m},\ P_\nu(w_1, w_2)\Big).$$

Wegen der Invarianz bei $\mathfrak{S}$ und Periodizität der τ-Funktion — unter den Perioden von $\tau(u;\ P_\nu(w_1, w_2))$ kommen speziell pw_1, pw_2 vor — sind diese Funktionen nicht von den speziellen Repräsentanten P_ν; x_1, x_2 abhängig, also den Transformationsklassen p-ten Grades und Restklassenpaaren mod. m ohne gemeinsame Teiler mit m eindeutig zugeordnet. Sie sind ferner im Regularitätsbereich von $j(w_1, w_2)$ analytische und reguläre, homogene Funktionen 0-ter Dimension von w_1, w_2. Bei einer Modulsubstitution

$$\begin{pmatrix} w_1' \\ w_2' \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$$

wird

$$\delta_{P_\nu}(x_1, x_2; w_1', w_2') = \tau^p\left(\frac{(x_1, x_2)S\binom{w_1}{w_2}}{m}, S\binom{w_1}{w_2}\right) - \tau\left(\frac{p(x_1, x_2)S\binom{w_1}{w_2}}{m}, P_\nu S\binom{w_1}{w_2}\right)$$

$$= \tau^p\left(\frac{(x_1', x_2')\binom{w_1}{w_2}}{m}, \binom{w_1}{w_2}\right) - \tau\left(\frac{p(x_1', x_2')\binom{w_1}{w_2}}{m}, P_{\nu'}\binom{w_1}{w_2}\right) = \delta_{P_{\nu'}}(x_1', x_2'; w_1, w_2),$$

wenn

$$(x_1', x_2') \equiv (x_1, x_2)S \text{ mod. } m, \qquad P_{\nu'} \sim P_\nu S\,(\mathfrak{S})$$

gesetzt wird. Die Funktionen $\delta_{P_\nu}(x_1, x_2;\ w_1, w_2)$ erfahren also bei S nur eine Permutation, und zwar bezüglich der P_ν allein gerechnet dieselbe, wie die Funktionen $\varphi_{P_\nu}(w_1, w_2)$ von I, § 3. Ihre bezüglich der x_1, x_2 je für festes P_ν gebildeten μ-ten symmetrischen Grundfunktionen $\delta^{(\mu)}_{P_\nu}(w_1, w_2)$ vertauschen sich also bei $\mathfrak{S}$ genau wie die Funktionen $\varphi_{P_\nu}(w_1, w_2)$.

b) Wir wenden nun für jedes feste μ auf die den P_ν zugeordnete Serie von symmetrischen Grundfunktionen $\delta^{(\mu)}_{P_\nu}(w_1, w_2)$ dieselbe Schlußweise an, wie auf die Funktionen $\delta_{P_\nu}(w_1, w_2)$ in I, § 3. Dazu haben wir über das unter a) Festgestellte hinaus nur noch zu zeigen, daß die $\delta^{(\mu)}_{P_\nu}(w_1, w_2)$ q-Entwicklungen $B^{(\mu)}_\nu$ mit den dortigen Eigenschaften (23), (27) besitzen. Aus der q-z-Entwicklung (31′) von $\tau(u, \mathfrak{w})$ ergeben sich nun die q-Entwicklungen für die Differenzen $\delta_{P_\nu}(x_1, x_2; w_1, w_2)$ folgendermaßen:

Für den Minuendus von $\delta_{P_\nu}(x_1, x_2; w_1, w_2)$ ist in (31′) zu ersetzen

(37) $\quad q$ durch q, $\quad z$ durch $e^{2\pi i \frac{x_1 w_1 + x_2 w_2}{m w_2}} = \zeta_m^{x_2} q^{\frac{x_1}{m}}$,

für den Subtrahendus

(38 a) $\quad q$ durch $\zeta_p^\nu q^{\frac{1}{p}}$, $\quad z$ durch $e^{2\pi i \frac{[p x_1](w_1 + \nu w_2) + (x_2 - \nu x_1) p w_2}{m p w_2}} = \zeta_p^{\nu \frac{[p x_1] - p x_1}{m}} \zeta_m^{x_2} q^{\frac{[p x_1]}{p m}}$
$\qquad\qquad (\nu = 1, \ldots, p)$

(38 b) $\quad q$ durch q^p, $\quad z$ durch $e^{2\pi i \frac{p x_1 w_1 + p x_2 w_2}{m w_2}} = \zeta_m^{p x_2} q^{\frac{p x_1}{m}} \qquad (\nu = p + 1)$.

Um im Konvergenzbereich von (31′) zu bleiben, wählen wir dabei in (37) und (38 b) wie a. S. 132 $|x_1| \leqq \frac{m}{2}$ und in (38 a) $[p x_1]$ als absolut-kleinsten Rest von $p x_1$ mod. m. Die letztere Ersetzung ist statthaft, weil $\tau(u, P_\nu(w_1, w_2))$ für $\nu = 1, \ldots, p$ die Periode $w_1 + \nu w_2$ hat. So resultieren q-Entwicklungen des Typus

(39 a) $\quad \delta_{P_\nu}(x_1, x_2; w_1, w_2) = \{\zeta_p^{\nu \frac{[p x_1] - p x_1}{m}}, \zeta_m^{x_2}, q^{\frac{1}{p m}}\}, \qquad (\nu = 1, \ldots, p)$

(39 b) $\quad \delta_{P_{p+1}}(x_1, x_2; w_1, w_2) = \{\zeta_m^{x_2}, q^{\frac{1}{m}}\}$,

deren Koeffizienten wie a. S. 133 für $x_1 \not\equiv 0$ in gewöhnlichem Sinne algebraisch

ganz sind, für $x_1 = 0$ nur (feste) Potenzen der in $m = \prod_{x=1}^{m-1}(1 - \zeta_m^x)$ aufgehenden Zahlen $1 - \zeta_m^{x_2}$ und $1 - \zeta_m^{px_2}$ im Nenner haben, also jedenfalls für den Bereich von p ganz sind, da der Voraussetzung 2. nach $\mathfrak{p}$ und somit p prim zu m ist. Die Entwicklungen (39 a) unterscheiden sich für festes x_1, x_2 nur durch den Exponenten ν von ζ_p und für festes ν und x_1 (ebenso auch die Entwicklungen (39 b) für festes x_1) nur durch den Exponenten x_2 von ζ_m.

Nach demselben Schlusse wie a. S. 133 hebt sich nun bei der Bildung der symmetrischen Grundfunktionen $\delta_{P_\nu}^{(\mu)}(w_1, w_2)$ die Irrationalität ζ_m heraus, und auch die Irrationalität $q^{\frac{1}{m}}$, weil die $\delta_{P_\nu}^{(\mu)}(w_1, w_2)$ zu (20) analoge Darstellungen besitzen. Es resultieren also q-Entwicklungen des Typus

$$\delta_{P_\nu}^{(\mu)}(w_1, w_2) = B_\nu^{(\mu)} = \{\zeta_p^\nu,\ q^{\frac{1}{p}}\} \tag{40 a}$$

$$\delta_{P_{p+1}}^{(\mu)}(w_1, w_2) = B_{p-1}^{(\mu)} = \{q\} \tag{40 b}$$

mit für den Bereich von p ganzen Koeffizienten, und die Entwicklungen (40 a) unterscheiden sich nur durch den Exponenten ν von ζ_p.

Aus (40 a) ergeben sich hiernach zunächst die den Kongruenzen (23) entsprechenden Kongruenzen

$$B_1^{(\mu)} \equiv \cdots \equiv B_p^{(\mu)} \text{ mod.* } (1 - \zeta_p). \tag{41}$$

Da ferner (analog zu der Schlußweise bei (25), (26)) die für den Minuendus von $\delta_{P_{p+1}}(x_1, x_2; w_1, w_2)$ in (31′) zu machende Ersetzung (37) verbunden mit der nach (36) auszuführenden Potenzierung mit p, wenn nur mod.* p gerechnet wird, wegen der Ganzzahligkeit für p der Koeffizienten gerade auf die für den Subtrahendus zu machende Ersetzung (38 b) hinausläuft, sind die Koeffizienten der Entwicklungen (39 b) $\equiv 0$ mod.* p, also auch die der Entwicklung (40 b). Somit gilt die zu (27) analoge Kongruenz

$$B_{p+1}^{(\mu)} \equiv 0 \text{ mod. * } p. \tag{42}$$

c) Genügt nun $\mathfrak{p}$ neben der bisher benutzten Voraussetzung 2. auch 1., so folgt, ganz analog wie in I, § 3, aus dem unter a) Festgestellten und den Kongruenzen (41), (42), daß die singulären Werte $\delta_{\overline{P}}^{(\mu)}(a_1, a_2)$, wo a_1, a_2 Basis eines Ideals $\mathfrak{a}$ aus Ω und $\overline{P}$ eine Transformation ist, für die $\overline{P}(a_1, a_2)$ Basis von $\bar{\mathfrak{p}}\mathfrak{a} = \frac{p}{\mathfrak{p}}\mathfrak{a}$ ist, für den Bereich von $\mathfrak{p}$ ganze algebraische Zahlen sind, die der zu (29) analogen Kongruenz

$$\delta_{\overline{P}}^{(\mu)}(a_1, a_2) \equiv 0 \text{ mod.* } \mathfrak{p} \tag{43}$$

genügen. Aus (43) für alle μ folgt, daß die entsprechenden singulären Werte $\delta_{\overline{P}}(x_1, x_2; a_1, a_2)$ einer algebraischen Gleichung mit höchstem Koeffizienten 1 genügen, deren übrige Koeffizienten ganz für $\mathfrak{p}$ und $\equiv 0$ mod.* $\mathfrak{p}$ sind, daß also jeder solche singuläre Wert eine für $\mathfrak{p}$ ganze, der Kongruenz

(44) $$\delta_{\bar{P}}(x_1, x_2;\ a_1, a_2) \equiv 0 \mod.^*\ \mathfrak{p}$$

genügende algebraische Zahl ist, wenn $\mathfrak{p}$ in dem betr. Körper $\Omega(\delta_{\bar{P}}(x_1, x_2;\ a_1, a_2))$ keine mehrfachen Primfaktoren besitzt, d. h. nicht in dessen Relativdiskriminante bezüglich Ω aufgeht.

d) Wählen wir nun bei vorgegebener Strahlklasse $\mathfrak{k}^*$ mod. $\mathfrak{m}$ das Ideal $\mathfrak{a}$ aus der $\mathfrak{k}^*$ zugeordneten Idealklasse $\mathfrak{k}$ und außerdem r_1, r_2 wie a. S. 133 so, daß

$$\frac{r_1 a_1 + r_2 a_2}{m} = \varrho \quad \text{mit} \quad (\varrho) = \frac{\mathfrak{r}\mathfrak{a}}{\mathfrak{m}}, \quad \mathfrak{r} \text{ ganz aus } \mathfrak{k}^*$$

wird, so wird

(45) $$\tau\left(\frac{r_1 a_1 + r_2 a_2}{m};\ a_1,\ a_2\right) = \tau(\varrho, \mathfrak{a}) = \tau(\mathfrak{k}^*)$$

(46) $$\tau\left(\frac{p(r_1 a_1 + r_2 a_2)}{m},\ \overline{P}(a_1, a_2)\right) = \tau\left(\frac{r_1 a_1 + r_2 a_2}{m},\ \frac{\overline{P}}{p}(a_1, a_2)\right)$$
$$= \tau\left(\varrho, \frac{\bar{\mathfrak{p}}\mathfrak{a}}{p}\right) = \tau\left(\varrho, \frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{p}}\right) = \tau(\mathfrak{k}_\mathfrak{p}^* \mathfrak{k}^*),$$

letzteres weil $\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{p}}$ der $\mathfrak{k}_\mathfrak{p}^* \mathfrak{k}^*$ zugeordneten absoluten Idealklasse $\mathfrak{k}_\mathfrak{p}^{-1} \mathfrak{k}$ angehört und in

$$(\varrho) = \frac{\mathfrak{r}\mathfrak{a}}{\mathfrak{m}} = \frac{\mathfrak{p}\mathfrak{r}\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{p}}}{\mathfrak{m}}$$

der Faktor $\mathfrak{p}\mathfrak{r}$ ein ganzer Repräsentant aus $\mathfrak{k}_\mathfrak{p}^* \mathfrak{k}^*$ ist. Es wird also dann nach (36), (45), (46)

(47) $$\delta_P(r_1, r_2;\ a_1, a_2) = \tau^p(\mathfrak{k}^*) - \tau(\mathfrak{k}_\mathfrak{p}^* \mathfrak{k}^*).$$

Erfüllt nun $\mathfrak{p}$ neben den bisher benutzten Voraussetzungen 1., 2. auch 3., so geht $\mathfrak{p}$ speziell nicht in der Relativdiskriminante des Körpers $\Omega(\delta_{\bar{P}}(r_1, r_2;\ a_1, a_2))$ auf, und es gilt dann nach (44), (47) die behauptete Kongruenz für jede Strahlklasse $\mathfrak{k}^*$ mod. $\mathfrak{m}$.

Aus den Sätzen 20, 22, 23 nebst 6, 8, 11 folgern wir nun analog zu Satz 12

Satz 24. *Ist $\mathfrak{k}^*$ eine Strahlklasse* mod. $\mathfrak{m}$, *$\mathfrak{k}$ die zugeordnete absolute Idealklasse von Ω und $\mathfrak{p}$ ein Primideal 1. Grades von Ω, das nicht aufgeht*

1. *in der Diskriminante von Ω*
2. *in der Norm von $\mathfrak{m}$*
3. *in der Relativdiskriminante von $j(\mathfrak{k})$ bezüglich Ω*
4. *in der Relativdiskriminante von $\tau(\mathfrak{k}^*)$ bezüglich Ω*
5. *in dem Differenzenpunkt* $\prod_{\mathfrak{k}_1 = |= \mathfrak{k}_2} (j(\mathfrak{k}_1) - j(\mathfrak{k}_2))$
6. *in dem Differenzenprodukt* $\prod_{\substack{\mathfrak{k}_1^* = |= \mathfrak{k}_2^* \\ \mathfrak{k}_1^*, \mathfrak{k}_2^* \text{ zu } \mathfrak{k}}} (\tau(\mathfrak{k}_1^*) - \tau(\mathfrak{k}_2^*))$
7. *in den Relativdiskriminanten der sämtlichen Körper $\Omega(\tau(\mathfrak{k}_\nu^*))$ bezüglich Ω,*

wo $\mathfrak{k}_\nu^*$ *alle Strahlklassen* mod. $\mathfrak{m}$ *von* Ω *durchläuft,*
so zerfällt $\mathfrak{p}$ *im Körper* $\Omega(j(\mathfrak{k}), \tau(\mathfrak{k}^*))$ *in verschiedene Primideale* f^**-ten Relativgrades bezüglich* Ω*, wenn* f^* *die Ordnung der Strahlklasse von* $\mathfrak{p}$ *ist.*

Beweis: Es sei $\mathfrak{P}$ ein wegen 3., 4. notwendig einfacher Primteiler von $\mathfrak{p}$ in $\Omega(j(\mathfrak{k}), \tau(\mathfrak{k}^*))$ vom Relativgrade $\bar{f}^*$ bezüglich Ω, also nach der Voraussetzung auch vom absoluten Grade $\bar{f}^*$.

a) Einerseits bilden dann nach 3., 4. die wegen 2. nach den Sätzen 8, 22 für den Bereich von $\mathfrak{P}$ ganzen algebraischen Zahlen $j^\nu(\mathfrak{k})\,\tau^\mu(\mathfrak{k}^*)$ $(\nu = 1, \ldots, n;$ $\mu = 1, \ldots, m)$ bei geeigneter Wahl von n, m eine Relativbasis mod.* $\mathfrak{P}$ von $\Omega(j(\mathfrak{k}), \tau(\mathfrak{k}^*))$ bezüglich Ω, d. h. es besitzt jedes für $\mathfrak{P}$ ganze A eine Darstellung

$$\mathsf{A} \equiv \sum_{\nu,\,\mu} a_{\nu\mu}\, j^\nu(\mathfrak{k})\, \tau^\mu(\mathfrak{k}^*) \text{ mod.* } \mathfrak{P}$$

mit für $\mathfrak{p}$ ganzen $a_{\nu\mu}$ aus Ω. Ist p die Norm von $\mathfrak{p}$, so folgt nach den wegen 1., 2., 7. anwendbaren Sätzen 11, 23 durch sukzessive Potenzierung mit p

$$\mathsf{A}^{pf^*} \equiv \sum_{\nu,\,\mu} a_{\nu\mu}\, j^\nu(\mathfrak{k}_\mathfrak{p}^{-f^*}\mathfrak{k})\, \tau^\mu(\mathfrak{k}_\mathfrak{p}^{*f^*}\mathfrak{k}^*) \text{ mod.* } \mathfrak{P}.$$

Nach der Bedeutung von f^* sind nun $\mathfrak{k}_\mathfrak{p}^{-f^*}$ und $\mathfrak{k}_\mathfrak{p}^{*f^*}$ die absolute bezw. die Strahl-Hauptklasse. Somit gilt

$$\mathsf{A}^{pf^*} \equiv \mathsf{A} \text{ mod.* } \mathfrak{P}$$

für jedes für $\mathfrak{P}$ ganze A aus $\Omega(j(\mathfrak{k}), \tau(\mathfrak{k}^*))$. Hiernach ist $\bar{f}^* \leqq f^*$.

b) Andererseits ist bekanntlich

$$j^{p^{\bar{f}^*}}(\mathfrak{k}) \equiv j(\mathfrak{k}), \qquad \tau^{p^{\bar{f}^*}}(\mathfrak{k}^*) \equiv \tau(\mathfrak{k}^*) \text{ mod.* } \mathfrak{P},$$

also nach den Sätzen 11, 23

$$j(\mathfrak{k}_\mathfrak{p}^{-\bar{f}^*}\mathfrak{k}) \equiv j(\mathfrak{k}), \qquad \tau(\mathfrak{k}_\mathfrak{p}^{*\bar{f}^*}\mathfrak{k}^*) \equiv \tau(\mathfrak{k}^*) \text{ mod.* } \mathfrak{P}.$$

Nach den — wegen Satz 6, 20 sicher realisierbaren — Voraussetzungen 5., 6. folgt also, daß $\mathfrak{k}_\mathfrak{p}^{-\bar{f}^*}$ die absolute Hauptklasse und dann (weil hiernach 6. anwendbar ist) $\mathfrak{k}_\mathfrak{p}^{*\bar{f}^*}$ die Strahlhauptklasse ist. Somit ist $\bar{f}^* \geqq f^*$.

Aus a) und b) folgt $\bar{f}^* = f^*$, d. h. die Behauptung.

Satz 24 besagt nach der allgemeinen Klassenkörpertheorie[1]), daß jeder der Körper $\Omega(j(\mathfrak{k}), \tau(\mathfrak{k}^*))$, wo $\mathfrak{k}^*$ eine $\mathfrak{k}$ zugeordnete Strahlklasse mod. $\mathfrak{m}$ ist, mit dem Strahlklassenkörper $\mathsf{K}_\mathfrak{m}$ mod. $\mathfrak{m}$ von Ω zusammenfällt. Insbesondere gilt hiernach das Zerlegungsgesetz von Satz 24 für alle zu $\mathfrak{m}$ primen Primideale von Ω, und die Ausnahme 3. in Satz 23 ist überflüssig, weil schon in 2. enthalten.

Nach dem *Takagi*schen Hauptsatz [2]) folgt aus Satz 24 ohne weiteres das folgende Resultat hinsichtlich des sog. *Kroneckerschen Jugendtraumes* [3]):

---

[1]) Vergl. S. 127, Anm. 1. — Als Erklärungsmodul für den Strahl mod. $\mathfrak{m}$ kann jedes ganze Multiplum von $\mathfrak{m}$ verwendet werden.

[2]) K. Th., Satz 5.

[3]) K. Th., § 10.

Satz 25. *Läßt man in den Funktionen* $j(\mathfrak{w})$ *und* $\tau(u, \mathfrak{w})$ *das Argument* $\mathfrak{w}$ *alle Ideale* $\mathfrak{a}$ *eines imaginär-quadratischen Zahlkörpers* Ω *und das Argument* u *alle nicht zu dem betr.* $\mathfrak{a}$ *gehörigen Zahlen* ϱ *aus* Ω [1]) *durchlaufen, so ist der durch* Ω *und diese singulären Funktionswerte* $j(\mathfrak{a})$, $\tau(\varrho, \mathfrak{a})$ *erzeugte Rationalitätsbereich identisch mit der Gesamtheit der zu* Ω *relativ-Abelschen Zahlen.*

---

[1]) Diese besitzen in der Tat eine Idealdarstellung $(\varrho) = \frac{\mathfrak{r}\mathfrak{a}}{\mathfrak{m}}$ mit ganzen, relativ primen $\mathfrak{r}, \mathfrak{m}$ und $\mathfrak{m} \neq 1$, führen also nach (33) zu Strahlklasseninvarianten mod. $\mathfrak{m}$.

Walter de Gruyter & Co. Berlin W 10 und Leipzig

Postscheckkonto: Berlin NW 7 Nr. 59533

Mathematische Neuerscheinungen

Göschens Lehrbücherei, I. Gruppe: Reine Mathematik.

Bd. 4: **Synthetische Zahlentheorie.** Von Dr. Rudolf Fueter, o. Prof. an der Universität Zürich. Zweite, verbesserte Auflage. Groß-Oktav. VIII, 277 Seiten. M. 10.—, geb. 12.—

Bd. 6: **Einführung in die Axiomatik der Algebra.** Von Dr. H. Beck, o. Prof. der Mathematik an der Universität Bonn. Groß-Oktav. X, 198 Seiten. M. 9.—, geb. 10.50

Bd. 7: **Mengenlehre.** Von Dr. F. Hausdorff, o. Prof. der Mathematik an der Universität Bonn. Zweite, neubearb. Aufl., Mit 12 Figuren. Im Druck.

Bd. 8: **Algebra.** Von Dr. Oskar Perron, o. Prof. an der Universität München, I. Die Grundlagen. Mit 4 Figuren. Im Druck.

Bd. 9: **Algebra.** Von Dr. Oskar Perron, o. Prof. an der Universität München. II. Theorie der algebraischen Gleichungen. Mit 5 Figuren. Im Druck.

Lehrbuch der Mathematik für Studierende der Naturwissenschaften und der Technik. Eine Einführung in die Differential- und Integralrechnung und in die analytische Geometrie. Von Dr. Georg Scheffers, Geh. Reg.-Rat, Prof. an der Technischen Hochschule in Charlottenburg. Mit 438 Figuren. Sechste, verbesserte Auflage. Lexikon-Oktav. VIII, 743 Seiten. M. 30.—, geb. 33.—

Elementare Algebra. Von Prof. B. Fischer, Studienrat am Gymnasium in Berlin-Steglitz. Mit 20 Figuren. 149 Seiten. (*Sammlung Göschen Bd. 930.*) Geb. M. 1.50

Beispielsammlung zur Arithmetik und Algebra. Von Dr. Hermann Schubert, weil. Prof. an der Gelehrtenschule des Johanneums in Hamburg. Vierte, neubearbeitete Auflage von P. B. Fischer, Studienrat am Gymnasium zu Berlin-Steglitz. 139 Seiten. (*Sammlung Göschen Bd. 48*). Geb. M. 1.50

Höhere Algebra. Von Dr. Helmut Hasse, o. ö. Prof. der Mathematik an der Universität Halle. I. Lineare Gleichungen. 160 Seiten. (*Sammlung Göschen Bd. 931.*) Geb. M. 1.50

II. Gleichungen höheren Grades. Mit 5 Figuren. Im Druck.

Einführung in die Determinantentheorie einschließlich der Fredholmschen Determinanten. Von Dr. Gerhard Kowalewski. o. Prof. an der Technischen Hochschule in Dresden. Zweite, verkürzte Auflage. Groß-Oktav. IV, 304 Seiten. M. 14.—, geb. 15.50

Elementare Reihenlehre. Von Dr. Hans Falckenberg, Prof. an der Universität Gießen. Mit 4 Figuren im Text. 136 Seiten. (*Sammlung Göschen Bd. 943.*) Geb. M. 1.50

Funktionentheorie. Von Dr. Konrad Knopp, o. Prof. der Mathematik an der Universität Königsberg.

Erster Teil: Grundlagen der allgemeinen Theorie der analytischen Funktionen. Mit 8 Figuren. Zweite, vollständig neubearbeitete Auflage. Durchgesehener Neudruck. 140 Seiten. (*Sammlung Göschen Bd. 668.*) Geb. M. 1.50

Zweiter Teil: Anwendungen und Weiterführungen der allgemeinen Theorie. Mit 7 Figuren. Zweite, vollständig neubearbeitete Auflage. Durchgesehener Neudruck. 138 Seiten. (*Sammlung Göschen Bd. 703.*) Geb. M. 1.50

Gewöhnliche Differentialgleichungen. Von Dr. G. Hoheisel, Privatdozent in Breslau. 159 Seiten. (*Sammlung Göschen Bd. 920.*) Geb. M. 1.50

Walter de Gruyter & Co. Postscheckkonto: W de G **Berlin W 10 und Leipzig** Berlin NW 7 Nr. 59533

Lebesguesche Integrale und Fouriersche Reihen. Von Dr. L. Schlesinger, o. Prof. an der Universität Gießen, und Dr. A. Pleßner. Groß-Oktav. VIII, 229 Seiten. M. 14.—, geb. 16.—

Potentialtheorie. Von Dr. W. Sternberg, Privatdozent in Heidelberg.

I. Die Elemente der Potentialtheorie. Mit 5 Figuren. 136 Seiten. (*Sammlung Göschen Bd. 901.*) Geb. M. 1.50

II. Die Randwertaufgaben der Potentialtheorie. Mit 1 Figur. 133 Seiten. (*Sammlung Göschen Bd. 944.*) Geb. M. 1.50

Ebene und sphärische Trigonometrie. Von Dr. Gerhard Hessenberg, o. Prof. an der Universität Tübingen. Mit 59 Figuren. Dritte, neubearbeitete Auflage. Durchgesehener Neudruck. 171 Seiten. (*Sammlung Göschen Bd. 99.*) Geb. M. 1.50

Versicherungsmathematik. Von Dr. Friedrich Boehm, Prof. an der Universität München

I. Elemente der Versicherungsrechnung. 144 Seiten. (*Sammlung Göschen Bd. 180.*) Geb. M. 1.50

II. Lebensversicherungsmathematik. Einführung in die technischen Grundlagen der Sozialverversicherung. 171 Seiten. (*Sammlung Göschen Bd. 917.*) Geb. M. 1.50

Mathematische Instrumente. Von Privatdozent Dr. Fr. A. Willers. Mit vielen Figuren. 144 Seiten. (*Sammlung Göschen Bd. 922.*) Geb. M. 1.50

Geometrische Aufgaben und Übungen. Von Dr. F. G. Mehler. Neubearbeitet von A. Schulte-Tigges, Geh. Oberstudienrat des Realgymnasiums zu Kassel. Ausgabe B: Oberstufe. Oktav. 89 Seiten. M. 1.50

Grundzüge und Anwendungen der Differential- und Integralrechnung mit zahlreichen Übungsaufgaben für höhere Schulen. Von Oberstudiendirektor Schulte-Tigges Oktav. Mit 1 Tafel. 63 Seiten. M. 1.—

Logarithmische Rechentafeln für Chemiker, Pharmazeuten, Mediziner und Physiker. Begründet von Dr. Prof. F. W. Küster†. Für den Gebrauch im Unterrichtslaboratorium und in der Praxis berechnet und mit Erläuterungen versehen. Nach dem gegenwärtigen Stande der Forschung bearbeitet von Prof. Dr. A. Thiel, o. ö. Prof. der physikalischen Chemie, Direktor des Physikalisch-Chemischen Instituts der Universität Marburg. Dreißigste bis vierunddreißigste, verbesserte und vermehrte Auflage. Oktav. 148 Seiten und eine Tafel. Geb. M. 6.—

Vierstellige Logarithmentafeln. Von Max Zacharias, Studienrat am Vereinigten Friedrichs- und Humboldt-Gymnasium in Berlin, und Dr. Paul Meth, Studienrat an der Herderschule in Charlottenburg. Im Druck.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik. Gegründet von Karl Ohrtmann und Felix Müller. Fortgeführt von Emil Lampe. Im Verein mit andern Mathematikern und unter besonderer Mitwirkung von Dr. H. Hahn, o. Prof. an der Universität Wien, Dr. E. Hecke, o. Prof. an der Universität Hamburg, Dr. Herglotz, o. Prof. an der Universität Leipzig, Dr. O. Hölder, Geh. Rat, o. Prof. an der Universität Leipzig, Dr. A. Loewy, o. Prof. an der Universität Freiburg i. Br., Dr. L. Neder, a. o. Prof. an der Universität Leipzig, Dr. O. Perron, o. Prof. an der Universität München, Dr. E. Salkowski, o. Prof. an der Technischen Hochschule Hannover, Dr. G. Szegö, Privatdozent an der Unversität Berlin, Dr. A. Wangerin, Geh. Reg.-Rat, o. Prof. an der Universität Halle, Dr. H. Weyl, o. Prof. an der Universität Zürich, herausgegeben von Dr. Leon Lichtenstein, o. Prof. an der Universität Leipzig.

Jährlich ein Band von etwa 6 Heften.

Band 47 (Jahrgang 1919/1920). M. 74.—

Band 48 (Jahrgang 1921/1922), Heft 1 bis 6. Je M. 12.—

Astronomischer Jahresbericht. Gegründet von Walter F. Wislicenus. Mit Unterstützung der Astronomischen Gesellschaft herausgegeben von dem Astronomischen Rechen-Institut zu Berlin-Dahlem. Bisher erschienen 27 Bände, enthaltend die Literatur der Jahre 1899 bis 1925.

XXVI. Bd.: Die Literatur des Jahres 1924. Oktav. XIX, 300 Seiten. M. 25.—

XXVII. Bd.: Die Literatur des Jahres 1925. Oktav. XXI, 250 Seiten. M. 24.—

PERIODICAL ROOM
GENERAL LIBRARY
UNIV. OF MICH.

JUL 25 1927

JUBILÄUMSBAND I

AUS ANLASS DES 100 JÄHRIGEN BESTEHENS

Journal

für die

reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826.

Herausgegeben

unter Mitwirkung der Herren

Hasse, Schaefer, Schlesinger, Schottky

von

K. Hensel.

Band 157.

Heft 3.

Mit Bildern von Schellbach, Kummer, Schröter und v. Helmholtz.

Ausgegeben den 21. März.

Berlin und Leipzig

WALTER DE GRUYTER & CO.

VORMALS G. J. GÖSCHEN'SCHE VERLAGSHANDLUNG - J. GUTTENTAG VERLAGS-BUCHHANDLUNG - GEORG REIMER - KARL J. TRÜBNER - VEIT & COMP.

1927

Jährlich zirka 6 Hefte. Vier Hefte bilden einen Band.

Band 157. Heft 3.

(Jubiläumsband I.)

Mit Bildern von Schellbach, Kummer, Schröter und v. Helmholtz.

Inhaltsverzeichnis.

Hardy, G. H. und **Littlewood, J. E.,** Elementary theorems concerning power series with positive coefficients and moment constants of positive functions Seite 141

Hecke, E., Über das Verhalten von $\sum_{m,n} e^{2\pi i \tau \frac{|m^2-2n^2|}{8}}$ und ähnlichen Funktionen bei Modulsubstitutionen . . . . . — 159

Hölder, Otto, Über einen Grenzübergang in Abels Recherches sur les Fonctions Elliptiques . . . . . — 171

Bieberbach, Ludwig, Eine hinreichende Bedingung für schlichte Abbildungen des Einheitskreises . . . . . — 189

Kowalewski, Gerhard, Über die *Batemans*che Transformationsgruppe . . . — 193

An unsere Mitarbeiter!

Um ein schnelles Erscheinen der einzelnen Hefte des Journals zu ermöglichen, können wir den Herren Autoren grundsätzlich nur eine Korrektur ihrer Beiträge zustellen. Da die Korrekturen seitens der Redaktion, auch hinsichtlich ihres Inhalts, mit größter Genauigkeit gelesen werden, hoffen wir auch so, allen Wünschen gerecht zu werden.

Die Herren Verfasser erhalten von Abhandlungen bis zu 24 Seiten Umfang 100 Sonderabdrucke, von größeren Arbeiten 50 Sonderabdrucke kostenfrei, weitere gegen Berechnung.

Sendungen für das Journal erbittet die Redaktion **ausschließlich** unter der Adresse

An die Redaktion des Journals für die reine und angewandte Mathematik

Professor Dr. Kurt Hensel, Marburg (Bez. Cassel), Breiter Weg 7.

Mitherausgeber des Journals 1857-1881
Band 53 ~ 90

Karl Heinrich Schellbach
geb. 25. Dezemb. 1804 gest 29 Mai 1892

Ernst Eduard Kummer
geb. 29. Januar 1810 gest 14 Mai 1893

Mitherausgeber des Journals 1889-1892
Band 104 ~ 109

Heinrich Schröter
geb. 8. Januar 1829 gest. 3. Januar 1892

Herm. Ludw. Ferd. von Helmholtz
geb. 31. August 1821 gest. 8. Sept. 1894

Band 157. Heft 3.

(Jubiläumsband I.)

Mit Bildern von Schellbach, Kummer, Schröter und v. Helmholtz.

Inhaltsverzeichnis.

Hardy, G. H. und **Littlewood, J. E.,** Elementary theorems concerning power series with positive coefficients and moment constants of positive functions Seite 141

Hecke, E., Über das Verhalten von $\sum_{m,n} e^{2\pi i \tau \frac{|m^2-2n^2|}{8}}$ und ähnlichen Funktionen bei Modulsubstitutionen . . . . . — 159

Hölder, Otto, Über einen Grenzübergang in Abels Recherches sur les Fonctions Elliptiques . . . . . — 171

Bieberbach, Ludwig, Eine hinreichende Bedingung für schlichte Abbildungen des Einheitskreises . . . . . — 189

Kowalewski, Gerhard, Über die *Bateman*sche Transformationsgruppe . . . — 193

An unsere Mitarbeiter!

Um ein schnelles Erscheinen der einzelnen Hefte des Journals zu ermöglichen, können wir den Herren Autoren grundsätzlich nur eine Korrektur ihrer Beiträge zustellen. Da die Korrekturen seitens der Redaktion, auch hinsichtlich ihres Inhalts, mit größter Genauigkeit gelesen werden, hoffen wir auch so, allen Wünschen gerecht zu werden.

Die Herren Verfasser erhalten von Abhandlungen bis zu 24 Seiten Umfang 100 Sonderabdrucke, von größeren Arbeiten 50 Sonderabdrucke kostenfrei, weitere gegen Berechnung.

Sendungen für das Journal erbittet die Redaktion **ausschließlich** unter der Adresse

An die Redaktion des Journals für die reine und angewandte Mathematik

Professor Dr. Kurt Hensel, Marburg (Bez. Cassel), Breiter Weg 7.

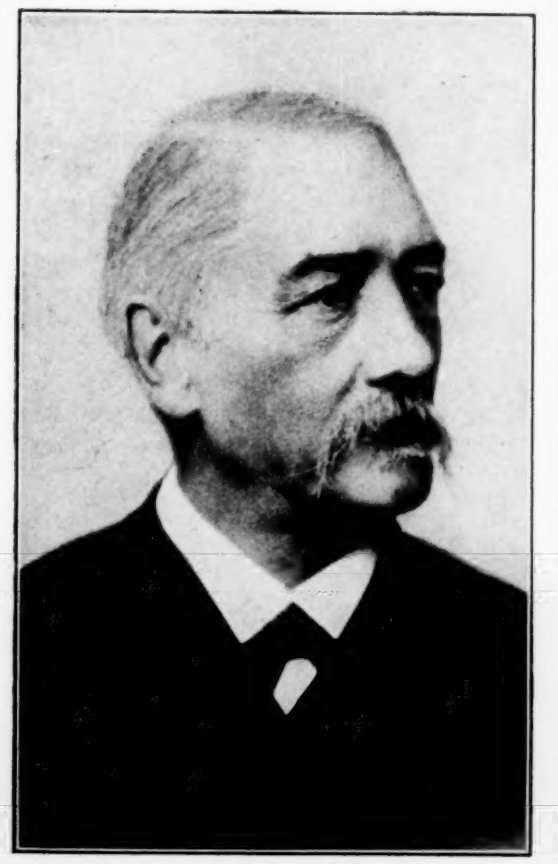
Mitherausgeber des Journals 1857-1881
Band 53~90

Karl Heinrich Schellbach
geb. 25. Dezemb. 1804 gest. 29. Mai 1892

Mitherausgeber des Journals 1857-1881
Band 53~90

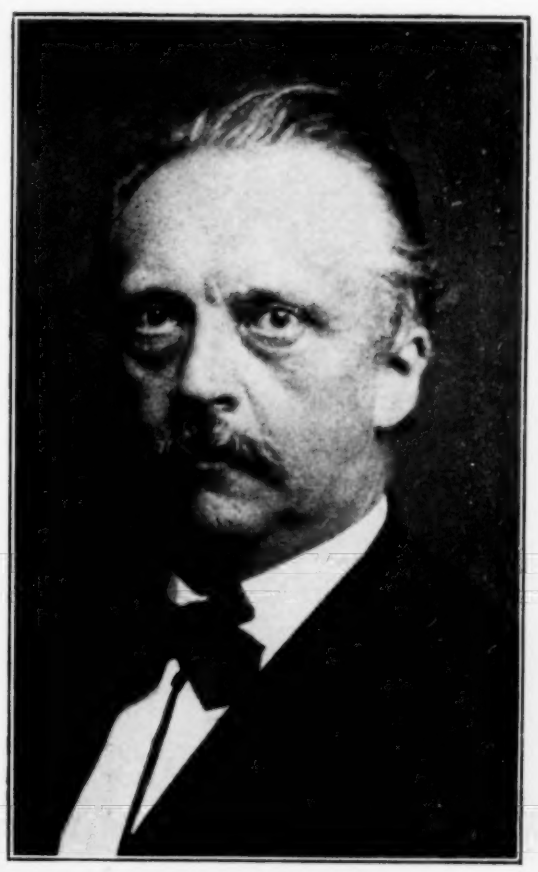
Ernst Eduard Kummer
geb. 29. Januar 1810 gest. 14. Mai 1893

Mitherausgeber des Journals 1889-1892
Band 104~109



Heinrich Schröter
geb. 8. Januar 1829 gest. 3. Januar 1892

Mitherausgeber des Journals 1889-1895
Band 104~114



Herm. Ludw. Ferd. von Helmholtz
geb. 31. August 1821 gest. 8. Sept. 1894

Elementary theorems concerning power series with positive coefficients and moment constants of positive functions.

Von *G. H. Hardy* in Oxford und *J. E. Littlewood* in Cambridge.

1. Introduction.

1. 1. The theorems of which we give an account in this memoir may be described concisely as of „*Hilbertian*" type; they belong to a field of research opened up by „*Hilbert*'s double-series theorem", the theorem that the bilinear form

$$\sum \frac{a_m b_n}{m+n+1} \quad (m = 0, 1, 2, \ldots;\ n = 0, 1, 2, \ldots)$$

is bounded for all positive a_m and b_n for which

$$\sum a_m^2 = 1, \qquad \sum b_n^2 = 1.$$

The leading theorems resemble in form those of our recent memoir „Some new properties of *Fourier* constants" [1]), though they are much more elementary; and we begin by recalling the four principal theorems of that memoir.

We proved there that if a_n is the complex *Fourier* coefficient of a complex function $f(\theta)$, so that

$$f(\theta) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} a_n e^{ni\theta},$$

then

(A) $$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f|^p |\theta|^{p-2} d\theta \leqq A(p) \sum |a_n|^p,$$

(B) $$\sum |a_n|^p |n|^{p-2} \leqq A(p) \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f|^p \, d\theta,$$

(C) $$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f|^q d\theta \leqq A(q) \sum |a_n|^q |n|^{q-2},$$

(D) $$\sum |a_n|^q \leqq A(q) \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f|^q |\theta|^{q-2} \, d\theta.$$

[1]) *G. H. Hardy* und *J. E. Littlewood*, 'Some new properties of Fourier constants', *Math. Annalen*, 97 (1926), 159—209.

Here $1 < p \leqq 2 \leqq q$, and it is supposed for convenience that $a_0 = 0$. Two of the theorems are of the „*Parseval*" type, and two of the „*Riesz-Fischer*" type; and the two latter are to be understood as asserting the existence of an $f(\theta)$ of which a_n is the typical *Fourier* constant. The A's are positive numbers depending only on the parameters indicated.

1. 2 We suppose now that

$$A(x) = \sum_1^\infty a_n x^n$$

is a power-series, with positive coefficients, convergent for $x < 1$ [1]). Our first object is to find the theorems in this field which correspond to the theorems (A) — (D).

A very little consideration is sufficient to show that the situation is considerably changed. The two theorems of „*Riesz-Fischer*" type, viz. (A) and (C), have analogues, expressed by the inequalities

$$(A_0) \qquad \int_0^1 A^p(x)\,(1-x)^{p-2}\,dx \leqq A(p) \sum a_n^p,$$

$$(C_0) \qquad \int_0^1 A^q(x)\,dx \leqq A(q) \sum a_n^q\, n^{q-2},$$

but the corresponding analogues of (B) and (D) are false. It is not true, for example, that the convergence of

$$\int_0^1 A^2(x)\,dx$$

(or, what is the same thing, of *Hilbert*'s series) implies the convergence of Σa_n^2. On the other hand the distinction between $p(\leqq 2)$ and $q(\geqq 2)$ is no longer of any importance; (A_0) and (C_0) are true for every p or q greater than 1. Further, (A_0) and (C_0) are no longer fundamentally distinct, but can be presented as two special cases of a general theorem.

1. 3. We observe next that, although the most obvious analogues of (B) and (D) are false, these theorems have analogues, though of a different kind. These analogues refer to *moment constants*. Suppose that $a(x)$ is positive and integrable over $(0, 1)$, and that

$$A_n = \int_0^1 a(x)\,x^n\,dx \qquad (n > 0).$$

Then $a(x)$ corresponds to a_n and A_n to $A(x)$, and the analogues of (B) and (D) are

$$(B_0) \qquad \sum A_n^p\, n^{p-2} \leqq A(p) \int_0^1 a^p(x)\,dx,$$

$$(D_0) \qquad \sum A_n^q \leqq A(q) \int_0^1 a^q(x)\,(1-x)^{q-2}\,dx;$$

and again we find that these theorems are valid for $p > 1$, $q > 1$, and are special cases of a more general theorem.

---

[1]) It is convenient to suppose $a_0 = 0$.

We prove these two general theorems in § 3, § 2 being occupied by two convergence theorems which are essential to our argument and also of independent interest. In § 4 we consider the analogues of our theorems when $0 < p \leqq 1$, and in § 5 we have collected a number of other theorems in the same field but of a more miscellaneous character. The subject is rich in elegant theorems, and the main difficulty is to select and systematise the more significant among them.

It will be convenient to lay down here once for all that *all numbers and functions which occur in the theorems or in their proofs are positive* (in the wider sense of the word), *unless the contrary is expressly stated.*

2. Two convergence theorems.

2. 1. Theorem 1. *Suppose that $p > 0$ and that c is real (but not necessarily positive); that Σa_n is a series of positive terms; and that s_n is defined by*

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \tag{2. 11}$$

or by

$$s_n = a_n + a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots, \tag{2. 12}$$

according as Σa_n is divergent or convergent. Suppose further that when $c > 1$ the series is divergent, and that when $c \leqq 1$ it is convergent, so that s_n is defined by (2. 11) *or* (2. 12) *accordingly.*

Then (i) *if*

$$p < 1$$

$$\sum n^{-c}(n a_n)^p \leqq K \sum n^{-c} s_n^p ; \tag{2. 13}$$

(ii) *if*

$$p > 1 , \quad c \neq 1$$

$$\sum n^{-c} s_n^p \leqq K \sum n^{-c}(n a_n)^p , \tag{2. 14}$$

but this is not necessarily true when $c = 1$;

(iii) *if $p = 1$ and $c \neq 1$, both* (2. 13) *and* (2. 14) *are true, while, if $p = 1$ and $c = 1$,* (2. 13) *is true but* (2. 14) *sometimes false. Here $K = K(p, c)$ is in each case a number depending only on p and c, and it is understood that the series on the right hand sides of* (2. 13) *and* (2. 14) *are convergent.*

It will be observed that our enunciation ignores the cases (α) when $c > 1$ and Σa_n is convergent and (β) when $c \leqq 1$ and Σa_n is divergent. It is easy to see by examples that in these cases our results are either trivial or false, so that no case of genuine interest is excluded.

In case (β) the series $\Sigma n^{-c} s_n^p$ cannot converge, since s_n increases with n. In case (α) we must distinguish, according to the value of p. If $p < 1$ then

$$\sum n^{-c}(n a_n)^p \leqq \Big(\sum a_n\Big)^p \Big(\sum n^{-\frac{c-p}{1-p}}\Big)^{1-p} \leqq K s_1^p \leqq K \sum n^{-c} s_n^p ,$$

by *Hölder*'s inequality, so that (2. 13) is trivial. If $p > 1$, (2. 14) is false; for it would imply *a fortiori* that

$$s_1^p = \Big(\sum a_n\Big)^p \leqq K \sum n^{p-1} a_n^p ,$$

which is false when

$$a_n = n^{-1} (\log n)^{-\frac{1}{p}-\delta} \qquad \left(0 < \delta < 1 - \frac{1}{p}\right).$$

Finally, if $p = 1$, (2. 13) is trivial, since

$$\sum n^{-c} (n a_n) \leqq \sum a_n = s_1 ;$$

and so is (2. 14), since s_n is bounded.

2. 2. (i) Suppose first that $p < 1$. If $c > 1$, Σa_n is divergent and s_n increasing. If m is one of the numbers 2, 4, 8, . . ., we have

$$\sum_{\frac{1}{2}m}^{m} n^{-c} (n a_n)^p \leqq K m^{p-c} \sum_{\frac{1}{2}m}^{m} a_n^p \leqq K m^{p-c} \cdot m^{1-p} \left(\sum_{\frac{1}{2}m}^{m} a_n \right)^p$$

$$\leqq K m^{1-c} s_m^p \leqq K m^{-c} \sum_{m}^{2m} s_n^p \leqq K \sum_{m}^{2m} n^{-c} s_n^p ,$$

and (2. 13) follows by adding up these results.

If $c \leqq 1$, Σa_n is convergent and s_n decreasing. As above, we have

$$\sum_{\frac{1}{2}m}^{m} n^{-c} (n a_n)^p \leqq K m^{1-c} \left(\sum_{\frac{1}{2}m}^{m} a_n \right)^p \leqq K m^{1-c} s_{\frac{1}{2}m}^p$$

$$\leqq K m^{-c} \sum_{\frac{1}{4}m}^{\frac{1}{2}m} s_n^p \leqq K \sum_{\frac{1}{4}m}^{\frac{1}{2}m} n^{-c} s_n^p , \quad [1]$$

and (2. 13) follows as before.

2. 3. (ii) Suppose next that $p > 1$. If $c > 1$, we have

$$\Phi_n = n^{-c} + (n+1)^{-c} + \cdots < K n^{1-c}$$

and

$$\sum_{1}^{m} n^{-c} s_n^p = \sum_{1}^{m} (\Phi_n - \Phi_{n+1}) s_n^p \leqq \sum_{1}^{m} \Phi_n (s_n^p - s_{n-1}^p) \quad [2]$$

$$\leqq K \sum_{1}^{m} n^{1-c} s_n^{p-1} a_n \leqq K \left(\sum_{1}^{m} n^{-c} s_n^p \right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\sum_{1}^{m} n^{-c} (n a_n)^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

for every m; from which we deduce (2. 14).

If $c < 1$, we have

$$\Phi_n = 1^{-c} + 2^{-c} + \cdots + n^{-c} < K n^{1-c}$$

and

$$(2.\ 31) \qquad \sum_{m}^{M} n^{-c} s_n^p = \sum_{m}^{M} (\Phi_n - \Phi_{n-1}) s_n^p \ [3] \leqq \sum_{m}^{M-1} \Phi_n (s_n^p - s_{n+1}^p) + \Phi_M s_M^p .$$

---

[1] If $m = 2$ the summation comprises the single term for which $n = 1$.

[2] $s_0 = 0$.

[3] $\Phi_0 = 0$.

Now

$$\Phi_M s_M^p \leqq K M^{1-c}(a_M + a_{M+1} + \cdots)^p$$

$$\leqq K M^{1-c}\Big(\sum_M^\infty n^{-c}(n a_n)^p\Big)\Big(\sum_M^\infty n^{-\frac{p-c}{p-1}}\Big)^{p-1} \leqq K \sum_M^\infty n^{-c}(n a_n)^p \to 0$$

when $M \to \infty$. Hence (2. 31) gives

$$\sum_m^\infty n^{-c} s_n^p \leqq \sum_m^\infty \Phi_n(s_n^p - s_{n+1}^p) \leqq K \sum_m^\infty n^{1-c} s_n^{p-1} a_n$$

$$\leqq K\Big(\sum_m^\infty n^{-c} s_n^p\Big)^{\frac{p-1}{p}}\Big(\sum_m^\infty n^{-c}(n a_n)^p\Big)^{\frac{1}{p}},$$

from which again (2. 14) follows. The inequality is not necessarily true, with any value of K, when $c = 1$; in fact $\Sigma n^{-1}(n a_n)^p$ may be convergent and $\Sigma n^{-1} s_n^p$ divergent. An example is given by $a_n = n^{-1}(\log n)^{-1-\delta}$, where $0 < \delta < \frac{1}{p}$.

2. 4. (iii). The main arguments of §§ 2.2—2.3 remain valid when $p = 1$, but become simpler, since it is not necessary to use *Hölder*'s inequality. It is only necessary to observe (in the second argument of § 2.3) that $\Phi_M s_M \leqq K M^{1-c} s_M \to 0$ whenever $\Sigma n^{1-c} a_n$ is convergent.

When $p = 1$, $c = 1$, the inequalities take the form

$$\sum a_n \leqq K \sum \frac{s_n}{n}, \quad \sum \frac{s_n}{n} \leqq K \sum a_n .$$

The first is true (and trivial), since $\Sigma a_n = s_1$; the falsity of the second is shown by the example $a_n = n^{-1}(\log n)^{-2}$.

The two special cases in which $c = p$ are particularly interesting. If $p > 1$ then

$$\sum\Big(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}\Big)^p \leqq K \sum a_n^p ; \quad [1] \tag{2. 41}$$

and if $p < 1$ then

$$\sum a_n^p \leqq K \sum\Big(\frac{a_n + a_{n+1} + \cdots}{n}\Big)^p . \tag{2. 42}$$

If $c = 0$, we obtain

$$\sum (a_n + a_{n+1} + \cdots)^p \leqq K \sum (n a_n)^p \qquad (p > 1), \tag{2. 43}$$

$$\sum (n a_n)^p \leqq K \sum (a_n + a_{n+1} + \cdots)^p \qquad (p < 1). \tag{2. 44}$$

The best possible value of K in (2. 41) is known [1] to be $\Big(\frac{p}{p-1}\Big)^p$.

---

[1]) For this theorem see *G. H. Hardy*, „Note on a theorem of Hilbert", *Math. Zeitschrift*, 6 (1920), 314—317; and „An inequality between integrals", *Messenger of Math.*, 54 (1925), 150—156; *E. Landau*, „Note on a theorem concerning series of positive terms", *Journal London Math. Soc.*, 1 (1926), 38—39; *E. B. Elliott*, „A simple exposition of certain recently proved facts as to convergency", *ibidem*, 93—96; *E. T. Copson*, „Note on series of positive terms", *ibidem*, 2 (1927), 9—12.

2.5 Theorem 2. *Suppose that* $c \neq 1$, *that*

$$\sigma_n = \sum_{m=1}^{\infty} a_m e^{-\frac{m}{n}} \tag{2.51}$$

if $c > 1$, *and that*

$$\sigma_n = \sum_{m=1}^{\infty} a_m e^{-\frac{n}{m}} \tag{2.52}$$

if $c < 1$. *Then*

$$\sum n^{-c}(n a_n)^p \leqq K \sum n^{-c}\sigma_n^p \tag{2.53}$$

if $p < 1$, *and*

$$\sum n^{-c}\sigma_n^p \leqq K \sum n^{-c}(n a_n)^p \tag{2.54}$$

if $p > 1$; *while both inequalities hold if* $p = 1$.

When $p \leqq 1$, (2.53) is a trivial corollary of (2.13), since

$$\sigma_n \geqq \sum_{m=1}^{n} a_m e^{-\frac{m}{n}} \geqq K s_n$$

if $c > 1$, and

$$\sigma_n \geqq \sum_{m=n}^{\infty} a_m e^{-\frac{n}{m}} \geqq K s_n$$

if $c < 1$.

Suppose then first that $p > 1$, $c > 1$. We have by partial summation

$$\sigma_n = \sum_m a_m e^{-\frac{m}{n}} = \sum_m s_m \triangle e^{-\frac{m}{n}} \leqq \frac{1}{n}\sum_m s_m e^{-\frac{m}{n}}$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{m=rn+1}^{(r+1)n} s_m e^{-\frac{m}{n}} \leqq \sum_{r=0}^{\infty} e^{-r} s_{(r+1)n} \leqq K \sum_{r=1}^{\infty} e^{-r} s_{rn}.$$

Hence, by *Minkowski*'s inequality,

$$\left(\sum_n n^{-c}\sigma_n^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqq K\left(\sum_n n^{-c}\left(\sum_r e^{-r} s_{nr}\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} \tag{2.55}$$

$$\leqq K \sum_r e^{-r}\left(\sum_n n^{-c} s_{nr}^p\right)^{\frac{1}{p}} = K \sum_r e^{-r} \Phi_r^{\frac{1}{p}},$$

say. Now

$$s_{nr} = t_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n,$$

where

$$b_n = a_{(n-1)r+1} + a_{(n-1)r+2} + \cdots + a_{nr}.$$

Hence, by Theorem 1 (2.14),

$$\Phi_r = \sum_n n^{-c} t_n^p \leqq K \sum_n n^{p-c} b_n^p \tag{2.56}$$

$$\leqq K \sum_n n^{p-c}\left(\sum_{(n-1)r<\nu\leqq nr} a_\nu\right)^p \leqq K r^{p-1} \sum_n n^{p-c} \sum_{(n-1)r<\nu\leqq nr} a_\nu^p$$

$$= Kr^{p-1}\sum_{\nu} a_\nu^p \sum_{\frac{\nu}{r}\leqq n<\frac{\nu}{r}-1} n^{p-c} \leqq Kr^{c-1}\sum_{\nu} \nu^{-c}(\nu a_\nu)^p.$$

From (2.55) and (2.56) we deduce

$$\left(\sum_n n^{-c}\sigma_n^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqq K\sum_r e^{-r} r^{\frac{c-1}{p}} \left(\sum_n n^{-c}(na_n)^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

which is equivalent to (2.54).

Finally suppose that $p>1, c<1$, so that now

$$s_n = a_n + a_{n+1} + \cdots.$$

Then

$$\sigma_n = \sum_m a_m e^{-\frac{n}{m}} = \sum_m (s_m - s_{m+1}) e^{-\frac{n}{m}}$$

$$= \sum_m s_m \left(e^{-\frac{n}{m}} - e^{-\frac{n}{m-1}}\right)^{1)} \leqq Kn\sum_m \frac{s_m}{m^2} e^{-\frac{n}{m}}$$

$$\leqq Kn\sum_{n}^{\infty}\frac{s_m}{m^2} + Kn\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{\frac{n}{r+1}\leqq m<\frac{n}{r}} \frac{s_m}{m^2} e^{-\frac{n}{m}}$$

$$\leqq Ks_n + K\sum_{r=1}^{\infty} e^{-r} s_{\frac{n}{r+1}} \leqq K\sum_{r=1}^{\infty} e^{-r} s_{\frac{n}{r}},$$

where s_x means $s_{[x]}$ when x is not an integer, and s_0 means s_1. Hence

$$\left(\sum_n n^{-c}\sigma_n^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqq K\left(\sum_n n^{-c}\left(\sum_r e^{-r} s_{\frac{n}{r}}\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} \tag{2.57}$$

$$\leqq K\sum_r e^{-r}\left(\sum_n n^{-c} s_{\frac{n}{r}}^p\right)^{\frac{1}{p}} = K\sum e^{-r}\Phi_r^{\frac{1}{p}},$$

say. But

$$\Phi_r = s_1^p \sum_{n\leqq r} n^{-c} = r^{-c}\sum_{n>r}\left(\frac{n}{r}\right)^{-c} s_{\frac{n}{r}}^p \leqq Kr^{1-c}s_1^p + Kr^{-c}\sum_n \nu_n^{-c} s_{\nu_n}^p,$$

where $\nu_n = \left[\frac{n}{r}\right]$ is an increasing function of n which can dwell on the same value at most Kr times, so that

$$\Phi_r \leqq Kr^{1-c}s_1^p + Kr^{1-c}\sum_n n^{-c}s_n^p \leqq Kr^{1-c}\sum_n n^{-c}s_n^p \leqq Kr^{1-c}\sum n^{-c}(na_n)^p, \tag{2.58}$$

by Theorem 1 (2.14). From (2.57) and (2.58) we deduce

$$\left(\sum_n n^{-c}\sigma_n^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqq K\sum_r e^{-r} r^{\frac{1-c}{p}}\left(\sum_n n^{-c}(na_n)^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

which is equivalent to (2.54).

Our arguments remain valid when $p=1$, but no use of *Minkowski*'s or *Hölder*'s inequality is necessary, so that the proof is then simpler.

---

[1]) $e^{-\frac{n}{m-1}}$ means 0 when $m=1$.

3. General theorems concerning power series and moment constants. The case $p > 1$.

3.1. Theorem 3. *If* $a_n \geqq 0$, $r \geqq p > 1$, $q > 0$

and

$$A(x) = \sum_1^\infty a_n x^n, \tag{3.11}$$

then

$$\int_0^1 (1-x)^{\frac{r}{q}-1} A^r(x)\,dx \leqq K\left(\sum_1^\infty n^{-\frac{p+q-pq}{q}} a_n^p\right)^{\frac{r}{p}}, \tag{3.12}$$

where $K = K(p, q, r)$ *depends on* p, q *and* r *only.*

We begin by reducing the proof of the theorem to that of the special case in which $r = p$. Denoting the series on the right hand side of (3.12) by S_p, we have

$$A(x) = \sum a_n x^n = \sum n^{-\frac{1}{p}-\frac{1}{q}+1} a_n \cdot n^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-1} x^n$$
$$\leqq S_p^{\frac{1}{p}}\left(\sum n^{\frac{p+q-pq}{q(p-1)}} x^{\frac{pn}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}} \leqq K S_p^{\frac{1}{p}} (1-x)^{-\frac{1}{q}}.$$

If then (3.12) has been proved when $r = p$, we deduce

$$\int_0^1 (1-x)^{\frac{r}{q}-1} A^r(x)\,dx \leqq K S_p^{\frac{r-p}{p}} \int_0^1 (1-x)^{\frac{p}{q}-1} A^p(x)\,dx \leqq K S_p^{\frac{r}{p}},$$

and (3.12) is proved generally.

We may suppose then that $r = p$. We write e_ν for $e^{-\frac{1}{\nu}}$. Then

$$\int_0^1 (1-x)^{\frac{p}{q}-1} A^p(x)\,dx = \left(\int_0^{e_1} + \sum_{\nu=1}^\infty \int_{e_\nu}^{e_{\nu+1}}\right)(1-x)^{\frac{p}{q}-1} A^p(x)\,dx$$
$$\leqq K A^p(e^{-1}) + K\sum_{\nu=1}^\infty (\nu+1)^{-\frac{p}{q}+1} \cdot \frac{1}{(\nu+1)^2} A^p\left(e^{-\frac{1}{\nu+1}}\right)$$
$$\leqq K\sum_{\nu=1}^\infty \nu^{-\frac{p}{q}-1} A^p\left(e^{-\frac{1}{\nu}}\right) \leqq K\sum_{\nu=1}^\infty \nu^{-\frac{p+q-pq}{q}} a_\nu^p,$$

by Theorem 2 (2.54). This proves the theorem.

3.2. Theorem 4. *If* $a(x) \geqq 0$, $r \geqq p > 1$, $q > 0$

and

$$A_n = \int_0^1 a(x) x^n\,dx, \tag{3.21}$$

then

$$\sum_1^\infty n^{\frac{r}{q}-1} A_n^r \leqq K\left(\int_0^1 (1-x)^{-\frac{p+q-pq}{q}} a^p(x)\,dx\right)^{\frac{r}{p}}. \tag{3.22}$$

We give two proofs of this theorem.

(i) *Deduction of Theorem 4 from Theorem 3.* We write

$$p' = \frac{p}{p-1}$$

and similarly with other letters.

To assert that

$$\sum n^{\frac{r}{q}-1} A_n^r \leqq U \tag{3.23}$$

is equivalent [1]) to asserting that, for some positive V,

$$\sum n^{\frac{1}{q}-\frac{1}{r}} A_n b_n \leqq U^{\frac{1}{r}} V^{\frac{1}{r'}} \tag{3.24}$$

for all b_n such that

$$\sum b_n^{r'} \leqq V. \tag{3.25}$$

Now

$$\sum n^{\frac{1}{q}-\frac{1}{r}} A_n b_n = \int_0^1 a(x) \sum n^{\frac{1}{q}-\frac{1}{r}} b_n x^n \, dx \tag{3.26}$$

$$= \int_0^1 a(x) \sum c_n x^n \, dx = \int_0^1 a(x) C(x) \, dx,$$

say; and

$$\int_0^1 a(x) C(x) \, dx = \int_0^1 (1-x)^{-\frac{1}{p}-\frac{1}{q}+1} a(x) \cdot (1-x)^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-1} C(x) \, dx \tag{3.27}$$

$$\leqq I^{\frac{1}{p}} J^{\frac{1}{p'}},$$

where

$$I = \int_0^1 (1-x)^{-\frac{p+q-pq}{q}} a^p(x) \, dx, \quad J = \int_0^1 (1-x)^{p'\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-1\right)} C^{p'}(x) \, dx.$$

Write now $P = r'$, $R = p'$, so that $R \geqq P > 1$. Then if

$$\sum n^{-\frac{P+q-Pq}{q}} c_n^P = \sum b_n^{r'} = V,$$

we have

$$J = \int_0^1 (1-x)^{\frac{R}{q}-1} C^R(x) \, dx \leqq K V^{\frac{R}{P}} = K V^{\frac{p'}{r'}},$$

by Theorem 3. Hence, from (3.26) and (3.27),

$$\sum n^{\frac{1}{q}-\frac{1}{r}} A_n b_n \leqq K I^{\frac{1}{p}} V^{\frac{1}{r'}};$$

and we may take $U = K I^{\frac{r}{p}}$ in (3.24), which proves the theorem.

---

[1]) ***E. Landau***, „Über einen Konvergenzsatz“, *Göttinger Nachrichten* (1907), 25—27. For the corresponding theorem for integrals, see ***F. Riesz***, „Untersuchungen über Systeme integrierbarer Funktionen“, *Math. Annalen*, 69 (1910), 449—497.

We may call theorems deducible from one another by this process of argument, based on the converse of *Hölder*'s inequality, *reciprocal* theorems.

3.3. (ii) *Deduction of Theorem 4 from Theorem 2.* We begin, as in the proof of Theorem 3, by reducing the theorem to the special case in which $r = p$. If we denote by J_p the integral which appears on the right hand side of (3.22), we have

$$A_n = \int_0^1 a(x)\, x^n\, dx = \int_0^1 (1-x)^{-\frac{1}{p}-\frac{1}{q}+1}\, a(x)\cdot(1-x)^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-1} x^n\, dx$$

$$\leqq J_p^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1 (1-x)^{\frac{p+q-pq}{q(p-1)}} x^{\frac{pn}{p-1}}\, dx\right)^{\frac{p-1}{p}} \leqq K J_p^{\frac{1}{p}}\, n^{-\frac{1}{q}};$$

$$\sum n^{\frac{r}{q}-1} A_n^r \leqq K J_p^{\frac{r-p}{p}} \sum n^{\frac{p}{q}-1} A_n^p \leqq K J_p^{\frac{r}{p}},$$

if the theorem has been proved when $r = p$.

Supposing now that $r = p$, we have

$$A_n = \int_0^1 a(x)\, x^n\, dx = \sum_{r=1}^{\infty} \int_{e_{r-1}}^{e_r} a(x)\, x^n\, dx \leqq \sum_{r=1}^{\infty} e^{-\frac{n}{r}} b_r, \quad [1]$$

where

$$b_r = \int_{e_{r-1}}^{e_r} a(x)\, dx \leqq K (r^{-2})^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_{e_{r-1}}^{e_r} a^p(x)\, dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Hence, by Theorem 2,

$$\sum_n n^{\frac{p}{q}-1} A_n^p \leqq \sum_n n^{\frac{p}{q}-1}\left(\sum_r e^{-\frac{n}{r}} b_r\right)^p \leqq K \sum_n n^{\frac{p}{q}-1} (n b^n)^p$$

$$\leqq K \sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{p}{q}-p+1} \int_{e_{n-1}}^{e_n} a^p(x)\, dx \leqq K \int_0^1 (1-x)^{-\frac{p+q-pq}{q}} a^p(x)\, dx,$$

which proves the theorem.

3.4. *Special cases.* Taking (i) $q = p'$ and (ii) $q = r$ in Theorems 3 and 4, we obtain the following results, in all of which

$$\mu = \frac{1}{p} + \frac{1}{r} - 1, \quad r \geqq p > 1,$$

and $K = K(p, r)$ or $K = K(p)$ according to the context. We state specially the results for $r = p$.

Theorem 5:

$$\int_0^1 (1-x)^{-\mu r} A^r(x)\, dx \leqq K \left(\sum a_n^p\right)^{\frac{r}{p}}, \tag{3.41}$$

$$\int_0^1 (1-x)^{p-2} A^p(x)\, dx \leqq K \sum a_n^p. \tag{3.42}$$

---

[1]) e_{r-1} means 0 when $r = 1$.

Theorem 6:

$$\sum n^{-\mu r} A_n^r \leqq K \left(\int_0^1 a^p(x)\,dx \right)^{\frac{r}{p}}, \tag{3.43}$$

$$\sum n^{p-2} A_n^p \leqq K \int_0^1 a^p(x)\,dx. \tag{3.44}$$

Theorem 7:

$$\int_0^1 A^r(x)\,dx \leqq K \left(\sum n^{-\mu p} a_n^p \right)^{\frac{r}{p}}, \tag{3.45}$$

$$\int_0^1 A^p(x)\,dx \leqq K \sum n^{p-2} a_n^p. \tag{3.46}$$

Theorem 8:

$$\sum A_n^r \leqq K \left(\int_0^1 (1-x)^{-\mu p} a^p(x)\,dx \right)^{\frac{r}{p}}, \tag{3.47}$$

$$\sum A_n^p \leqq K \int_0^1 (1-x)^{p-2} a^p(x)\,dx. \tag{3.48}$$

If $p \leqq 2$ (but not otherwise) we may also take $r = p'$, when $\mu = 0$. We then obtain:

Theorem 9:
$$\int_0^1 A^{p'}(x)\,dx \leqq K \left(\sum a_n^p \right)^{\frac{1}{p-1}}.$$

Theorem 10:
$$\sum A_n^{p'} \leqq K \left(\int_0^1 a^p(x)\,dx \right)^{\frac{1}{p-1}}.$$

Theorem 9 may be proved (in a much less elementary way) by combining theorems of *Hausdorff* [1]) and of *Fejér* and *F. Riesz* [2]). These theorems are however essentially of a „functiontheoretic" character.

4. The case $0 < p \leqq 1$.

4.1. So far we have supposed $p > 1$. The results of § 2 suggest that, when $p < 1$, the signs of our inequalities should be reversed.

Theorem 11. *If* $0 < r \leqq p < 1$, $q > 0$, *then*

$$\sum_1^\infty n^{\frac{p+q-pq}{q}} a_n^p \leqq K \left(\int_0^1 (1-x)^{\frac{r}{q}-1} A^r(x)\,dx \right)^{\frac{p}{r}}. \tag{4.11}$$

First, we may reduce the theorem to the particular case $r = p$. For suppose it established in this case, and denote the integral on the right of (4.11) by J_r. Since $A(x)$ is an increasing function, we have

---

[1]) *F. Hausdorff*, „Eine Ausdehnung des Parsevalschen Satzes über Fourierreihen", *Math. Zeitschrift*, 16 (1923), 163—169.

[2]) *L. Fejér* und *M. Riesz*, „Über einige funktiontheoretische Ungleichungen", *Math. Zeitschrift*, 11 (1921), 305—314.

$$A^r(1-2\xi) \leqq K\xi^{-\frac{r}{q}} \int_{1-2\xi}^{1-\xi} (1-x)^{\frac{r}{q}-1} A^r(x)\,dx \leqq K\xi^{-\frac{r}{q}} J_r,$$

$$A^r(x) \leqq K(1-x)^{-\frac{r}{q}} J_r,$$

$$J_p \leqq K J_r^{\frac{p-r}{r}} \int_0^1 (1-x)^{\frac{p}{q}-1} \cdot (1-x)^{-\frac{p-r}{q}} A^r(x)\,dx \leqq K J_r^{\frac{p}{r}},$$

$$\sum n^{-\frac{p+q-pq}{q}} a_n^p \leqq K J_p \leqq K J_r^{\frac{p}{r}}.$$

We may suppose then that $r = p$; and we have, by Theorem 2,

$$\sum n^{-\frac{p+q-pq}{q}} a_n^p = \sum n^{-\frac{p}{q}-1} (n a_n)^p \leqq K \sum n^{-\frac{p}{q}-1} \sigma_n^p$$

$$= K \sum n^{1-\frac{p}{q}} \cdot n^{-2} \cdot A^p\left(e^{-\frac{1}{n}}\right) \leqq K \sum n^{1-\frac{p}{q}} \int_{e_n}^{e_{n-1}} A^p(x)\,dx$$

$$\leqq K \int_0^1 (1-x)^{\frac{p}{q}-1} A^p(x)\,dx,$$

which proves the theorem.

4.2. Theorem 12. *If* $0 < r \leqq p < 1$, $q > 0$, *then*

$$(4.21) \qquad \int_0^1 (1-x)^{-\frac{p+q-pq}{q}} a^p(x)\,dx \leqq K\left(A_0^r + \sum n^{\frac{r}{q}-1} A_n^r\right)^{\frac{p}{r}}.$$

It will be observed that there is a slight loss of symmetry in this theorem, owing to the presence of the term A_0^r on the right hand side. The result becomes false if this term is removed. Suppose for example that $q = r = p$, when (4.21), with A_0^r removed, would become

$$\int_0^1 (1-x)^{p-2} a^p(x)\,dx \leqq K \sum A_n^p.$$

This is false. Suppose for example that $\frac{1}{2} < p < 1$ and

$$a(x) = 1 \ \ (0 \leqq x \leqq \zeta), \qquad a(x) = 0 \ \ (\zeta < x < 1),$$

where ζ is small. The inequality then gives

$$\zeta(1+\varepsilon\zeta) \leqq K\left(\frac{\zeta^{2p}}{2^p} + \frac{\zeta^{3p}}{3^p} + \cdots\right)$$

where ε_ζ tends to zero with ζ, and this is false if ζ is sufficiently small.

It is plain that the failure occurs owing to the possibility that A_0 may be considerably larger than the other moment constants. It would be possible to restore complete symmetry by writing (4.21) in the form

$$\int_0^1 (1-x)^{-\frac{p+q-pq}{q}} a^p(x)\,dx \leqq K\left(\sum_0^\infty (n+1)^{\frac{r}{q}-1} A_n^r\right)^{\frac{p}{r}}$$

and making a corresponding change in Theorem 4. We can also get rid of the extra term in (4. 21) by imposing on $a(x)$ a condition which secures that $A_0 \leqq K A_1$, *e. g.*, by supposing that $a(x) = 0$ in some fixed interval $0 \leqq x \leqq \zeta$, a restriction which does not touch the essential point of the theorem.

We can again reduce the theorem to the special case $r = p$. In fact, if we denote the series in (4.21) by S_r, we have

$$A_{2n}^r \leqq K n^{-\frac{r}{q}} \sum_{\nu=n}^{2n} \nu^{\frac{r}{q}-1} A_\nu^r \leqq K n^{-\frac{r}{q}} S_r,$$

since A_n is a decreasing function of n; and so (assuming the special case)

$$A_n^r \leqq K n^{-\frac{r}{q}} S_r, \quad S_p \leqq K S_r^{\frac{p-r}{r}} \sum n^{\frac{p}{q}-1} \cdot n^{-\frac{p-r}{q}} A_n^r \leqq K S_r^{\frac{p}{r}},$$

$$A_0^p + S_p \leqq K (A_0^r + S_r)^{\frac{p}{r}}.$$

We may suppose then that $r = p$.

We now have

$$A_n = \int_0^1 a(x)\, x^n\, dx \geqq \sum_{\nu=1}^{\infty} \int_{e_\nu}^{e_\nu+1} a(x)\, x^n\, dx \tag{4.22}$$

$$\geqq \sum_{\nu=1}^{\infty} e^{-\frac{n}{\nu}} \int_{e_\nu}^{e_\nu+1} a(x)\, dx = \sum_{\nu=1}^{\infty} e^{-\frac{n}{\nu}} b_\nu = \sigma_n,$$

say. Also

$$\int_0^1 (1-x)^{-\frac{p+q-pq}{q}} a^p(x)\, dx = \left(\int_0^{e_1} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \int_{e_\nu}^{e_\nu+1} \right) (1-x)^{-\frac{p+q-pq}{q}} a^p(x)\, dx \tag{4.23}$$

$$\leqq K \int_0^{e_1} a^p(x)\, dx + K \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^{\frac{p+q-pq}{q}} \int_{e_\nu}^{e_\nu+1} a^p(x)\, dx = R + S,$$

say. Plainly

$$R \leqq K \left(\int_0^{e_1} a(x)\, dx \right)^p \leqq K A_0^p; \tag{4.24}$$

and

$$\int_{e_\nu}^{e_\nu+1} a^p(x)\, dx \leqq \left(\int_{e_\nu}^{e_\nu+1} a(x)\, dx \right)^p \left(\int_{e_\nu}^{e_\nu+1} dx \right)^{1-p} \leqq K \nu^{2p-2} b_\nu^p,$$

so that

$$S \leqq K \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^{p-1+\frac{p}{q}} b_\nu^p = K \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^{\frac{p}{q}-1} (\nu b_\nu)^p \tag{4.25}$$

$$\leqq K \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^{\frac{p}{q}-1} \sigma_\nu^p \leqq K \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^{\frac{p}{q}-1} A_\nu^p,$$

by Theorem 2 and (4.22). The theorem follows from (4.23), (4.24) and (4.25).

4. 3. Taking $q = r$ in Theorems 11 and 12, we obtain

Theorem 13. *If* $0 < r \leqq p < 1$ *and* $\mu = \frac{1}{p} + \frac{1}{r} - 1$ *then*

$$\sum n^{-\mu p} a_n^p \leqq K \left(\int_0^1 A^r(x)\, dx \right)^{\frac{p}{r}}; \tag{4.31}$$

and in particular

$$\sum n^{p-2} a_n^p \leqq K \int_0^1 A^p(x)\, dx. \tag{4.32}$$

Theorem 14. *Under the same conditions*

$$\int_0^1 (1-x)^{-\mu p} a^p(x)\, dx \leqq K \left(\sum_{n=0}^{\infty} A_n^r \right)^{\frac{p}{r}}; \tag{4.33}$$

and in particular

$$\int_0^1 (1-x)^{p-2} a^p(x)\, dx \leqq K \sum_{n=0}^{\infty} A_n^p. \tag{4.34}$$

These theorems correspond to Theorems 7 and 8. There are no similar theorems corresponding to Theorems 5 and 6, since we cannot now take $q = p' < 0$. For the sake of completeness we add the trivial

Theorem 15. *When* $p = 1$, $r = 1$, $q > 0$, *the two sides of* (4. 11), *and also of* (4. 21), *have a ratio which lies between positive bounds depending only on* q.

4. 4. Theorems 3 and 4 are subject to the conditions $r \geqq p$, $q > 0$, and Theorems 11 and 12 to the conditions $0 < r \leqq p$, $q > 0$. It is not difficult to show that, in all cases in which these conditions are not satisfied, the theorems are either trivial or false.

In the first place, it is easy to see that (3. 12) and (3. 22) are false when $r < p$, and (4. 11) and (4. 21) when $r > p$. These assertions are all to be substantiated in the same way, and it will be sufficient to consider (3. 12). Suppose that $r < p$ and take

$$a_1 = 0, \quad a_n = n^{\frac{1}{q}-1} (\log n)^{-\frac{1}{p}-\delta} \qquad (n \geqq 2)$$

where $\delta > 0$. Then $\sum n^{-\frac{p+q-pq}{q}} a_n^p$ is convergent. But

$$A(x) \sim K (1-x)^{-\frac{1}{q}} \left(\log \frac{1}{1-x} \right)^{-\frac{1}{p}-\delta}$$

when $x \to 1$, and the integral on the left hand side is divergent if $r\left(\frac{1}{p} + \delta\right) < 1$, which is possible when $r < p$.

The integral in (3. 12) cannot converge when $q < 0$ (since $A(x)$ increases) except when $a_n = 0$ for every n. Thus (3. 12) is certainly false when $q < 0$. Theorem 4, on the other hand, is trivial when $q < 0$, since the left hand side is convergent for any decreasing A_n. Theorem 12 is false when $q < 0$, since the series on the right is convergent whenever $a(x)$ is integrable, and Theorem 11 is

„vacuous“ [1]), since the integral on the right can exist only when $a_n = 0$ for every n.

We conclude that the limitations stated in our theorems are the „correct“ limitations.

4.5. Our theorems may be transformed by

(1) replacing $(1-x)^{-\alpha} A(x)$ by

(i) $\Sigma n^\alpha a_n x^n$ or (what is essentially the same thing) the α-th derivative of $A(x)$,

(ii) $\Sigma a_n^{(\alpha)} x^n$, where $a_n^{(\alpha)}$ is the α-th sum of a_n, defined either (a) by

$$a_n^{(\alpha)} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{\nu=0}^{n} \frac{\Gamma(\alpha+n-\nu)}{\Gamma(1+n-\nu)} a_\nu$$

or (b) by

$$a_n^{(\alpha)} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{\nu=n}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+\nu-n)}{\Gamma(1+\nu-n)} a_\nu$$

(or the equivalent „*Rieszian*“ forms);

(2) replacing $n^{-\alpha} A_n$ by

(i) the moment constant of $(1-x)^\alpha a(x)$ or (what is essentially the same thing) the α-th difference of A_n,

(ii) the moment constant of $a^{(\alpha)}(x)$, the α-th integral of $a(x)$, defined either (a) by

$$a^{(\alpha)}(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} a(t)\, dt$$

or (b) by

$$a^{(\alpha)}(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^1 (t-x)^{\alpha-1} a(t)\, dt.$$

These transformations are sometimes quite trivial and sometimes not. For example, if we transform (3.42) by (1i), we obtain

$$\int_0^1 \left(A^{\left(1-\frac{2}{p}\right)}(x) \right)^p dx \leqq K \sum a_n^p,$$

an inequality substantially equivalent to (3.46). Similarly (3.44) is transformed by (2i) into an inequality substantially equivalent to (3.48).

5. Further theorems.

5.1. In this concluding section we state shortly (in the main without detailed proofs) a number of further theorems derived from or suggested by those which precede.

---

[1]) A „vacuous“ theorem (to use terminology of *E. H. Moore* and *Veblen*) is a theorem which is true because its hypotheses are necessarily false.

Theorem 16. *If*

$$p > 1,\ q > 1,\ \mu = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1 \geqq 0,$$

then

$$\int_0^1 (1-x)^{-\mu} A(x) B(x)\, dx \leqq K \left(\sum a_n^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum b_n^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Theorem 17. *Under the same conditions*

$$\sum n^{-\mu} A_n B_n \leqq K \left(\int_0^1 a^p(x)\, dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 b^q(x)\, dx\right)^{\frac{1}{q}}.$$

To prove Theorem 16 we observe that, since $\mu \geqq 0$, we can choose $r \geqq p$, $s \geqq q$ so that $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1$. Then

$$\int_0^1 (1-x)^{-\frac{p+r-pr}{p}} A^r(x)\, dx \leqq K \left(\sum a_n^p\right)^{\frac{r}{p}},\quad \int_0^1 (1-x)^{-\frac{q+s-qs}{q}} B^s(x)\, dx \leqq K \left(\sum b_n^q\right)^{\frac{s}{q}},$$

by Theorem 5, and the conclusion follows from *Hölder*'s inequality. Theorem 17 is a similar corollary of Theorem 6. The condition $\mu \geqq 0$ is essential to the truth of the theorem.

Theorem 17 may be transformed as follows. We have

$$\sum n^{-\mu} A_n B_n = \int_0^1 \int_0^1 \left(\sum n^{-\mu} x^n y^n\right) a(x) b(y)\, dx\, dy.$$

The function $\Sigma n^{-\mu} x^n y^n$ is regular at all points of the square of integration except $(1, 1)$, in whose neighbourhood it behaves like a constant multiple of $(1 - xy)^{\mu - 1}$. We thus obtain

Theorem 18. *Under the same conditions*

$$\int_0^1 \int_0^1 (1-xy)^{\mu-1} a(x) b(y)\, dx\, dy \leqq K \left(\int_0^1 a^p(x)\, dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 b^q(y)\, dy\right)^{\frac{1}{q}}.$$

A simple transformation of Theorem 18 gives

Theorem 19. *Under the same conditions*

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{a(x) b(y)}{(x+y)^{1-\mu}}\, dx\, dy \leqq K \left(\int_0^1 a^p(x)\, dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 b^q(y)\, dy\right)^{\frac{1}{q}}.$$

We have in fact only to replace x, y by $1 - x$, $1 - y$, and to observe that the ratio $x + y - xy : x + y$ lies between positive bounds. Similarly Theorem 16 leads to

Theorem 20. *Under the same conditions*

$$\sum\sum \frac{a_m b_n}{(m+n)^{1-\mu}} \leqq K \left(\sum a_m^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum b_n^q\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{5.11}$$

The case $p = q = 2$, $\mu = 0$ is *Hilbert*'s double series theorem. There are naturally simple alternative proofs of Theorem 20.

When $\mu > 0$, the factors $(x+y)^{\mu-1}$, $(m+n)^{\mu-1}$ may be replaced by $|x-y|^{\mu-1}$, $|m-n|^{\mu-1}$ (the terms for which $m = n$ being then naturally excluded from the summation). These theorems are however considerably more difficult [1]).

5. 2. If we apply the *Landau-F. Riesz* converse of *Hölder*'s inequality to Theorems 18 and 20, we obtain

Theorem 21. *If* $p > 1$, $0 \leqq \mu < \frac{1}{p}$, and

$$a(x) = \int_0^1 (1-xy)^{\mu-1} a(x)\, dx,$$

then

$$\int_0^1 (a(x))^{\frac{p}{1-\mu p}} dx \leqq K \left(\int_0^1 a^p(x)\, dx \right)^{\frac{1}{1-\mu p}}.$$

Theorem 22. *If* $p > 1$, $0 \leqq \mu < \frac{1}{p}$, *and*

$$a_n = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m}{(m+n)^{1-\mu}},$$

then

$$\sum a_n^{\frac{p}{1-\mu p}} \leqq K \left(\sum a_n^p \right)^{\frac{1}{1-\mu p}}.$$

There is also of course an integral theorem strictly analogous to Theorem 22. Theorems of this character may be multiplied indefinitely, and we content ourselves by quoting

Theorem 23. *If* $q \geqq p > 1$ and

$$g(x) = \int_0^{\infty} e^{-xy} f(y)\, dy,$$

then

$$\int_0^{\infty} x^{-\frac{p+q-pq}{p}} g^q(x)\, dx \leqq K \left(\int_0^{\infty} f^p(x)\, dx \right)^{\frac{q}{p}}.$$

Theorem 24. *If* $p > 1$ *and*

$$a_n = \sum_{m=1}^{\infty}{}' a_m \frac{\log(m/n)}{m-n},$$

then

$$\sum a_n^p \leqq K \sum a_n^p.$$

---

[1]) See *G. H. Hardy, J. E. Littlewood, G. Pólya*, „The maximum of a certain bilinear form", *Proc. London Math. Soc.* (2), 25 (1926), 265—282; and *G. H. Hardy* and *J. E. Littlewood*, „Some properties of fractional integrals", *ibidem*, 24 (1925), xxxvii — xli (*Records of Proceedings* for 12 March 1925).

5.3. If we write

$$c_n = a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1,$$

then (5.11) may be written in the form

$$\sum n^{\mu-1} c_n \leqq K \left(\sum a_m^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum b_n^p \right)^{\frac{1}{q}}.$$

This inequality may be generalised very widely in other directions. We have in fact proved

Theorem 25. *Suppose that p, q, and r are positive, $p \leqq q$, f and g real, and*

$$\frac{1}{\omega} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}, \quad h = r\left(\frac{f}{p} + \frac{g}{q} - 1\right).$$

Then the inequality

$$\sum n^{h-1} c_n^r \leqq K \left(\sum m^{f-1} a_m^p \right)^{\frac{r}{p}} \left(\sum n^{g-1} b_n^q \right)^{\frac{r}{q}}, \tag{5.31}$$

where $K = K(p, q, r, f, g)$, is true when $p \geqq 1$, $q \geqq 1$, and

(i) $$\omega \leqq r \leqq p, \quad f < p, \quad g < q,$$

(ii) $$p < r \leqq q, \quad f < p, \quad g \leqq q\left(1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{r}\right),$$

(iii) $$q < r \leqq \frac{\omega}{1-\omega}, \quad f \leqq p\left(1 - \frac{1}{q} + \frac{1}{r}\right), \quad g \leqq q\left(1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{r}\right);$$

with the provisos (a) *that the condition $r \leqq \frac{\omega}{1-\omega}$ is to be omitted when $\omega \geqq 1$.* (b) *that, when $p = 1$, $r = q > 1$, the inequality $f < 1$ of* (ii) *is to be replaced by $f \leqq 1$, and* (c) *that a similar change is to be made in both inequalities of* (i) *when $p = q = r = 1$. In all other cases the inequality* (5.31) *is false (for appropriately chosen a_m and b_n).*

This theorem includes a very large number of interesting particular cases, but the proof is not easy and demands treatment in a separate memoir.

Über das Verhalten von $\sum_{m,n} e^{2\pi i \tau \frac{|m^2-2n^2|}{8}}$ und ähnlichen Funktionen bei Modulsubstitutionen.

Von *E. Hecke* in Hamburg.

Für die *Dirichlet*schen Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$ kennt man bisher keine allgemeine Eigenschaft, welche zum Ausdruck bringt, daß es sich um Reihen des speziellen Typus handelt, wo die auftretenden Potenzen n^s die natürlichen Zahlen n als Basis haben. Bei den eng damit verknüpften Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-nt}$ ist die Ganzzahligkeit der n aber restlos durch die Aussage zum Ausdruck gebracht, daß diese Funktion von t rein periodisch mit der Periode $2\pi i$ ist. Es scheint daher für die Theorie der *Dirichlet*schen Reihen von Bedeutung, wenn es gelingt, von der einer Reihe $\sum \frac{a_n}{n^s}$ zugeordneten Reihe $\Sigma a_n e^{-nt}$ neue Eigenschaften zu finden, welche die Periodizität mitbenutzen. Für die *Riemann*sche $\zeta(s)$ und die *Dedekind*schen Zetafunktionen der imaginären quadratischen Zahlkörper führt diese Fragestellung auf wohlbekannte wichtige Funktionaleigenschaften, welche ungefähr aussagen, daß die betreffenden Potenzreihen elliptische Modulformen einer genau angebbaren Stufe sind, also etwa für alle Substitutionen einer gewissen Kongruenzuntergruppe der Modulgruppe eine Gleichung von dem Typus

$$f\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) = (c\tau+d) f(\tau)$$

erfüllen.

Ich möchte im folgenden zeigen, daß auch die aus dem reellen quadratischen Körper stammenden Potenzreihen, wie z. B.

$$D(\tau) = \sum_{0<m+n\sqrt{2}<1+\sqrt{2}} e^{2\pi i \tau \frac{|m^2-2n^2|}{8}}$$

ähnliche Eigenschaften haben. Es gilt z. B. für dieses $D(\tau)$ bei der Kongruenzgruppe 8-ter Stufe die Gleichung

$$D\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) = (c\tau+d) D(\tau) + \psi\left(\tau, \begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix}\right) \quad (c>0),$$

wo das Zusatzglied $\Psi(\tau)$ gegenüber dem $D(\tau)$ die Eigenschaft besitzt, in der ganzen, längs der Halbgraden $-\infty \cdots -\frac{d}{c}$ aufgeschnittenen τ-Ebene regulär zu sein, und übrigens, bei $\tau = \infty$ eine einfache asymptotische Entwickelung zu besitzen.

Man darf dieser Klasse von Funktionen wohl eine gewisse ehrwürdige historische Bedeutung zuerkennen, da bereits *Dirichlet* in seiner klassischen Arbeit vom Jahre 1840 [1]) auf diese Reihen hinweist, ohne irgend eine einfache Eigenschaft für sie angeben zu können. Auch später ist man wiederholt in ähnlichem Zusammenhang auf sie aufmerksam geworden, hat aber auch nichts über sie aussagen können [2]). Mit den heutigen Hilfsmitteln der Analysis ist ihre Behandlung beinahe selbstverständlich: Übergang zur *Dirichlet*-Reihe durch das *Mellin*sche Integral und Anwendung der Funktionalgleichung der Zetafunktionen des reellen quadratischen Körpers. Daraus folgt das Verhalten bei der Substitution $-\frac{1}{\tau}$. Für beliebige Modulsubstitutionen schließt man dann nach einer Methode, wie ich es für binäre Thetareihen an anderer Stelle ausgeführt habe [3]).

§ 1. Umformung der Funktionalgleichung der Zetafunktionen.

In diesem Paragraphen soll eine für viele Zwecke durchsichtigere Form der Funktionalgleichung der Zetafunktionen des reellen quadratischen Körpers hergeleitet werden, die sich dadurch ergibt, daß statt der Funktionen

$$\sum_{\mathfrak{n}} \frac{\chi(\mathfrak{n})}{|N(\mathfrak{n})|^s},$$

wo über alle ganzen Ideale $\mathfrak{n}$ des Körpers summiert wird, nur die Summen über die Ideale $\mathfrak{n}$ einer bestimmten Restklasse betrachtet werden.

Es sei in dem reellen quadratischen Körper $K(\sqrt{D})$ mit der Diskriminante D ein beliebiges ganzes von 0 verschiedenes Ideal $\mathfrak{a}$ gegeben, seine (positive) Norm sei A, ferner Q eine ganze rationale positive Zahl, ϱ eine ganze, durch $\mathfrak{a}$ teilbare Zahl in K. Wir betrachten die Funktionen

$$(1) \qquad \zeta_0(s; \varrho, \mathfrak{a}, Q\sqrt{D}) = A^s \sum_{\substack{\mu \equiv \varrho \,(\mathfrak{a} Q\sqrt{D}) \\ (\mu)\, Q\sqrt{D}}}{}' |N(\mu)|^{-1}$$

$$(2) \qquad \zeta_1(s; \varrho, \mathfrak{a}, Q\sqrt{D}) = A^s \sum_{\substack{\mu \equiv \varrho \,(\mathfrak{a} Q\sqrt{D}) \\ (\mu)\, Q\sqrt{D}}}{}' sgn\ N(\mu) \cdot |N(\mu)|^{-s},$$

worin die Summation über ein volles System mod. $Q\sqrt{D}$ nicht-assoziierter ganzer Zahlen μ zu erstrecken ist, welche $\equiv \varrho \pmod{\mathfrak{a} Q\sqrt{D}}$ sind, exkl. $\mu = 0$.

---

[1]) Crelles Journal, Bd. 21; Werke, Bd. I, pg. 467.

[2]) *H. Weber,* Zahlentheoretische Untersuchungen aus dem Gebiet der elliptischen Funktionen II. Göttinger Nachrichten 1893, pg. 150. — Das asymptotische Verhalten dieser Funktionen ist kürzlich in einer Arbeit von *H. Petersson* untersucht worden: Über die Darstellung natürlicher Zahlen durch definite und indefinite quadratische Formen von $2r$ Variabeln, Abhandlungen a. d. Math. Seminar der Hambg. Univers. Bd. IV (1926).

[3]) Im Riemann-Gedächtnisband der Mathematischen Annalen (1927).

Im Hinblick auf die Funktionalgleichungen der *Dedekind*schen Zetafunktionen definieren wir weiter folgende ξ-Funktionen:

$$(3)\qquad \begin{aligned} \xi_0(s;\varrho,\mathfrak{a},Q\sqrt{D}) &= \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)^2\left(\frac{QD}{\pi}\right)^s \zeta_0(s;\varrho,\mathfrak{a},Q\sqrt{D}) \\ \xi_1(s;\varrho,\mathfrak{a},Q\sqrt{D}) &= \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)^2\left(\frac{QD}{\pi}\right)^s \zeta_1(s;\varrho,\mathfrak{a},Q\sqrt{D})\,. \end{aligned}$$

Diese Funktionen sind regulär für $\Re(s) > 1$. Ihre analytische Fortsetzung wollen wir durch das bekannte Verfahren mit dem Γ-Integral noch kurz direkt herleiten, da die Reduktion auf die Funktionen mit Klassencharakteren wegen der Unterscheidung zwischen eigentlichen und uneigentlichen Charakteren auch nicht einfacher ist.

Zu diesem Zweck ziehen wir folgende bekannte zwei Thetaformeln heran, die wir für positive t, t' brauchen:

$$(1)\qquad \begin{aligned} \sum_{\mu\equiv\varrho(\mathfrak{a}Q\sqrt{D})} e^{-\pi\frac{t\mu^2+t'\mu'^2}{AQD}} &= \frac{1}{Q\sqrt{D}}\frac{1}{\sqrt{tt'}}\sum_{\lambda\equiv 0(\mathfrak{a})} e^{-\frac{\pi}{AQD}\left(\frac{\lambda^2}{t'}+\frac{\lambda'^2}{t}\right)+2\pi i S\left(\frac{\lambda'\varrho}{AQD}\right)} \\ &= \frac{1}{Q\sqrt{D}\sqrt{tt'}}\sum_{\substack{\alpha \bmod \mathfrak{a}Q\sqrt{D}\\ \alpha\equiv 0(\mathfrak{a})}} e^{2\pi i S\left(\frac{\alpha'\varrho}{AQD}\right)}\sum_{\mu\equiv\alpha(\mathfrak{a}Q\sqrt{D})} e^{-\frac{\pi}{AQD}\left(\frac{\mu^2}{t'}+\frac{\mu'^2}{t}\right)} \end{aligned}$$

$$(2)\qquad \begin{aligned} &\sum_{\mu\equiv\varrho(\mathfrak{a}Q\sqrt{D})} \mu\mu' e^{-\pi\frac{t\mu^2+t'\mu'^2}{AQD}} \\ &\qquad = \frac{-1}{Q\sqrt{D}\,(\sqrt{tt'})^3}\sum_{\substack{\alpha \bmod \mathfrak{a}Q\sqrt{D}\\ \alpha\equiv 0(\mathfrak{a})}} e^{2\pi i S\left(\frac{\alpha'\varrho}{AQD}\right)}\sum_{\mu\equiv\alpha(\mathfrak{a}Q\sqrt{D})} \mu\mu' e^{-\frac{\pi}{AQD}\left(\frac{\mu^2}{t'}+\frac{\mu'^2}{t}\right)}. \end{aligned}$$

Durch das Γ-Integral lassen sich dann ξ_0 und ξ_1 durch diese Thetareihen so ausdrücken:

$$\xi_0(s,\varrho,\mathfrak{a},Q\sqrt{D}) = 2\int_{v=-l}^{+l}\int_{u=0}^{\infty} u^s \sum_{\mu\equiv\varrho(\mathfrak{a}Q\sqrt{D})}{}' e^{-\pi u\frac{\mu^2e^v+\mu'^2e^{-v}}{AQD}}\frac{du\,dv}{u}$$

$$\xi_1(s,\varrho,\mathfrak{a},Q\sqrt{D}) = \frac{2\pi}{AQD}\int_{v=-l}^{+l}\int_{u=0}^{\infty} u^{s+1}\sum_{\mu\equiv\varrho(\mathfrak{a}Q\sqrt{D})}{}' \mu\mu' e^{-\pi u\frac{\mu^2e^v+\mu'^2e^{-v}}{AQD}}\frac{du\,dv}{u}.$$

Dabei ist $\Re(s) > 1$ vorausgesetzt, und $l = l(Q\sqrt{D})$ ist der Logarithmus der Grundeinheit mod. $Q\sqrt{D}$. Um hieraus eine für alle s gültige Darstellung zu erhalten, teilen wir das Integrations-Intervall für u in die zwei Teilintervalle $u = 0 \ldots 1$ und $u = 1 \ldots \infty$ und führen im ersten Teil die Transformationsformeln ein. Dabei ist noch das in den Thetas eventuell auftretende konstante Glied zu berücksichtigen. Setzen wir

$$(4)\qquad \delta(\varrho) = \delta(\varrho,\mathfrak{a},Q\sqrt{D}) = \left\{\begin{array}{l} 1, \text{ wenn } \varrho\equiv 0(\mathfrak{a}Q\sqrt{D}) \\ 0 \text{ sonst}\end{array}\right\},$$

so ergibt die geschilderte Umformung:

$$\xi_0(s;\varrho,\mathfrak{a},Q\sqrt{D}) = \frac{4l}{Q\sqrt{D}\,(s-1)} - \delta(\varrho)\,\frac{4l}{s}$$
$$+ \frac{2}{Q\sqrt{D}} \int_{v=-l}^{+l} \int_{u=1}^{\infty} u^{1-s} \sum_{\substack{\alpha \bmod \mathfrak{a}\,Q\sqrt{D} \\ \alpha \equiv 0(\mathfrak{a})}} e^{2\pi i S\left(\frac{\alpha'\varrho}{AQD}\right)} \sum_{\mu \equiv \alpha(\mathfrak{a}\,Q\sqrt{D})}{}' e^{-\pi u \frac{\mu^2 e^v + \mu'^2 e^{-v}}{AQD}} \frac{du\,dv}{u}$$
$$+ 2 \int_{v=-l}^{+l} \int_{u=1}^{\infty} u^s \sum_{\mu \equiv \varrho(\mathfrak{a}\,Q\sqrt{D})}{}' e^{-\pi u \frac{\mu^2 e^v + \mu'^2 e^{-v}}{AQD}} \frac{du\,dv}{u}$$

$$\xi_1(s;\varrho,\mathfrak{a},Q\sqrt{D}) =$$
$$- \frac{2}{Q\sqrt{D}} \frac{\pi}{AQD} \int_{v=-l}^{+l} \int_{u=1}^{\infty} u^{2-s} \sum_{\substack{\alpha \bmod \mathfrak{a}\,Q\sqrt{D} \\ \alpha \equiv 0(\mathfrak{a})}} e^{2\pi i S\left(\frac{\alpha'\varrho}{AQD}\right)} \sum_{\mu \equiv \alpha(\mathfrak{a}\,Q\sqrt{D})}{}' \mu\,\mu'\, e^{-\pi u \frac{\mu^2 e^v + \mu'^2 e^{-v}}{AQD}} \frac{du\,dv}{u}$$
$$+ \frac{2\pi}{AQD} \int_{v=-l}^{+l} \int_{u=1}^{\infty} u^{s+1} \sum_{\mu \equiv \varrho(\mathfrak{a}\,Q\sqrt{D})}{}' \mu\,\mu'\, e^{-\pi u \frac{\mu^2 e^v + \mu'^2 e^{-v}}{AQD}} \frac{du\,dv}{u}.$$

Diese Ausdrücke definieren ξ_0, ξ_1 für alle endlichen komplexen s als analytische Funktionen, von denen ξ_0 bei $s = 0, 1$ Pole erster Ordnung besitzt, während im übrigen ξ_0, ξ_1 regulär sind. Die gesuchte Funktionaleigenschaft ergibt sich dann unter Benutzung der Gleichung

$$\sum_{\substack{\varrho \bmod \mathfrak{a}\,Q\sqrt{D} \\ \varrho \equiv 0(\mathfrak{a})}} e^{2\pi i S\left(\frac{\varrho\beta'}{AQD}\right)} = \delta(\beta)\cdot Q^2 D, \text{ wenn } \beta \equiv 0(\mathfrak{a}),$$

in der Gestalt

$$(5)\quad \xi_k(1-s;\beta;\mathfrak{a},Q\sqrt{D}) = \frac{(-1)^k}{Q\sqrt{D}} \sum_{\substack{\varrho \bmod \mathfrak{a}\,Q\sqrt{D} \\ \varrho \equiv 0(\mathfrak{a})}} e^{2\pi i S\left(\frac{\varrho\beta'}{AQD}\right)} \xi_k(s;\varrho,\mathfrak{a},Q\sqrt{D})\ (k=0,1).$$

§ 2. Das Verhalten der Potenzreihen bei der Substitution $-\frac{1}{\tau}$.

Die Funktionaleigenschaften von ξ_0, ξ_1 finden sich nun in einer sehr bemerkenswerten Gestalt bei den Potenzreihen wieder, welche den ξ_0, ξ_1 zugeordnet sind. Setzt man für t mit positivem Realteil

$$(6)\qquad \Phi_k(t;\varrho,\mathfrak{a},Q\sqrt{D}) = \sum_{\substack{\mu \equiv \varrho(\mathfrak{a}\,Q\sqrt{D}) \\ (\mu)\,Q\sqrt{D}}}{}' (\operatorname{sgn}\mu\mu')^k e^{-2\pi t \frac{|\mu\mu'|}{AQD}} \quad (k=0,1)$$

(wobei also das Glied mit $\mu = 0$ immer fehlen soll), so folgt bekanntlich aus der *Mellin*schen Formel

$$2\pi i\,\Phi_k(t;\varrho,\mathfrak{a},Q\sqrt{D})$$
$$= \int_{\frac{3}{2}-i\infty}^{\frac{3}{2}+i\infty} \frac{\Gamma(s)}{(2\pi t)^s} (QD)^s\,\zeta_k(s;\varrho,\mathfrak{a},Q\sqrt{D})\,ds$$

$$= \int_{(\frac{3}{2})} \frac{\Gamma(s)}{\Gamma\left(\frac{s+k}{2}\right)^2} \frac{1}{(2t)^s} \xi_k(s;\ \varrho,\ \mathfrak{a},\ Q\sqrt{D})\, ds\,.$$

Dabei ist $t^s = e^{s \log t}$, wo $\log t$ den in der rechten Halbebene eindeutigen Zweig bedeutet, welcher für positive t reell ist.

Für $k = 0$ folgt dann weiter unter Anwendung der Funktionalgleichung von ξ_0 und Berücksichtigung des einzigen Poles $s = 1$ des Integranden

$$2\pi i\, \Phi_0(t;\ \varrho,\ \mathfrak{a},\ Q\sqrt{D})$$

$$= \frac{1}{Q\sqrt{D}} \sum_{\substack{\beta \bmod \mathfrak{a}\, Q\sqrt{D} \\ \beta \equiv 0\,(\mathfrak{a})}} e^{2\pi i S\left(\frac{\varrho'\beta}{AQD}\right)} \int_{(-\frac{1}{2})} \frac{\Gamma(1-s)}{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)^2} \frac{1}{(2t)^{1-s}} \xi_0(s;\ \beta,\ \mathfrak{a},\ Q\sqrt{D})\, ds$$

$$= 2\pi i \cdot \frac{2l}{\pi Q\sqrt{D}} \frac{1}{t}$$

$$+ \frac{1}{Q\sqrt{D}} \sum_{\beta} e^{2\pi i S\left(\frac{\varrho'\beta}{AQD}\right)} \int_{(\frac{3}{2})} \frac{\Gamma(1-s)\,\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)^2}{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)^2 (2t)^{1-s}} \left(\frac{QD}{\pi}\right)^s \zeta_0(s;\ \beta,\ \mathfrak{a},\ Q\sqrt{D})\, ds\,.$$

Wegen

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) = 2^{1-s}\sqrt{\pi}\,\Gamma(s)$$

ist aber

$$\frac{\Gamma(1-s)\,\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)^2}{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)^2} = 2^{1-2s} \frac{\Gamma(s)\cos\frac{s\pi}{2}}{\sin\frac{s\pi}{2}}\,,$$

$$\Phi_0(t;\ \varrho,\ \mathfrak{a},\ Q\sqrt{D}) = \frac{2l}{\pi Q\sqrt{D}} \frac{1}{t}$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{t} \frac{1}{Q\sqrt{D}} \sum_{\beta} e^{2\pi i S\left(\frac{\varrho'\beta}{AQD}\right)} \int_{(\frac{3}{2})} \frac{\Gamma(s)\,(tQD)^s}{(2\pi)^s} \cot\frac{s\pi}{2} \cdot \zeta_0(s;\ \beta,\ \mathfrak{a},\ Q\sqrt{D})\, ds\,.$$

Ebenso folgt

$$\Phi_1(t;\ \varrho_1,\ \mathfrak{a},\ Q\sqrt{D}) =$$

$$= \frac{-1}{2\pi i Q\sqrt{D}} \frac{1}{t} \sum_{\beta} e^{2\pi i S\left(\frac{\varrho'\beta}{AQD}\right)} \int_{(\frac{3}{2})} \frac{\Gamma(s)(tQD)^s}{(2\pi)^s} \operatorname{tg}\frac{s\pi}{2} \cdot \zeta_1(s;\ \beta,\ \mathfrak{a},\ Q\sqrt{D})\, ds\,.$$

Jetzt endlich gehen wir zu derjenigen Funktion $D(\tau;\ \varrho,\ \mathfrak{a},\ Q\sqrt{D})$ über, deren Untersuchung unser eigentliches Ziel ist:

$$(7) \qquad D(\tau;\ \varrho,\ \mathfrak{a},\ Q\sqrt{D}) = \sum_{\substack{\mu \equiv \varrho\,(\mathfrak{a}\,Q\sqrt{D}) \\ (\mu)\, Q\sqrt{D},\ \mu\mu' > 0}}{}' e^{2\pi i \tau \frac{\mu\mu'}{AQD}}\,,$$

wobei τ eine Variable mit positiv-imaginärem Teil ist. Wesentlich ist die Zusatzbedingung „$\mu\mu' > 0$“ bei der Summation. Offenbar gilt

$$D(it;\varrho,\mathfrak{a},Q\sqrt{D}) = \frac{\Phi_0(t,\varrho,\mathfrak{a},Q\sqrt{D}) + \Phi_1(t,\varrho,\mathfrak{a},Q\sqrt{D})}{2},$$

und die oben bewiesenen Gleichungen für Φ_0, Φ_1 ergeben, wenn wir sie für $\frac{1}{t}$ an Stelle von t ansetzen:

$$\left[D\left(\frac{i}{t};\varrho,\mathfrak{a},Q\sqrt{D}\right) - \frac{l}{\pi Q\sqrt{D}}t\right]\cdot\frac{2\pi i Q\sqrt{D}}{t}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{\substack{\beta \bmod \mathfrak{a}Q\sqrt{D}\\ \beta\equiv 0(\mathfrak{a})}} e^{2\pi i S\left(\frac{\varrho'\beta}{\mathfrak{A}QD}\right)} \int_{(\frac{3}{2})} \frac{\Gamma(s)(QD)^s}{(2\pi t)^s}\left[\cot\frac{s\pi}{2}\,\zeta_0(s;\beta,\mathfrak{a},Q\sqrt{D}) - \operatorname{tg}\frac{s\pi}{2}\cdot\zeta_1(s;\ldots)\right]ds.$$

Hierin ist [1])

$$\frac{1}{2}\cot\frac{s\pi}{2}\,\zeta_0(s;\beta,\mathfrak{a},Q\sqrt{D}) - \frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{s\pi}{2}\,\zeta_1(s;\ldots)$$

$$= A^s\sum_{\substack{(\mu)\\ \mu\mu'>0}} N^{-s}\cot s\pi + A^s\sum_{\substack{(\mu)\\ \mu\mu'<0}} N^{-s}\frac{1}{\sin s\pi},$$

und wegen

$$\cot s\pi = i + \frac{1}{e^{is\pi}\sin s\pi} \tag{8}$$

ist dies gleich

$$iA^s\sum_{\mu\mu'>0} N^{-s} + \frac{A^s e^{-is\pi}}{\sin s\pi}\sum_{\mu\mu'>0} N^{-s} + \frac{A^s}{\sin s\pi}\sum_{\mu\mu'<0} N^{-s}.$$

Dabei ist $N = |\mu\mu'|$ gesetzt.

Wir werden damit auf folgende Funktionen geführt:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(\frac{3}{2})} \frac{\Gamma(s)}{w^s\sin s\pi}F(s;\beta,\mathfrak{a},Q\sqrt{D})\,ds = M(w), \tag{9}$$

wo $F(s;\beta,\mathfrak{a},Q\sqrt{D}) = \sum_{\mu\mu'>0} N^{-s}$ [1]).

Für die komplexe Variable w sei $w^s = e^{s\log|w| + is\arg w}$, wo zunächst

$$-\frac{3}{2}\pi < \arg w < \frac{\pi}{2}; \qquad \text{wegen}$$

$$\frac{\Gamma(\frac{3}{2}+iv)}{\sin(\frac{3}{2}+iv)\pi} = O\left(e^{-\frac{3}{2}(\pi-\varepsilon)|v|}\right)$$

für alle $\varepsilon > 0$ und $|v|\to\infty$ ist $M(w)$ in der so aufgeschnittenen Vollebene regulär, aber sodann noch über den Schnitt nach einer Richtung fortsetzbar, so daß es mehrdeutig ist, nämlich im Gebiet

$$-\frac{3}{2}\pi < \arg w < \frac{3}{2}\pi.$$

---

[1]) Als Summationsbedingungen in $\sum_{(\mu)}$ sind immer noch hinzuzufügen: $\mu\equiv\beta\,(\mathrm{mod.}\,\mathfrak{a}Q\sqrt{D})$, $(\mu)_{Q\sqrt{D}}$.

Die verschiedenen Zweige $M^*(w)$ und $M(w)$ hängen so zusammen, daß für $-\frac{3}{2}\pi < \arg w < -\frac{\pi}{2}$ wegen

$$\frac{1}{e^{2is\pi}\sin s\pi} = \frac{1}{\sin s\pi} - 2ie^{-is\pi}$$

der zweite Zweig gleich ist

$$M^*(w) = M(w) - \frac{2i}{2\pi i}\int_{\frac{3}{2}} \frac{\Gamma(s)F(s)}{e^{is\pi}w^s}\,ds$$

$$= M(w) - 2i\sum_{\mu\mu'>0} e^{+wN} = M(w) - 2iD\left(-iw\frac{AQD}{2\pi};\beta,\alpha,Q\sqrt{D}\right).$$

Die Funktion D ist aber, wie sich u. a. aus den späteren Formeln ergibt, über das Gebiet $-\frac{3}{2}\pi < \arg w < -\frac{\pi}{2}$ nicht fortsetzbar, also ist $M(w)$ über die Begrenzung des zweiblättrigen Bereiches

$$-\frac{3}{2}\pi < \arg w < \frac{3}{2}\pi$$

nicht fortsetzbar. — Das Aggregat

$$H(w) = M(e^{i\pi}w;\beta,\alpha) + M(w;\beta\sqrt{D},\alpha\sqrt{D})$$

ist also im Gebiet

$$-\frac{3}{2}\pi < \arg w < \frac{\pi}{2}$$

regulär und über die Rand-Halbgerade nach keiner Seite fortsetzbar. Bei Einführung der Variabeln $\tau = iw$ ist also $H(w)$ in der τ-Vollebene, die längs der negativreellen Achse aufgeschnitten ist, regulär und nicht fortsetzbar.

Für $M(w)$ ergibt sich aus (9) durch Verschieben des Integrationsweges leicht eine asymptotische Darstellung für $|w| \to \infty$, nämlich

$$M(-i\tau) = \sum_{n=2}^{p} \frac{(n-1)!}{i^n\tau^n} F(n;\beta,\alpha,Q\sqrt{D}) + R_p(\tau), \tag{10}$$

wo bei beliebigem festem p, $\varepsilon(\varepsilon > 0)$

$$|R_p(\tau)| < \frac{K}{|\tau|^{p+1}} \quad \text{für} \quad -(\pi-\varepsilon) < \arg\tau < \pi - \varepsilon$$

mit einer geeigneten Konstanten K.

Endlich ergibt sich noch eine andere für manche Zwecke brauchbarere Darstellung von $M(w)$ auf folgende Art: Wegen

$$\int_0^\infty \frac{x\,dx}{(x+w)x^s} = \frac{-\pi w}{w^s\sin s\pi} \quad (1 \leqq \Re(s) \leqq 2,\ -\pi < \arg w < \pi)$$

ist

$$(11)\qquad \frac{1}{2\pi i}\int_{(\frac{3}{2})} \frac{\Gamma(s)\,ds}{w^s \sin s\pi} = \frac{-1}{\pi w}\int_0^\infty \frac{x e^{-x}\,dx}{x+w}$$

$$M(w) = \frac{-1}{\pi w}\int_0^\infty \frac{x}{x+w} \sum_{\mu\mu'>0} e^{-Nx}\,dx$$

$$H(w) = \frac{1}{\pi w}\int_0^\infty \frac{x}{x-w} \sum_{\mu\mu'>0} e^{-Nx}\,dx - \frac{1}{\pi w}\int_0^\infty \frac{x}{x+w} \sum_{\mu\mu'<0} e^{-Nx}\,dx$$

für

$$-\pi < \arg w < 0,$$

wenn als Integrationsweg die positive reelle Achse genommen wird. Statt dessen können wir auch im ersten Integral die Halbgerade $\arg x = \frac{\pi}{2} - \varepsilon$, im zweiten Integral die Halbgerade $\arg x = -\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right)$ nehmen; die Formel gilt dann für

$$-\frac{3}{2}\pi + \varepsilon < \arg w < \frac{\pi}{2} - \varepsilon,$$

und so kommt schließlich

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(\frac{3}{2})} \frac{1}{2}\frac{\Gamma(s)\,(QD)^s}{(2\pi t)^s}\left[\cot\frac{s\pi}{2}\cdot\zeta_0(s;\beta,\mathfrak{a},Q\sqrt{D}) - \operatorname{tg}\frac{s\pi}{2}\cdot\zeta_1(s;\ldots)\right]ds$$

$$= iD(it;\beta,\mathfrak{a},Q\sqrt{D})$$

$$+\frac{1}{\pi t}\int_0^\infty \frac{x}{x-t} D(ix;\beta,\mathfrak{a},Q\sqrt{D})\,dx$$

$$-\frac{1}{\pi t}\int_0^\infty \frac{x}{x+t} D(tx;\beta\omega,\mathfrak{a}\omega,Q\sqrt{D})\,dx,$$

wo ω irgendeine ganze Zahl mit negativer Norm ist.

Damit ist dann endlich die Grundformel bewiesen:

$$D\left(-\frac{1}{\tau};\varrho,\mathfrak{a},Q\sqrt{D}\right) + \frac{l(Q\sqrt{D})}{\pi Q\sqrt{D}}\,l\tau$$

$$= \frac{\tau}{Q\sqrt{D}} \sum_{\substack{\beta \bmod \mathfrak{a}Q\sqrt{D}\\ \beta\equiv 0\,(\mathfrak{a})}} e^{2\pi i S\left(\frac{\varrho'\beta}{AQD}\right)} D(\tau;\beta,\mathfrak{a},Q\sqrt{D})$$

$$+\frac{1}{\pi Q\sqrt{D}} \sum_{\substack{\beta \bmod \mathfrak{a}Q\sqrt{D}\\ \beta\equiv 0\,(\mathfrak{a})}} e^{2\pi i S\left(\frac{\varrho'\beta}{AQD}\right)} \int_0^\infty \frac{x}{x+i\tau} D(ix;\beta,\mathfrak{a},Q\sqrt{D})\,dx$$

$$-\frac{1}{\pi Q\sqrt{D}} \sum_{\substack{\beta \bmod \mathfrak{a}Q\sqrt{D}\\ \beta\equiv 0\,(\mathfrak{a})}} e^{2\pi i S\left(\frac{\varrho'\beta}{AQD}\right)} \int_0^\infty \frac{x}{x-i\tau} D(ix;\beta\sqrt{D},\mathfrak{a}\sqrt{D},Q\sqrt{D})\,dx,$$

gültig für $\tau = |\tau| e^{i\varphi}$ mit $\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi$, $|\tau| > 0$.

Neben diese Gleichung tritt dann die unmittelbar aus der Definition (7) folgende

$$(13) \qquad D(\tau + k; \varrho, \mathfrak{a}, Q\sqrt{D}) = e^{2\pi i k \frac{\varrho\varrho'}{AQD}} D(\tau; \varrho, \mathfrak{a}, Q\sqrt{D})$$

für alle ganzen rationalen k, und durch die Kombination beider Aussagen ergibt sich also das Verhalten von $D(\tau)$ bei beliebigen Modulsubstitutionen. Um die Rechnung nach genau demselben Schema wie in der zitierten Arbeit durchführen zu können, ist nur noch zu bedenken, daß auch für $D(\tau)$ für alle natürlichen Zahlen n die Beziehung gilt

$$(14) \qquad D(\tau; \varrho, \mathfrak{a}, Q\sqrt{D}) = \frac{l(Q\sqrt{D})}{l(nQ\sqrt{D})} \sum_{\substack{\alpha \bmod. n\mathfrak{a}Q\sqrt{D} \\ \alpha \equiv \varrho (\mathfrak{a}Q\sqrt{D})}} D(n\tau; \alpha, \mathfrak{a}, nQ\sqrt{D}) .$$

Der Zahlfaktor von Σ ist die Anzahl der verschiedenen Einheiten mod. $Q\sqrt{D}$, welche mod. $nQ\sqrt{D}$ nicht assoziiert sind.

§ 3. Verhalten bei beliebigen Modulsubstitutionen.

Es sei nun $\frac{a\tau + b}{c\tau + d}$ eine Modulsubstitution,

$$c > 0, \quad \frac{a\tau + b}{c\tau + d} = \frac{a}{c} - \frac{1}{c(c\tau + d)}.$$

Zu dieser Substitution treten in der folgenden Rechnung wieder gewisse Kombinationen von Einheitswurzeln auf — die gleichen, wie in der S. 160, Anm. 3 genannten Arbeit — deren elementare Eigenschaften gleich vorweg genommen seien:

Wenn $\beta \equiv 0 (\mathfrak{a})$, so setzen wir bei festem a, b, c, d

$$\varphi(\varrho, \beta) = \sum_{\substack{\alpha \bmod. c\mathfrak{a}Q\sqrt{D} \\ \alpha \equiv \varrho (\mathfrak{a}Q\sqrt{D})}} e^{2\pi i \frac{a\alpha\alpha'}{cAQD} + 2\pi i S\left(\frac{\alpha'\beta}{cAQD}\right) + 2\pi i \frac{d\beta\beta'}{cAQD}} .$$

Hierfür gilt

$$(15) \quad \varphi(\varrho + \lambda, \beta) = e^{-2\pi i \frac{ab\lambda\lambda' + bS(\lambda\beta')}{AQD}} \varphi(\varrho, \beta + a\lambda), \quad \text{wenn} \quad \lambda \equiv 0 (\mathfrak{a}) .$$

$$(16) \qquad \varphi(\varrho, \beta c) = e^{2\pi i \frac{cd\beta\beta' + S(\varrho'\beta)}{AQD}} \varphi(\varrho, 0) .$$

Daraus folgt für $\lambda = -d\beta$ und $\varrho + d\beta$ an Stelle von ϱ

$$(17) \qquad \varphi(\varrho, \beta) = e^{-2\pi i \frac{bd\beta\beta' + bS(\varrho'\beta)}{AQD}} \varphi(\varrho + d\beta, 0) ;$$

also

$$(18) \qquad \varphi(\varrho, \beta_1) = \varphi(\varrho, \beta_2), \quad \text{wenn } \beta_1 \equiv \beta_2 \ (\text{mod. } \mathfrak{a}Q\sqrt{D}).$$

Ist weiter $c \equiv 0$ (mod. QD), so folgt aus (17), (18)

$$\varphi(\varrho, \beta c) = \varphi(\varrho + d\beta c, 0) = \varphi(\varrho, 0)$$

und nach (16)

$$\varphi(\varrho, \beta c) = e^{2\pi i \frac{S(\varrho'\beta)}{AQD}} \varphi(\varrho, 0) .$$

Also ist

$$\varphi(\varrho, 0) = 0, \text{ wenn } \varrho \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{a} Q\sqrt{D}},\ c \equiv 0 \pmod{QD}$$

und nach (18)

$$\varphi(\varrho, \beta) = 0, \text{ wenn } \varrho + d\beta \not\equiv 0\ (\mathfrak{a} Q\sqrt{D}),\ c \equiv 0\ (QD),$$

$$\varphi(\varrho, -a\varrho) = e^{2\pi i \frac{ab\varrho\varrho'}{AQD}} \varphi(0, 0), \text{ wenn } c \equiv 0\ (QD).$$

Für $\varphi(0, 0)$ findet sich, wenn $c \equiv 0(QD)$, durch eine elementare, aber etwas umständliche Rechnung, die die Formel für die *Gauß*schen Summen benutzt,

$$\varphi(0, 0) = \left(\frac{D}{a}\right) |c|\, Q\sqrt{D}, \text{ wenn } c \equiv 0(QD). \tag{19}$$

Unter Benutzung dieser Beziehungen folgt dann für eine beliebige Modulsubstitution mit $c > 0$ nach (12)

$$\begin{aligned}
&D\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d};\ \varrho,\ \mathfrak{a},\ Q\sqrt{D}\right)\\
&= \frac{l(Q\sqrt{D})}{l(cQ\sqrt{D})} \sum_{\substack{\alpha \bmod. c\mathfrak{a}Q\sqrt{D} \\ \alpha \equiv \varrho\,(\mathfrak{a}Q\sqrt{D})}} D\left(a - \frac{1}{c\tau+d};\ \alpha,\ \mathfrak{a},\ cQ\sqrt{D}\right)\\
&= \frac{l(Q\sqrt{D})}{l(cQ\sqrt{D})} \sum_{\alpha \equiv \varrho\,(\mathfrak{a}Q\sqrt{D})} e^{2\pi i \frac{aa\alpha'}{cAQD}} D\left(\frac{-1}{c\tau+d};\ \alpha,\ \mathfrak{a},\ cQ\sqrt{D}\right)\\
&= \frac{-l(Q\sqrt{D})}{\pi cQ\sqrt{D}}\, i(c\tau+d)\,\varphi(\varrho, 0) + \frac{c\tau+d}{cQ\sqrt{D}} \frac{l(Q\sqrt{D})}{l(cQ\sqrt{D})} \sum_{\substack{\beta \bmod. c\mathfrak{a}Q\sqrt{D} \\ \beta \equiv 0\ (\mathfrak{a})}} \varphi(\varrho, \beta)\, D(c\tau; \beta, \mathfrak{a}, cQ\sqrt{D})\\
&+ \frac{1}{\pi cQ\sqrt{D}} \frac{l(Q\sqrt{D})}{l(cQ\sqrt{D})} \sum_{\beta \bmod. c\mathfrak{a}Q\sqrt{D}} \varphi(\varrho, \beta)\, e^{-2\pi i \frac{d\tilde{\beta}\beta'}{cAQD}} L(c\tau+d;\ \beta, \mathfrak{a}, cQ\sqrt{D})\\
&- \frac{1}{\pi cQ\sqrt{D}} \frac{l(Q\sqrt{D})}{l(cQ\sqrt{D})} \sum_{\beta \bmod. c\mathfrak{a}Q\sqrt{D}} \varphi(\varrho, \beta)\, e^{-2\pi i \frac{d\tilde{\beta}\beta'}{cAQD}} L(-(c\tau+d);\ \beta\sqrt{D},\ \mathfrak{a}\sqrt{D},\ cQ\sqrt{D}),
\end{aligned}$$

wo gesetzt ist

$$L(\tau;\ a, \mathfrak{a}, Q\sqrt{D}) = \int_0^\infty \frac{x}{x+i\tau}\, D(ix;\ a, \mathfrak{a}, Q\sqrt{D})\, dx.$$

Unter Benutzung von (14), (18) kann man dafür noch schreiben

$$\left\{\begin{aligned}
&D\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d};\ \varrho,\ \mathfrak{a},\ Q\sqrt{D}\right) = -\frac{l(Q\sqrt{D})}{\pi cQ\sqrt{D}}\, i(c\tau+d)\,\varphi(\varrho, 0)\\
&+ \frac{c\tau+d}{cQ\sqrt{D}} \sum_{\gamma \bmod. \mathfrak{a}Q\sqrt{D}} \varphi(\varrho, \gamma)\, D(\tau;\ \gamma, \mathfrak{a}, Q\sqrt{D})\\
&+ \frac{1}{\pi cQ\sqrt{D}} \sum_{\gamma} \varphi(\varrho, \gamma) \int_{i\frac{d}{c}}^{\infty} \frac{cx - id}{x+i\tau}\, D(ix;\ \gamma, \mathfrak{a}, Q\sqrt{D})\, dx\\
&- \frac{1}{\pi cQ\sqrt{D}} \sum_{\gamma} \varphi(\varrho, \gamma) \int_{-i\frac{d}{c}}^{\infty} \frac{cx + id}{x-i\tau}\, D(ix;\ \gamma\sqrt{D},\ \mathfrak{a}\sqrt{D},\ Q\sqrt{D})\, dx.
\end{aligned}\right. \tag{20}$$

Falls nun noch

$$c \equiv 0 \ (\text{mod. } QD), \quad c > 0,$$

ergibt sich nach (19) folgendes Schlußresultat:

$$D\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d};\, \varrho, \mathfrak{a}, Q\sqrt{D}\right) = \frac{-l(Q\sqrt{D})}{\pi} i\left(\tau+\frac{d}{c}\right)\delta(\varrho)\left(\frac{D}{a}\right)$$
$$+\left(\frac{D}{a}\right) e^{2\pi i \frac{ab\varrho\varrho'}{AQD}} (c\tau+d)\, D(\tau;\, a\varrho\ \mathfrak{a}, Q\sqrt{D})$$
$$(21)\qquad +\left(\frac{D}{a}\right)\frac{e}{\pi}^{2\pi i \frac{ab\varrho\varrho'}{AQD}} \int_{i\frac{d}{c}}^{\infty} \frac{cx-id}{x+i\tau}\, D(ix;\, a\varrho, \mathfrak{a}, Q\sqrt{D})\, dx$$
$$-\left(\frac{D}{a}\right)\frac{e}{\pi}^{2\pi i \frac{ab\varrho\varrho'}{AQD}} \int_{-i\frac{d}{c}}^{\infty} \frac{cx+id}{x-i\tau}\, D(ix;\, a\varrho\sqrt{D}, \mathfrak{a}\sqrt{D}, Q\sqrt{D})\, dx\,.$$

Die Formel besitzt eine große Ähnlichkeit mit den Formeln für das Verhalten der elliptischen Modulformen, welche dem imaginären oder reellen quadratischen Zahlkörper entstammen, nur fehlen dort die Glieder mit den Integralbestandteilen. Immerhin gilt für diese nach den Ausführungen von § 2, daß sie in der Vollebene der Variabeln τ regulär sind, ausgenommen die reelle Achse von $-\infty$ bis $-\frac{d}{c}$.

Die Formel (20) kann, indem man τ ins Unendliche rücken läßt, dazu dienen, das Verhalten von $D(\tau)$ in der Nähe eines beliebigen rationalen Randpunktes $\frac{a}{c}$ zu untersuchen. Hierzu wird man für die Integrale wieder die asymptotischen Entwickelungen aus § 2 eintragen. Bedenkt man, daß die Zahlen $\varphi(\varrho, \gamma)c^{-1}$ nur endlich viele verschiedene Werte haben (bei festem $Q\sqrt{D}$), da für Modulsubstitutionen, welche mod. QD kongruent sind, die $\frac{\varphi(\varrho,\gamma)}{c}$ übereinstimmen, so kann man aus (10), (20) folgendes schließen:

$$\tau_1 = \frac{-1}{c\tau+d} \qquad (c>0)$$

gesetzt, ist

$$D\left(\frac{a}{c}+\frac{\tau_1}{c};\, \varrho, \mathfrak{a}, Q\sqrt{D}\right) = \frac{l(Q\sqrt{D})\, i\, \varphi(\varrho, 0)}{\pi c Q\sqrt{D}\tau_1}$$
$$-\frac{1}{c\tau_1 Q\sqrt{D}} \sum_{\gamma \bmod. \mathfrak{a}Q\sqrt{D}} \varphi(\varrho,\gamma)\, D\left(-\frac{d}{c}-\frac{1}{c\tau_1};\, \gamma, \mathfrak{a}, Q\sqrt{D}\right) + \Psi(\tau_1)\,\frac{1}{\tau_1},$$

wo

$$\Psi(\tau_1) = \sum_{n=2}^{p} u_n \cdot (n-1)!\,(c\tau_1)^n + K_p c^{p-1}\tau_1^{p+1}.$$

Hierin sind $u_2, u_3, \ldots, u_p$ von τ_1 unabhängig, während K_p und die u_n gleich-

mäßig beschränkt in a, b, c, d, n, p sind, falls τ_1 dem Gebiet $|\arg \tau_1| < \pi - \varepsilon$ mit festem positivem ε angehört. Insbesondere darf also τ_1 auch beliebig nahe an der positiven reellen Achse liegen [1]).

Schließlich sei noch bemerkt, daß ganz analoge Formeln für alle Potenzreihen $\Sigma a_n e^{-nt}$ gelten müssen, wo die zugehörige *Dirichlet*sche $\Sigma a_n n^{-s}$ einer Funktionalgleichung von demselben Typus wie $\zeta_0(s)$ oder $\zeta_1(s)$ genügt, d. h. wo der L-Faktor auch die Gestalt $\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)^2$ oder $\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)^2$ hat. Das trifft insbesondere noch zu für die *Lambert*sche Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nt}}{1-e^{-nt}}$, wo die *Dirichlet*sche-Reihe gleich $\zeta^2(s)$ ist (und deren Verallgemeinerung, wobei n noch Kongruenzbedingungen genügen soll). Für diese *Lambert*sche Reihe hat Herr *Wigert* [2]) eine asymptotische Funktionalgleichung aufgestellt, welche mit dem speziellen Fall unserer letzten Formel für $c = 1$, $a = d = 0$ identisch ist, und Herr *Landau* [3]) hat später einen einfacheren Beweis für diese Gleichung gegeben, der ebenfalls auf der Heranziehung der *Mellin*schen Formel beruht.

---

[1]) Wenn man in der Formel (8) i durch $-i$ ersetzt und diese Formel weiterhin statt (8) benutzt, würde sich natürlich als singuläre Linie für das Zusatzglied $\Psi'(\tau_1)$ der andere Teil der reellen Achse ergeben.

[2]) Acta mathematica Bd. 41 (1917), pg. 197—218.

[3]) Archiv d. Math. und Physik, 3. Reihe, Bd. 27 (1918), pg. 144.

Über einen Grenzübergang in Abels Recherches sur les Fonctions Elliptiques.

Von *Otto Hölder* in Leipzig [1]).

Die Grenzübergänge, durch die *Abel* und *Jacobi*, jener von den Multiplikations-, dieser von den Transformationsgleichungen aus, zu analytischen Darstellungen der elliptischen Funktionen gelangt sind, können nicht als strenge gelten. Während jedoch *Jacobi* in den „Fundamenta" gar keinen Versuch einer strengeren Begründung gemacht hat [2]), finden sich in *Abels* „Recherches" verschiedene Entwicklungen, die den Zweck haben, den erwähnten Grenzübergang sicherzustellen. Wenn es auch heutzutage aus begreiflichen Gründen üblich ist, daß andere Ausgangspunkte für die Theorie der elliptischen Funktionen gewählt werden, so ist es doch zum mindesten von historischem Interesse, daß der Gedankengang von *Abel* durch wenige Überlegungen zu einem strengen Beweis ergänzt werden kann, wobei dann die von *Abel* gebotenen rechnerischen Entwicklungen und Abschätzungen zur Verwendung kommen [3]).

§ 1. Abels Definitionen.

Wir müssen uns zunächst daran erinnern, was bei *Abel* an der betreffenden Stelle auf Grund der vorhergehenden Entwicklungen als von den elliptischen Funktionen bekannt vorauszusetzen ist. *Abel* definiert [4]) von den drei Funktionen

$$\varphi(a), \quad f(a), \quad F(a)$$

die erste

$$x = \varphi(a)$$

[1]) Vorliegende Abhandlung ist eine etwas abgeänderte Fassung des größeren Teils einer Arbeit, die neben noch einer anderen (vergl. Math. Ann. Bd. 24, S. 181) im Jahre 1884 bei Gelegenheit meiner Habilitation der Göttinger Philosophischen Fakultät vorgelegt, aber aus zufälligen Gründen bis jetzt nicht veröffentlicht worden ist.

[2]) Vergl. *Jacobis* Werke, Bd. 1, 1881, S. 141.

[3]) *Mittag-Leffler* hat den Grenzübergang durchgeführt, der bei der *Weierstraß*schen $\wp$-Funktion aus der Multiplikationsgleichung den Summenausdruck der Funktion gewinnen läßt (En metod att komma i analytisk besittning af de elliptiska functionerna, Helsingfors 1876); es treten aber gerade bei der $\wp$-Funktion die Schwierigkeiten nicht auf, mit denen *Abel* bei seinem Ausgangspunkt zu kämpfen hatte.

[4]) Werke, 2. Aufl., 1881, Bd. 1, S. 264 f.

durch die Umkehrung des Integrals erster Gattung

$$a = \int_0 \frac{dx}{\sqrt{(1 - c^2 x^2)(1 + e^2 x^2)}}$$

und die beiden anderen durch

$$f(a) = \sqrt{1 - c^2 \varphi^2(a)}, \qquad F(a) = \sqrt{1 + e^2 \varphi^2(a)}.$$

Die Größen c und e sind bei *Abel* reell, und die Quadratwurzeln sind zunächst einmal für kleine x und a so zu verstehen, daß sie sämtlich wenig von $+1$ verschieden sind.

Hier wäre noch aus der neueren Funktionenlehre die Tatsache beizuziehen, daß die Variable x vermöge der Gleichung

$$a = x + \frac{1}{6}(c^2 - e^2)x^3 + \cdots$$

und auf Grund eines Satzes über die Umkehrung der Potenzreihe in einer gewissen Umgebung des Nullpunktes der Ebene der komplexen Zahlen als eindeutige Funktion von a definiert werden kann, die sich nach Potenzen entwickeln läßt. Es ergibt sich die Entwicklung

$$[1] \qquad x = a - \frac{1}{6}(c^2 - e^2)a^3 + \cdots,$$

und man kann nun auch die beiden anderen Funktionen $f(a)$ und $F(a)$ für Werte von a, die absolut unter einer gewissen Grenze gelegen sind, nach Potenzen von a entwickeln.

Daß die drei Funktionen, die so für kleine Werte des Arguments a eindeutig und regulär definiert sind, sich jetzt fortsetzen lassen und sich als eindeutig und überall im Endlichen, abgesehen von Polen, als regulär herausstellen, folgt aus den Additionstheoremen der Funktionen [1]), die sich auf Grund der Definitionen der Funktionen unmittelbar bestätigen lassen [2]).

Die Funktionen

$$\varphi(a), \quad f(a), \quad F(a)$$

sind doppeltperiodisch, und es sind beziehungsweise

$$2\omega,\ \omega + \varpi i \qquad 2\omega,\ \varpi i \qquad \omega,\ 2\varpi i$$

ihre primitiven Periodenpaare, wobei hier ω und ϖ reell sind und positiv gedacht werden können. Der Ausdruck

$$m\omega + n\varpi i,$$

in dem m und n alle ganzen Zahlen durchlaufen, stellt die sämtlichen Nullstellen der Funktion $\varphi(a)$ dar; sie sind alle von der ersten Ordnung. Die Funktionen

[1]) Leitet man zuerst die Formeln für die Funktionen des doppelten Arguments ab, so kann man aus diesen Formeln sukzessive Ausdrücke der Funktionen in Form von Quotienten von Potenzreihen herleiten, welche die Funktionen in immer größeren Bereichen darstellen. *Weierstraß* hat diese aus den Additionstheoremen sich ergebende Darlegung in seiner im Wintersemester 1878/79 gehaltenen Vorlesung über elliptische Funktionen vorgetragen.

[2]) Bei *Abel*, a. a. O. S. 268.

$\varphi(a)$, $f(a)$, $F(a)$ werden alle drei nur an den Stellen der Form

$$\left(m+\frac{1}{2}\right)\omega+\left(n+\frac{1}{2}\right)\varpi i$$

unendlich groß und zwar von der ersten Ordnung. Denkt man sich um diese letzten Punkte Kreise mit einem beliebigen Radius δ beschrieben, der aber eine feste Größe haben und für alle Punkte derselbe sein soll, so sind außerhalb dieser Kreise in der ganzen Ebene die absoluten Beträge der Funktionen $\varphi(a)$, $f(a)$, $F(a)$ unter einer festen Schranke.

§ 2. Anknüpfung an das Multiplikationstheorem.

Nun muß von den Gleichungen (126) in § VI, 23 der Recherches sur les fonctions elliptiques ausgegangen werden [1]). Die erste dieser Gleichungen ist die folgende:

$$\varphi((2n+1)\beta)=\frac{1}{2n+1}\sum_{m=-n}^{+n}\sum_{\mu=-n}^{+n}(-1)^{m+\mu}\varphi\left(\beta+\frac{m\omega+\mu\varpi i}{2n+1}\right).$$

Hierin setzt *Abel*

$$\beta=\frac{a}{2n+1}$$

und erhält, indem er gewisse von den Funktionen

$$\varphi\left(\beta+\frac{m\omega+\mu\varpi i}{2n+1}\right)$$

mit Hilfe der Gleichung [2])

$$\varphi\left(a\pm\frac{\omega}{2}\right)\varphi\left(a+\frac{\varpi}{2}i\right)=\pm\frac{i}{ce}$$

in reziproke Funktionen umwandelt, die Formel [3]):

$$\begin{aligned}(132)\quad \varphi(a)=&\frac{1}{2n+1}\varphi\left(\frac{a}{2n+1}\right)+\frac{1}{2n+1}\sum_{m=1}^{n}(-1)^m\left[\varphi\left(\frac{a+m\omega}{2n+1}\right)+\varphi\left(\frac{a-m\omega}{2n+1}\right)\right]\\&+\frac{1}{2n+1}\sum_{\mu=1}^{n}(-1)^\mu\left[\varphi\left(\frac{a+\mu\varpi i}{2n+1}\right)+\varphi\left(\frac{a-\mu\varpi i}{2n+1}\right)\right]\\&-\frac{i}{ec}\sum_{m=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{n}(-1)^{m+\mu}\,\psi(n-m,n-\mu)+\frac{i}{ec}\sum_{m=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{n}(-1)^{m+\mu}\,\psi_1(n-m,n-\mu),\end{aligned}$$

worin zur Abkürzung

$$(133)\quad\begin{cases}\psi(m,\mu)=\dfrac{1}{2n+1}\left\{\dfrac{1}{\varphi\left(\dfrac{a+(m+\frac{1}{2})\omega+(\mu+\frac{1}{2})\varpi i}{2n+1}\right)}+\dfrac{1}{\varphi\left(\dfrac{a-(m+\frac{1}{2})\omega-(\mu+\frac{1}{2})\varpi i}{2n+1}\right)}\right\},\\ \psi_1(m,\mu)=\dfrac{1}{2n+1}\left\{\dfrac{1}{\varphi\left(\dfrac{a+(m+\frac{1}{2})\omega-(\mu+\frac{1}{2})\varpi i}{2n+1}\right)}+\dfrac{1}{\varphi\left(\dfrac{a-(m+\frac{1}{2})\omega+(\mu+\frac{1}{2})\varpi i}{2n+1}\right)}\right\}\end{cases}$$

gesetzt ist.

---

[1]) S. 318.

[2]) Vergl. *Abel*, a. a. O. S. 272, Gleichungen (18).

[3]) Vergl. S. 324.

Die sämtlichen Glieder der Gleichung (132) sind vollkommen bestimmt und endlich, wenn a nicht in der Form

$$\left(m+\frac{1}{2}\right)\omega+\left(\mu+\frac{1}{2}\right)\varpi i$$

enthalten ist. Nun möge für a zunächst ein beliebiger, aber ganz im Endlichen gelegener Bereich gewählt sein, aus dem aber noch die etwa in seinem Innern oder auf seiner Grenze gelegenen Punkte $\left(m+\frac{1}{2}\right)\omega+\left(\mu+\frac{1}{2}\right)\varpi i$ jeder mit einem um ihn beschriebenen kleinen Kreis vom Radius δ herausgenommen werden sollen. Das so übrigbleibende Gebiet soll G heißen und im folgenden als durchaus fest vorgezeichnet betrachtet werden. Zur Vereinfachung nehmen wir an, der Bereich G sei zur reellen Achse symmetrisch.

Abel beweist nun zuerst, daß die Grenzwerte

$$\lim_{n=\infty}\left(\frac{1}{2n+1}\sum_{m=1}^{n}(-1)^m\left[\varphi\left(\frac{a+m\omega}{2n+1}\right)+\varphi\left(\frac{a-m\omega}{2n+1}\right)\right]\right)$$

und

$$\lim_{n=\infty}\left(\frac{1}{2n+1}\sum_{\mu=1}^{n}(-1)^\mu\left[\varphi\left(\frac{a+\mu\varpi i}{2n+1}\right)+\varphi\left(\frac{a-\mu\varpi i}{2n+1}\right)\right]\right)$$

beide gleich Null sind. Die betreffenden Werte konvergieren sogar gleichmäßig gegen Null für alle die in dem vorgezeichneten Gebiete G liegenden Werte a. Definiert man nämlich mit *Abel* zwei Größen A und B durch die aus dem Additionstheorem der Funktion $\varphi(a)$ hervorgegangenen Relationen

$$\varphi\left(\frac{a+m\omega}{2n+1}\right)+\varphi\left(\frac{a-m\omega}{2n+1}\right)=\frac{2\varphi\left(\frac{a}{2n+1}\right)f\left(\frac{m\omega}{2n+1}\right)F\left(\frac{m\omega}{2n+1}\right)}{1+e^2c^2\varphi^2\left(\frac{m\omega}{2n+1}\right)\varphi^2\left(\frac{a}{2n+1}\right)}=\frac{A}{2n+1}$$

und

$$\varphi\left(\frac{a+\mu\varpi i}{2n+1}\right)+\varphi\left(\frac{a-\mu\varpi i}{2n+1}\right)=\frac{2\varphi\left(\frac{a}{2n+1}\right)f\left(\frac{\mu\varpi i}{2n+1}\right)F\left(\frac{\mu\varpi i}{2n+1}\right)}{1+e^2c^2\varphi^2\left(\frac{\mu\varpi i}{2n+1}\right)\varphi^2\left(\frac{a}{2n+1}\right)}=\frac{B}{2n+1},$$

so läßt sich zeigen, daß für alle ganzen Zahlen n, die größer sind als eine gewisse Zahl N, die absoluten Werte von A und B kleiner sind als eine von n, a, m und μ unabhängige Konstante. Die ganzen Zahlen m und μ durchlaufen nämlich die Werte $1, 2, \ldots, n$; somit sind die Größen $\varphi\left(\frac{m\omega}{2n+1}\right)$, $f\left(\frac{m\omega}{2n+1}\right)$ und $F\left(\frac{m\omega}{2n+1}\right)$ dem absoluten Betrag nach nicht größer als die Maxima des absoluten Betrags von $\varphi(a)$, $f(a)$ und $F(a)$ im Intervall $0\cdots\frac{\omega}{2}$, für welches die drei Funktionen, auch an den Enden, endlich und stetig sind. Da nun durch passende Wahl einer unteren Grenze N für n der Wert von $\frac{a}{2n+1}$ für alle a des Bereichs G zugleich

so klein gemacht werden kann, als man will, so kommt der Nenner

$$1 + e^2 c^2 \varphi^2\left(\frac{m\omega}{2n+1}\right)\varphi^2\left(\frac{a}{2n+1}\right)$$

des ersten der obigen Brüche für ein hinreichend großes n der Einheit beliebig nahe. Denkt man sich noch den im Zähler stehenden Faktor

$$\varphi\left(\frac{a}{2n+1}\right)$$

nach Potenzen entwickelt, so erkennt man, daß in der Tat A unter einer von a, n und m unabhängigen Schranke gelegen ist. Ebenso liegt die durch den anderen Bruch definierte Größe B unter einer von a, n und μ unabhängigen Schranke, woraus dann hinsichtlich der beiden vorausgeschickten Grenzwerte das Behauptete unmittelbar folgt.

Abel erhält infolgedessen aus der Gleichung (132) die Relation

$$\varphi(a) = -\frac{i}{ec}\lim_{n=\infty}\left\{\sum_{m=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{n}(-1)^{m+\mu}\psi(n-m,\ n-\mu) - \sum_{m=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{n}(-1)^{m+\mu}\psi_1(n-m, n-\mu)\right\},$$

$$= -\frac{i}{ec}\lim_{n=\infty}\left\{\sum_{m=0}^{n-1}\sum_{\mu=0}^{n-1}(-1)^{m+\mu}\psi(m,\mu) - \sum_{m=0}^{n-1}\sum_{\mu=0}^{n-1}(-1)^{m+\mu}\psi_1(m,\mu)\right\}$$

oder auch

$$(134)\quad \varphi(a) = -\frac{i}{ec}\lim_{n=\infty}\sum_{m=0}^{n-1}\sum_{\mu=0}^{n-1}(-1)^{m+\mu}\psi(m,\mu) + \frac{i}{ec}\lim_{n=\infty}\sum_{m=0}^{n-1}\sum_{\mu=0}^{n-1}(-1)^{m+\mu}\psi_1(m,\mu),$$

vorausgesetzt, daß die beiden Grenzwerte einzeln endlich und bestimmt sind. Der zweite dieser Grenzwerte läßt sich auf den ersten zurückführen. Setzt man nämlich in der Funktion $\psi_1(m,\mu)$ statt a eine andere Variable a_1, die zu a konjugiert komplex ist, so ist der neue Wert von $\psi_1(m,\mu)$ konjugiert komplex zu demjenigen Wert, den die Funktion $\psi(m,\mu)$ mit dem Argument a hat. Es liegt aber dann a_1 in demselben Bereich G wie a, da dieser Bereich zur reellen Achse symmetrisch angenommen worden ist.

Es handelt sich nach dem eben Entwickelten nur noch um die Untersuchung des Grenzwertes der Summe

$$[2]\qquad \sum_{m=0}^{n-1}\sum_{\mu=0}^{n-1}(-1)^{m+\mu}\psi(m,\mu)\,.$$

Es ist zu zeigen, daß der Grenzwert endlich und bestimmt ist und mit der unendlichen Doppelsumme

$$[3]\qquad \sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\left(\sum_{\mu=0}^{\infty}(-1)^{\mu}\frac{2a}{a^2-[(m+\tfrac{1}{2})\omega+(\mu+\tfrac{1}{2})\varpi i]^2}\right)$$

übereinstimmt, deren einzelne Glieder durch den gliedweisen Grenzübergang in der vorigen Doppelsumme entstehen.

§ 3. Untersuchung der unendlichen Doppelsumme.

Die letzte Doppelreihe [3] erfordert bei der Behandlung einige Vorsicht, da sie, aufgefaßt als Summe über alle Wertepaare m, μ, nicht unbedingt konvergent ist. Dagegen konvergiert, wenn

$$[4]\quad \Theta(m,\mu) = \frac{1}{a + (m+\frac{1}{2})\omega + (\mu+\frac{1}{2})\varpi i} + \frac{1}{a - (m+\frac{1}{2})\omega - (\mu+\frac{1}{2})\varpi i} = \frac{2a}{a^2 - [(m+\frac{1}{2})\omega + (\mu+\frac{1}{2})\varpi i]^2}$$

gesetzt wird, die einfache Reihe

$$[4]\text{a}\qquad \sum_{\mu=0}^{\infty} (-1)^{\mu} \Theta(m,\mu)$$

unbedingt und auch gleichmäßig für alle Werte a des vorgezeichneten Bereiches G, wie leicht einzusehen ist und nachher auch noch ausgeführt werden wird. Um aber weiter die Frage nach der Konvergenz der Doppelreihe [3] zu entscheiden und zugleich den Wert der Summe

$$\sum_{\mu=n}^{\infty} (-1)^{\mu} \Theta(m,\mu)$$

für große Werte von n schätzen zu können, fassen wir je zwei aufeinanderfolgende Glieder der Reihe [4]a zusammen. Nun ist

$$[5]\qquad \Theta(m,\mu) - \Theta(m,\mu+1) = 2a\,\frac{2(\mu+1)\varpi^2 - (2m+1)\omega\varpi i}{(a^2 - [(m+\frac{1}{2})\omega + (\mu+\frac{1}{2})\varpi i]^2)(a^2 - [(m+\frac{1}{2})\omega + (\mu+\frac{3}{2})\varpi i]^2)} = \sigma_{m,\mu}.$$

Entwickelt man hierin Zähler und Nenner nach den einzelnen Dimensionen in m und μ, so ist das Aggregat der Glieder höchster Dimension des Nenners gleich

$$(m\omega + \mu\varpi i)^4.$$

Der absolute Betrag dieser Größe ist

$$(m^2\omega^2 + \mu^2\varpi^2)^2 = r^4,$$

wenn mit r die absolute Quadratwurzel

$$r = \sqrt{m^2\omega^2 + \mu^2\varpi^2}$$

bezeichnet wird. Bedeutet nun $\mathfrak{G}(m,\mu)$ irgendeines der anderen in m und μ homogenen Aggregate im Zähler oder Nenner des betrachteten Bruchs [5], so wird darin im allgemeinen noch die Variable a enthalten sein. Es wird aber der Absolutbetrag

$$|\mathfrak{G}(\eta,\zeta)|$$

ein bestimmtes Maximum M besitzen, wenn man η, ζ, a als Variable auffaßt, die nur an die Bedingungen geknüpft sind, daß a innerhalb oder auf der Grenze von G liegen, und daß η und ζ reell sein und der Relation

$$\eta^2\omega^2 + \zeta^2\varpi^2 = 1$$

genügen sollen. Wenn nun $\mathfrak{G}(m, \mu)$ in m und μ von der Dimension s ist, so muß die Relation

$$|\mathfrak{G}(m, \mu)| \leqq M r^s$$

für alle die genannten Werte von a und für alle Werte von m und μ giltig sein. Indem nun der Zähler des Bruchs [5] von der ersten Dimension ist, folgt aus dem Gesagten, daß man eine Konstante H so angeben kann, daß die Ungleichung

$$[6] \qquad |\sigma_{m,\mu}| \leqq H \frac{1}{r^3} = H \frac{1}{\left(\sqrt{m^2\omega^2 + \mu^2\varpi^2}\right)^3}$$

erfüllt ist, wofern nur der Wert r über einer gewissen Grenze gelegen ist. Da aber m und μ hier ganze Zahlen bedeuten, gehören zu den Werten von r, die kleiner sind als eine vorgegebene Zahl, nur gewisse Zahlenpaare m, μ in endlicher Anzahl. Hieraus ergibt sich auch, daß die Ungleichung [6], eventuell mit einem größeren Wert der Konstanten H, für alle Zahlenpaare m, μ (außer 0, 0) giltig ist. In derselben Weise erkennt man auch, daß (vgl. [4]) die Ungleichung

$$[7] \qquad |\Theta(m, \mu)| \leqq \frac{C}{m^2\omega^2 + \mu^2\varpi^2}$$

für alle a im Bereich G und auf seiner Grenze und für alle Zahlenpaare m, μ, mit Ausnahme von 0, 0, mit einer und derselben Konstanten C besteht.

Nun ist aber bekannt, daß die aus positiven Gliedern bestehende Reihe

$$[8] \qquad \sum_{m,\mu}{}' \frac{1}{\left(\sqrt{m^2\omega^2 + \mu^2\varpi^2}\right)^3},$$

in der bei der Summation nur das Zahlenpaar 0, 0 auszulassen ist, konvergiert, und daß die konvergente einfache Summe

$$[9] \qquad \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{1}{m^2\omega^2 + \mu^2\varpi^2} \qquad (m \neq 0)$$

mit unendlich wachsendem m unter jede Kleinheitsgrenze herabsinkt.

Faßt man jetzt in einer Partialsumme der Reihe [4]a je zwei aufeinanderfolgende Glieder zusammen, wobei dann im Falle einer ungeraden Gliederzahl ein Glied übrig bleibt, so erhält man (vgl. [5] und [7])

$$[10] \qquad \left|\sum_{\mu=0}^{2\nu+1} (-1)^\mu \Theta(m, \mu)\right| = \left|\sum_{\mu=0,\,2,\,4,\,\ldots,\,2\nu} \sigma_{m,\mu}\right| \leqq \sum_{\mu=0}^{\nu} |\sigma_{m,\,2\mu}|$$

und, falls m oder ν von Null verschieden ist,

$$[11] \qquad \left|\sum_{\mu=0}^{2\nu} (-1)^\mu \Theta(m, \mu)\right| \leqq \sum_{\mu=0}^{\nu-1} |\sigma_{m,2\mu}| + \frac{C}{m^2\omega^2 + 4\nu^2\omega^2},$$

aus welchen beiden Formeln auch folgt, daß

$$[12] \qquad \left|\sum_{\mu=0}^{\infty} (-1)^\mu \Theta(m, \mu)\right| \leqq \sum_{\mu=0}^{\infty} |\sigma_{m,2\mu}|$$

ist. In ähnlicher Weise ergibt sich auch noch, daß

$$[13] \qquad \left| \sum_{\mu=n}^{\infty} (-1)^{\mu} \Theta(m, \mu) \right| \leqq \sum_{\mu=0}^{\infty} |\sigma_{m, n+2\mu}|$$

sein muß.

Bedenkt man noch die Ungleichung [6] und die Konvergenz von [8] und [9], so erkennt man, daß nicht nur die rechte Seite von [12], sondern auch die Doppelsumme [3] und auch die in der folgenden Umrechnung auftretenden Summen konvergent sind. Es läßt sich die Summe [3] so zerlegen:

$$[14] \qquad \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \left(\sum_{\mu=0}^{\infty} (-1)^{\mu} \Theta(m, \mu) \right)$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \left(\sum_{\mu=0}^{n-1} (-1)^{\mu} \Theta(m, \mu) \right) + \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \left(\sum_{\mu=n}^{\infty} (-1)^{\mu} \Theta(m, \mu) \right)$$

$$= \sum_{m=0}^{n-1} (-1)^m \left(\sum_{\mu=0}^{n-1} (-1)^{\mu} \Theta(m, \mu) \right) + \sum_{m=n}^{\infty} (-1)^m \left(\sum_{\mu=0}^{n-1} (-1)^{\mu} \Theta(m, \mu) \right)$$

$$+ \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \left(\sum_{\mu=n}^{\infty} (-1)^{\mu} \Theta(m, \mu) \right).$$

Beachtet man nun neben den Ungleichungen [10], [11] und [13] noch die Tatsache, daß man aus der unbedingt konvergenten Summe [8] eine endliche Zahl von Gliedern so herausnehmen kann, daß die Summe aller übrigen beliebig klein ist, und den Umstand, daß die Summe [9] mit unendlich wachsendem m unter jede Zahlgrenze herabsinkt, so erkennt man, daß die beiden letzten Doppelsummen in dem obigen dreigliedrigen Ausdruck mit unendlich wachsendem n verschwinden. Es ergibt sich also aus der Gleichung [14], daß die Differenz

$$\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \left(\sum_{\mu=0}^{\infty} (-1)^{\mu} \Theta(m, \mu) \right) - \sum_{m=1}^{n-1} \sum_{\mu=1}^{n-1} (-1)^{m+\mu} \Theta(m, \mu)$$

zwischen der Doppelsumme [3] und der endlichen Doppelsumme, in der die Indizes m und μ nur von 0 bis $n-1$ laufen, für alle die Werte α des Bereichs G gleichmäßig gegen Null konvergiert, wenn die ganze Zahl n unendlich groß wird.

§ 4. Aufstellung dreier Hilfssätze.

Um nun zu beweisen, daß die Summe

$$\sum_{m=0}^{n-1} \sum_{\mu=0}^{n-1} (-1)^{m+\mu} \psi(m, \mu)$$

(vgl. die oben angeführten Gleichungen (133) von *Abel*) gegen den Wert der Summe [3], und zwar gleichmäßig, konvergiert, muß nach dem Vorhergehenden nur noch bewiesen werden, daß die Differenz

$$[15] \qquad \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{\mu=0}^{n-1} (-1)^{m+\mu} \{\psi(m, \mu) - \Theta(m, \mu)\}$$

für die genannten a gleichmäßig gegen Null konvergiert, wenn n unendlich groß wird.

Zunächst sollen hierzu einige Hilfssätze entwickelt werden. Ich setze zur Abkürzung [1])

$$[16] \qquad \tau = \frac{(m+\tfrac{1}{2})\,\omega + (\mu+\tfrac{1}{2})\,\varpi i}{2n+1} = \frac{w}{2n+1}.$$

In den in der Gleichung (134) von *Abel* vorkommenden Summen (s. o.), die dem ganzzahligen Wert n zugeordnet sind, durchlaufen m und μ die Werte $0, \ldots, n-1$, und es ist nachher die ganze Zahl n größer und größer zu machen. Hier ist die Erörterung bei *Abel* insofern nicht ausreichend, als er nur zwei Fälle ins Auge faßt: a) daß die oben mit τ bezeichnete Größe mit unendlich wachsendem n den Grenzwert Null, b) daß sie einen von Null verschiedenen Grenzwert bekommt.

Wir bedenken zunächst, daß τ, während m und μ die Zahlen $0, \ldots, n-1$ unabhängig von einander durchlaufen, stets innerhalb des Rechtecks zu liegen kommt, das in der Zahlenebene durch die vier Eckpunkte

$$[17] \qquad 0, \quad \frac{\omega}{2}, \quad \frac{\varpi}{2}\,i, \quad \frac{\omega+\varpi i}{2}$$

bestimmt ist. Dabei kommt aber τ, wenn n unendlich groß wird, für passend dazu gewählte Werte von m und μ den Grenzen des Rechtecks unendlich nahe. Insbesondere kommt es hier auf die Ecken 0 und $\frac{\omega+\varpi i}{2}$ an; im ersten dieser Punkte wird die Funktion $\varphi(a)$ unendlich klein, im zweiten werden die drei Funktionen $\varphi(a)$, $f(a)$ und $F(a)$ unendlich groß. Wir wollen nun um den Punkt 0 einen Kreis K mit Radius ε und um $\frac{\omega+\varpi i}{2}$ einen Kreis K_1 mit Radius ε_1 abgrenzen.

Die wichtigste Überlegung, die zur Vervollständigung des *Abel*schen Beweises dient, ist nun die, daß wir die einer Zahl n zugeordneten n^2 Zahlenpaare m, μ in *drei* Klassen einteilen. In die *erste* Klasse kommen diejenigen Zahlenpaare, für welche das zugehörige τ im Kreis K, in die *zweite* diejenigen, für die τ im Kreis K_1 gelegen ist, und in die *dritte* Klasse die übrigen. Diejenigen Zahlenpaare, für die τ auf der Peripherie von K oder K_1 liegt, sollen auch der dritten Klasse zugeteilt werden.

Demnach zerfallen auch die Glieder der Summe [15] in drei entsprechende Klassen, und es sollen die Summen aus den Gliedern der 1-ten, 2-ten, 3-ten Klasse beziehungsweise mit Σ, Σ_1, Σ_2 bezeichnet werden. Es lassen sich dann die folgenden Hilfssätze beweisen:

I. Die Summe Σ kann für alle im Bereich G gelegenen Werte a zugleich dadurch beliebig klein gemacht werden, daß ε hinreichend klein und die ganze Zahl n hinreichend groß gehalten wird.

II. Die Summe Σ_1 kann für alle genannten a dadurch hinreichend klein gemacht werden, daß ε_1 hinreichend klein und n hinreichend groß gehalten wird.

---

[1]) *Abel* bezeichnet den oben von mir mit w bezeichneten Wert mit ε_μ.

III. Hält man die Werte von ε und ε_1 fest, so kann man Σ_2 für alle genannten a zugleich beliebig klein machen, indem man n über einer passend großen Grenze hält.

Zunächst sind dabei wieder die rechnerischen Entwicklungen *Abels* zu benutzen. Er formt vermittelst der auf dem Additionstheorem der Funktion $\varphi(a)$ beruhenden Formel

$$\frac{1}{\varphi(\beta+\gamma)}+\frac{1}{\varphi(\beta-\gamma)}=\frac{\varphi(\beta+\gamma)+\varphi(\beta-\gamma)}{\varphi(\beta+\gamma)\cdot\varphi(\beta-\gamma)}=\frac{2\varphi(\beta)f(\gamma)F(\gamma)}{\varphi^2(\beta)-\varphi^2(\gamma)}$$

die Größe $\psi(m,\mu)$ (vgl. (133)) in den Ausdruck

$$[18]\qquad \psi(m,\mu)=\frac{1}{2n+1}\,\frac{2\varphi\left(\frac{a}{2n+1}\right)\vartheta(\tau)}{\varphi^2\left(\frac{a}{2n+1}\right)-\varphi^2(\tau)}$$

um [1]); hier ist zur Abkürzung

$$[19]\qquad \vartheta(\tau)=f(\tau)\cdot F(\tau)$$

gesetzt.

Wenn jetzt n eine gewisse Größe übersteigt, kann man sich wieder $\varphi\left(\frac{a}{2n+1}\right)$ nach Potenzen entwickelt denken, und man hat (vgl. [1])

$$\varphi\left(\frac{a}{2n+1}\right)=\frac{a}{2n+1}+\frac{Aa^3}{(2n+1)^3},$$

wobei man von der Größe A weiß, daß sie für alle in Betracht kommenden Werte von a und n unter einer angebbaren Grenze verbleibt. Indem man nun in [18] im Zähler für $\varphi\left(\frac{a}{2n+1}\right)$ den zuletzt angegebenen Ausdruck einsetzt und den Wert von $\Theta(m,\mu)$ bedenkt (vgl. [4]), ergibt sich

$$[20]\qquad \psi(m,\mu)-\Theta(m,\mu)$$
$$=\frac{2a}{(2n+1)^2}\left\{\frac{\vartheta(\tau)}{\varphi^2\left(\frac{a}{2n+1}\right)-\varphi^2(\tau)}-\frac{1}{\left(\frac{a}{2n+1}\right)^2-\tau^2}\right\}$$
$$+\frac{2Aa^3}{(2n+1)^4}\,\frac{\vartheta(\tau)}{\varphi^2\left(\frac{a}{2n+1}\right)-\varphi^2(\tau)}.$$

§ 5. Beweis des Hilfssatzes I.

Um nun zu dem Beweis des mit I bezeichneten Satzes zu gelangen, betrachte ich jetzt den Fall, daß auch die Größe $\tau=\frac{w}{2n+1}$ unter einer passenden Grenze

[1]) Vergl. a. a. O. S. 326; *Abel* benutzt nicht das Zeichen $\vartheta(\tau)$, sondern $\Theta(\tau)$.

liegt, so daß $\varphi^2(\tau)$ und $\vartheta(\tau)$ nach Potenzen von τ entwickelt werden können. Es ist dann nach Gleichung [1] und [19] und nach den Definitionen der Funktionen $f(a)$ und $F(a)$ (vgl. § 1)

$$\varphi^2(\tau) = \tau^2 + B\tau^4,$$
$$\vartheta(\tau) = 1 + C\tau^2$$

und außerdem

$$\varphi^2\left(\frac{a}{2n+1}\right) = \frac{a^2}{(2n+1)^2} + \frac{D\,a^4}{(2n+1)^4},$$

wo die von τ abhängigen Größen B und C, sowie die von $\frac{a}{2n+1}$ abhängige Größe D für alle in Betracht kommenden Werte von a, n und τ absolut unter einer festen Schranke gelegen sind. Dadurch, daß man diese Entwicklungen in [20] einsetzt, erhält man Glied für Glied

$$[21] \quad \psi(m,\mu) - \Theta(m,\mu) = \frac{2a}{(2n+1)^2} \frac{C\frac{a^2}{w^2} - D\frac{a^4}{w^4} - C + B}{\left(1-\frac{a^2}{w^2}\right)^2 - \left(1-\frac{a^2}{w^2}\right)\tau^2\left(D\frac{a^4}{w^4} - B\right)}$$
$$+ \frac{2Aa^3}{(2n+1)^2} \frac{\frac{1}{w^2} + \frac{C}{(2n+1)^2}}{\left(\frac{a^2}{w^2}-1\right) + \tau^2\left(D\frac{a^4}{w^4} - B\right)};$$

diese Formel stellt die Formel (139) von *Abel* vor mit dem einzigen Unterschied, daß hier mit $\frac{2a}{(2n+1)^2}$ multipliziert ist, und daß w steht statt ε_μ und τ für $\frac{w}{2n+1}$.

Nun ist aber (vgl. [16])

$$w = \left(m + \frac{1}{2}\right)\omega + \left(\mu + \frac{1}{2}\right)\varpi i,$$

worin die ganzen Zahlen m und μ von 0 bis $n-1$ laufen; es sind also alle in Betracht kommenden Zahlen w absolut nicht kleiner als der von Null verschiedene Wert

$$\frac{1}{2}\sqrt{\omega^2 + \varpi^2}.$$

Hieraus ergibt sich, daß in den auf der rechten Seite von [21] stehenden großen Brüchen in den Zählern und Nennern alle Teile unter einer festen Zahlgrenze gelegen sind. Um aber zugleich zu bewirken, daß die in den Nennern der genannten Brüche stehenden Vorderglieder

$$\left(1-\frac{a^2}{w^2}\right)^2, \qquad \frac{a^2}{w^2} - 1$$

absolut *über* einer angebbaren von Null verschiedenen Grenze verbleiben, nehme ich W so an, daß für alle a des Bereichs G und für alle w, die absolut größer sind als W, der absolute Betrag von

$$1 - \frac{a^2}{w^2}$$

über einer von Null verschiedenen Grenze verbleibt (diese Grenze könnte beliebig nahe an 1 gebracht werden). Wenn ich mich jetzt für den Augenblick auf die Wertepaare m, μ beschränke, für welche

$$|w| > W$$

ist, d. h. aus der hier betrachteten ersten Klasse von Gliedern

$$(-1)^{m+\mu} \{\psi(m, \mu) - \Theta(m, \mu)\}$$

der Summe [15] zunächst eine *endliche* Zahl außer Betracht lasse, kann ich dadurch, daß ich τ eventuell nunmehr unter einer noch kleineren Grenze τ_0 als der vorhin angenommenen halte, erreichen, daß in den erwähnten beiden Brüchen die Nenner von ihren Vordergliedern beliebig wenig verschieden, also auch im Absolutwert *über* einer angebbaren Grenze verbleiben. Nun ergibt sich aber aus [21] für die Wertepaare, auf deren Betrachtung wir uns jetzt beschränken, für $|\tau| < \tau_0$ und für ein hinreichend großes n, daß

$$[22] \qquad |\psi(m, \mu) - \Theta(m, \mu)| < \frac{E}{(2n+1)^2}$$

bleibt, wobei unter E eine feste Schranke verstanden werden soll.

Der Radius ε des oben um den Nullpunkt beschriebenen Kreises K soll nun jedenfalls kleiner als τ_0 sein, so daß also dann, wenn n einen gewissen Wert übersteigt, die Ungleichung [22] für alle Wertepaare m, μ der oben konstruierten ersten Klasse, abgesehen von einer endlichen Anzahl, giltig ist. Diese zunächst nicht betrachteten Wertepaare von endlicher Anzahl sind diejenigen, für die

$$|w| \leqq W$$

ist.

Die letzte Bedingung ist von n und ε unabhängig. Die zunächst ausgeschlossen Wertepaare m, μ bleiben also genau dieselben, wenn nachher ε kleiner und kleiner wird, oder wenn n sich ändert, in welchen Fällen allerdings die Gesamtheit der zur ersten Klasse gehörenden Wertepaare eine andere wird. Bedeutet nun Σ_0 die Summe aus denjenigen Gliedern von [15], die der ersten Klasse angehören und denen ein Wert w entspricht, der absolut größer als W ist, und bedeutet $\varkappa(\varepsilon)$ die Anzahl *aller* Wertepaare m, μ, die zur ersten Klasse gehören, so ist

$$[23] \qquad |\Sigma_0| \leqq \frac{\varkappa(\varepsilon) \,.\, E}{(2n+1)^2},$$

falls auch n so groß ist, daß wir der Ungleichung [22] sicher sind.

Nun liegen die den $\varkappa(\varepsilon)$ Zahlenpaaren m, μ der ersten Klasse entsprechenden Punkte τ in dem um den Nullpunkt der Zahlenebene mit dem Radius ε beschriebenen Kreis K und zwar in demjenigen Viertel dieses Kreises, welches in das durch die Punkte [17] bestimmte Rechteck hereinragt; im Rechteck selbst liegen n^2 Punkte τ. Da ferner die Werte τ ein sogenanntes Zahlengitter bilden, dessen Felder mit dem

unendlichen Anwachsen von n unendlich klein werden, so kann man das Verhältnis $\varkappa(\varepsilon) : n^2$ der Anzahlen der in die Flächen fallenden Punkte, *wenn ε als vorgegeben angesehen wird*, durch passende Vergrößerung der Zahl n so nahe, als man will, an das Verhältnis zwischen der Viertelkreisfläche und der Rechtecksfläche, d. h. an den Wert

$$\frac{\pi}{4}\varepsilon^2 : \frac{\omega\varpi}{4}$$

heranbringen.

Jetzt wähle man zunächst eine Größe δ so klein, als man will, dann ein ε_0 so, daß das vorige Flächenverhältnis

$$\frac{\pi\varepsilon_0^2}{\omega\varpi} < \delta$$

ist. Nunmehr kann man zu diesem ε_0 ein N so finden, daß für alle $n > N$ auch noch das Anzahlenverhältnis

$$\frac{\varkappa(\varepsilon_0)}{n^2} < \delta$$

ist. Man hat jetzt zu bedenken, daß $\varkappa(\varepsilon)$ verkleinert [1]) wird, wenn bei gleichbleibendem n der Radius ε des Kreises K verkleinert wird; es wird deshalb stets die Ungleichung

$$\varkappa(\varepsilon) < n^2\delta$$

giltig sein, wenn

$$n > N\,, \qquad \varepsilon \leqq \varepsilon_0\,.$$

Wenn nun nötigenfalls N noch größer genommen wird, kann [23] angewendet werden, und es ergibt sich

$$|\Sigma_0| \leqq \frac{n^2 E\delta}{(2n+1)^2} < \frac{E\delta}{4}\,.$$

Nun war die Summe Σ_0 aus Σ dadurch entstanden, daß aus der letzten Summe eine endliche Anzahl von Gliedern der Form

$$(-1)^{m+\mu}\{\psi(m,\mu) - \Theta(m,\mu)\}$$

oder (vgl. (133) und [4])

$$(-1)^{m+\mu}\left\{\frac{1}{(2n+1)\,\varphi\left(\frac{a+(m+\frac{1}{2})\omega+(\mu+\frac{1}{2})\varpi i}{2n+1}\right)} - \frac{1}{a+(m+\frac{1}{2})\omega+(\mu+\frac{1}{2})\varpi i}\right.$$
$$\left. + \frac{1}{(2n+1)\,\varphi\left(\frac{a-(m+\frac{1}{2})\omega-(\mu+\frac{1}{2})\varpi i}{2n+1}\right)} - \frac{1}{a-(m+\frac{1}{2})\omega-(\mu+\frac{1}{2})\varpi i}\right\}$$

weggelassen worden sind. Jedes einzelne dieser Glieder nähert sich gleichmäßig für alle Werte a des vorgezeichneten Bereichs G mit unendlich wachsendem n der Null. Es ist jetzt ersichtlich, daß Σ für alle die genannten a der Null dadurch beliebig nahe gebracht werden kann, daß man ε unter einer passend kleinen und n über einer passend großen Grenze hält, womit der Hilfssatz I bewiesen ist.

[1]) oder wenigstens nicht vergrößert.

§ 6. Beweis des Hilfssatzes II.

Der Beweis des Hilfssatzes II macht weit weniger Schwierigkeiten. Befindet sich τ in unendlicher Nähe des Punktes $\frac{\omega + \varpi i}{2}$, so sind die Größen $\vartheta(\tau)$ und $\varphi^2(\tau)$ beide unendlich groß, und es ist ihr Quotient unendlich wenig von einem endlichen, bestimmten Wert verschieden, der nicht gleich Null ist, da jene Größen beide von der 2. Ordnung unendlich groß werden (vgl. [19] und § 1). Ist nun $\frac{\omega + \varpi i}{2} - \tau$ genügend klein, und die ganze Zahl n genügend groß, so ist aus Formel [20] sofort zu ersehen, daß der absolute Betrag der Größe

$$(2n + 1)^2 \{\psi(m, \mu) - \Theta(m, \mu)\}$$

unter einer festen Schranke verbleibt, so daß also bei hinreichend kleinem Radius ε_1 des um den Punkt $\frac{\omega + \varpi i}{2}$ beschriebenen Kreises K_1 für die Zahlenpaare m, μ der in § 4 beschriebenen zweiten Klasse, falls noch n hinreichend groß ist, die Ungleichung

$$|\psi(m, \mu) - \Theta(m, \mu)| < \frac{L}{(2n + 1)^2}$$

gelten muß. L bedeutet hier eine positive Konstante. Bezeichnet nun $\varkappa_1(\varepsilon_1)$ die Anzahl der zu der genannten Klasse gehörenden Zahlenpaare, so ergibt sich für die Summe Σ_1 der entsprechenden Glieder von [15] die Relation

$$|\Sigma_1| < L \frac{\varkappa_1(\varepsilon_1)}{(2n + 1)^2}.$$

Es kann jetzt entsprechend den Überlegungen des vorigen Paragraphen eingesehen werden, daß Σ_1 für alle α des Bereichs G dadurch unter jede Zahlgrenze herabgedrückt werden kann, daß man ε_1 hinreichend klein und n hinreichend groß sein läßt. Damit ist der Hilfssatz II bewiesen.

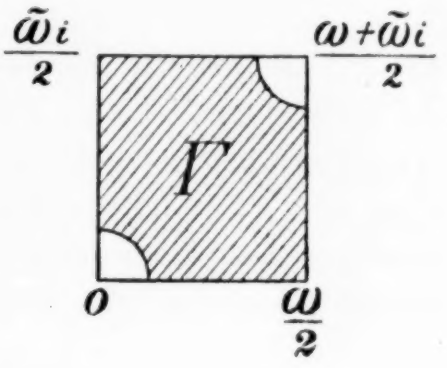
§ 7. Hilfssatz III. Zurückführung auf eine spezielle Summe.

Es ist nun noch der Hilfssatz III zu beweisen. In diesem Falle werden die Radien ε und ε_1 festgehalten, und τ liegt außerhalb der mit diesen Radien beschriebenen Kreise K und K_1 in dem durch die Eckpunkte [17]

$$0, \quad \frac{\omega}{2}, \quad \frac{\varpi}{2} i, \quad \frac{\omega + \varpi i}{2}$$

bestimmten Rechteck. In dieses Rechteck fällt von jedem der genannten Kreise, die um 0 und um $\frac{\omega + \varpi i}{2}$ beschrieben worden sind, der vierte Teil, und das Gebiet, das aus dem Rechteck durch Wegnahme dieser Viertelskreise entsteht, soll Γ heißen (vgl. d. Fig.).

In diesem Gebiet, dem auch seine Grenze noch zugerechnet wird, haben die Absolutwerte $|\tau|$, $|\varphi(\tau)|$, $|\vartheta(\tau)|$ (vgl. [19] u. § 1) je ein bestimmtes endliches Maximum. Die Größen τ und $\varphi(\tau)$ haben aber in Γ auch je ein bestimmtes, *von Null verschiedenes* Minimum des absoluten Betrages. Man ersieht daher aus Formel [20], daß sich der Ausdruck



$$(2n+1)^2\{\psi(m,\mu) - \Theta(m,\mu)\}$$

beliebig wenig von

$$2a\left\{-\frac{\vartheta(\tau)}{\varphi^2(\tau)} + \frac{1}{\tau^2}\right\}$$

unterscheidet, wenn jetzt die Zahl n noch hinreichend groß angenommen wird, so daß die Größen

$$\frac{a}{2n+1}, \qquad \varphi\left(\frac{a}{2n+1}\right)$$

für alle Werte von a des Bereichs G im absoluten Betrag hinreichend klein sind.

Die Zahlenpaare m, μ, um die es sich hier handelt, sind diejenigen, für welche das zugehörige

$$\tau = \frac{(m+\frac{1}{2})\omega + (\mu+\frac{1}{2})\varpi i}{2n+1}$$

(vgl. [16]), im Gebiet Γ liegt. Die Anzahl dieser Zahlenpaare ist jedenfalls nicht größer als n^2, da ja in dem ganzen obigen Rechteck gerade n^2 Werte τ gelegen sind. Nun ist aber ersichtlich, daß der Unterschied zwischen den Summen

$$\overline{\sum_{m,\mu}}(-1)^{m+\mu}\{\psi(m,\mu) - \Theta(m,\mu)\} = \sum\nolimits_2$$

(vgl. § 4) und

[24] $$\overline{\sum_{m,\mu}}\frac{2a(-1)^{m+\mu}}{(2n+1)^2}\left\{-\frac{\vartheta(\tau)}{\varphi^2(\tau)} + \frac{1}{\tau^2}\right\}$$

für alle a des Bereichs G zugleich dadurch unter eine beliebig kleine Grenze herabgedrückt werden kann, daß N hinreichend groß gewählt und $n > N$ gehalten wird. Bei dieser Betrachtung muß man sich ε und ε_1 festgehalten denken, damit das Gebiet Γ und die in demselben festgestellten Extremalwerte konstant sind. In den beiden letzten Summen ist über die Zahlenpaare m, μ der dritten Klasse zu summieren, was durch den über das Summenzeichen gesetzten Strich ausgedrückt werden soll.

§ 8. Untersuchung der speziellen Summe.

Damit ist nun die Untersuchung der Größe Σ_2 auf die Untersuchung der Summe

[25] $$\overline{\sum_{m,\mu}}(-1)^{m+\mu}\left\{-\frac{\vartheta(\tau)}{\varphi^2(\tau)} + \frac{1}{\tau^2}\right\}$$

zurückgeführt, welche das Argument a gar nicht mehr enthält.

Es ist aber die Funktion

$$-\frac{\vartheta(\zeta)}{\varphi^2(\zeta)}+\frac{1}{\zeta^2}=\lambda(\zeta)$$

analytisch und für das Gebiet Γ und seine Grenze regulär. Somit besitzt sowohl $\lambda(\zeta)$ als auch $\lambda'(\zeta)$ für das Gebiet Γ (dem die Grenze zugerechnet wird) ein Maximum des absoluten Betrags. Diese Maxima sollen mit P und Q bezeichnet werden. Sind also ζ_1 und ζ_2 zwei Punkte des Gebiets Γ, und fällt auch die geradlinige Verbindungsstrecke dieser beiden Punkte in der komplexen Zahlenebene ganz in das Gebiet Γ, so muß die Ungleichung

$$|\lambda(\zeta_1)-\lambda(\zeta_2)|\leqq|\zeta_1-\zeta_2|Q$$

bestehen.

Nun sollen in der Summe [25] diejenigen Glieder zusammengenommen werden, für die m einen und denselben Wert hat, d. h. für welche die zugehörigen Größen τ, geometrisch repräsentiert, auf einer Parallelen zur Ordinatenachse gelegen sind. In der obigen, das Gebiet Γ darstellenden Figur ist die Ordinatenachse vertikal gedacht. Aus der Gestalt jenes Gebietes geht aber hervor, daß, wenn zwei Punkte τ des Bereichs auf derselben Vertikalen liegen, auch die sie verbindende geradlinige Strecke dem Bereich Γ angehören muß. Der Abstand von zwei Punkten τ_1 und τ_2, die auf derselben Vertikalen gelegen sind *und hier auf einander folgen*, ist

$$\frac{\varpi}{2n+1},$$

weshalb

$$|\lambda(\tau_2)-\lambda(\tau_1)|\leqq\frac{\varpi}{2n+1}Q$$

sein muß. Indem nun, wie schon bemerkt, diejenigen Glieder der Summe [25] zusammengenommen werden, in denen die Zahl m denselben Wert hat, und für zwei aufeinanderfolgende solche Glieder, für welche die ganze Zahl μ zwei aufeinanderfolgende Werte annimmt, die Vorzeichen $(-1)^{m+\mu}$ verschieden sind, ergibt sich die Summe eines solchen Gliederpaares nicht größer als

$$\frac{\varpi}{2n+1}Q.$$

Dabei aber können sich höchstens $\frac{n}{2}$ solcher Gliederpaare ergeben, da in der Formel für τ die Zahl μ nur von 0 bis $n-1$ läuft; auch bleibt höchstens *ein* ungepaartes Glied übrig, dessen Absolutbetrag sicher nicht größer als P ist. Die Summe jener zusammengenommenen Glieder, mit demselben m, ist also nicht größer als

$$\frac{\varpi}{2n+1}Q\cdot\frac{n}{2}+P.$$

Da nun auch m von 0 bis $n-1$ läuft, kommen nicht mehr als n Werte von m, also im Ganzen nicht mehr als n Kategorien von solchen zusammengefaßten Gliedern vor, so daß die Summe [25] nicht größer als

$$\frac{n^2 \varpi Q}{2(2n+1)} + n P$$

sein kann. Die Summe [24] ergibt sich aus [25] durch Multiplizieren mit $\frac{2a}{(2n+1)^2}$. Infolgedessen kann man, nachdem die Radien ε und ε_1 festgelegt worden sind, für alle a des Bereichs G zugleich eine untere Grenze N für die ganze Zahl n so finden, daß für $n > N$ die Summe [24] einen beliebig gewünschten Kleinheitsgrad nicht übersteigt. Damit ist aber der Hilfssatz III bewiesen.

§ 9. Begründung des Grenzübergangs.

Die Begründung des Grenzübergangs von der endlichen Summe [2]

$$\sum_{m=0}^{n-1} \sum_{\mu=0}^{n-1} (-1)^{m+\mu} \psi(m, \mu)$$

zu der unendlichen Doppelsumme [3]

$$\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \left(\sum_{\mu=0}^{\infty} (-1)^{\mu} \frac{2a}{a^2 - [(m+\frac{1}{2})\omega + (\mu+\frac{1}{2})\varpi i]^2} \right)$$

ist nun ohne weiteres durchzuführen. Es ist bereits gezeigt worden (§ 3 und § 4), daß es zu diesem Zweck nur nötig ist, zu beweisen, daß die Summe [15]

$$\sum_{m=0}^{n-1} \sum_{\mu=0}^{n-1} (-1)^{m+\mu} \{\psi(m, \mu) - \Theta(m, \mu)\}$$

mit unendlich wachsendem n gegen Null konvergiert. Wir haben aber schon in § 4 die Summe [15] in

$$\Sigma + \Sigma_1 + \Sigma_2$$

gespalten, wobei sich die Verteilung der Indexpaare m, μ auf die drei Teile noch nach den Radien ε und ε_1 der um die Punkte 0 und $\frac{\omega + \varpi i}{2}$ beschriebenen Kreise K und K_1 richtete. Nach Hilfssatz I kann man nun ε unter einer passenden Grenze und n über einer passenden Grenze N so halten, daß der Absolutbetrag von Σ kleiner als $\frac{\delta}{3}$ ist, wenn vorher δ beliebig klein gewählt war. Ebenso kann man nach Hilfssatz II für ε_1 eine obere Grenze und für n eine untere Grenze N_1 so festsetzen, daß auch der Absolutbetrag von Σ_1 kleiner ist als $\frac{\delta}{3}$. Denkt man sich aber jetzt ε und ε_1, den vorigen Bedingungen gemäß, festgemacht, so kann man zu diesen Größen eine entsprechende Grenze N_2 so finden, daß für $n > N_2$

$$|\Sigma_2| < \frac{\delta}{3}$$

ist. Offenbar ist dann auch der Absolutbetrag der Summe [15], der nicht größer

sein kann als die Summe der Absolutbeträge der drei Teile, kleiner als δ, wenn die Zahl n größer ist als der größte der drei Werte N, N_1 und N_2, und zwar gilt dies gleichzeitig für alle Werte a des Bereichs G, wie aus der Formulierung der Hilfssätze in § 4 ersichtlich ist.

Ganz in derselben Weise geht mit unendlich wachsendem n die der Summe [2] konjugiert komplexe Summe in die der Summe [3] konjugierte unendliche Doppelsumme über (§ 2), und es ergibt sich jetzt im Hinblick auf die Gleichung (134) von *Abel* (s. o. am Schluß von § 2)

$$\varphi(a) = -\frac{i}{ec}\sum_{m=0}^{\infty}\left\{(-1)^m \sum_{\mu=0}^{\infty}(-1)^{\mu}\frac{2a}{a^2-[(m+\frac{1}{2})\,\omega+(\mu+\frac{1}{2})\,\varpi i]^2}\right\}$$
$$+\frac{i}{ec}\sum_{m=0}^{\infty}\left\{(-1)^m \sum_{\mu=0}^{\infty}(-1)^{\mu}\frac{2a}{a^2-[(m+\frac{1}{2})\,\omega-(\mu+\frac{1}{2})\,\varpi i]^2}\right\}.$$

Selbstverständlich ergeben sich die Summen für die Funktionen $f(a)$ und $F(a)$ durch ganz entsprechende Überlegungen.

Es mag nur noch erwähnt werden, daß auch der Grenzübergang, der bei *Abel* die Entwicklung der elliptischen Funktionen in unendliche Produkte ergibt [1]), durch dieselbe Einteilung der Indexpaare m, μ des endlichen Doppelprodukts in drei Klassen, die hier in § 4 für die Doppelsumme angegeben worden ist, streng begründet werden kann.

[1]) Werke, 2. Aufl., Bd. 1, S. 335 ff.

Eine hinreichende Bedingung für schlichte Abbildungen des Einheitskreises.

Von *Ludwig Bieberbach* in Berlin.

Satz 1. $f(z) = z + a_2 z^2 + \cdots$ sei in $|z| \leqq \varrho$ bis auf Pole regulär. Es sei $\varrho > 1$. Es sei $f(z) \neq 0$ für $z \neq 0$ in $|z| \leqq \varrho$. Dann gibt es ein $m(\varrho)$ derart, daß aus

$$|f(z)| > m(\varrho) \quad \text{auf} \quad |z| = \varrho$$

folgt, daß $f(z)$ den $|z| < 1$ schlicht abbildet, d. h. daß

$$\frac{f(z_1) - f(z_2)}{z_1 - z_2} \neq 0$$

ist für $|z_1| < 1$ und $|z_2| < 1$. Man kann

$$m(\varrho) = \frac{\varrho}{\sqrt{1 + (\varrho - 1)^4}}$$

nehmen.

Beweis: $\varphi(z) = \dfrac{1}{f(z)}$ ist in $0 < |z| \leqq \varrho$ regulär und besitzt bei $z = 0$ einen einfachen Pol vom Residuum Eins. Daher ist nach dem *Cauchy*schen Integralsatz

$$\varphi(z) = \frac{1}{z} + \frac{1}{2\pi i} \int \frac{\zeta\, \varphi(\zeta) - 1}{\zeta(\zeta - z)}\, d\zeta\,,$$

wenn $|z| < 1$ genommen und das Integral im positiven Sinn über den Kreis $|\zeta| = \varrho$ erstreckt wird. Daher ist

$$\frac{\varphi(z_1) - \varphi(z_2)}{z_1 - z_2} = -\frac{1}{z_1 z_2} + \frac{1}{2\pi i} \int \frac{\zeta\, \varphi(\zeta) - 1}{\zeta(\zeta - z)(\zeta - z_2)}\, d\zeta\,.$$

Darum wird durch $\varphi(z)$ und daher auch durch $f(z)$ der $|z| < 1$ schlicht abgebildet, sobald

$$(1) \qquad \left| \frac{z_1 z_2}{2\pi i} \int \frac{\zeta\, \varphi(\zeta) - 1}{\zeta(\zeta - z_1)(\zeta - z_2)}\, d\zeta \right| < 1$$

bleibt für alle $|z_1| < 1$ und alle $|z_2| < 1$.

Nun ist

$$\left|\frac{z_1 z_2}{2\pi i}\int\frac{\mathfrak{z}\,\varphi(\mathfrak{z})-1}{\mathfrak{z}(\mathfrak{z}-z_1)(\mathfrak{z}-z_2)}\,d\mathfrak{z}\right| \leqq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{|\mathfrak{z}\,\varphi(\mathfrak{z})-1|}{|\mathfrak{z}-z_1|\,|\mathfrak{z}-z_2|}\,d\vartheta$$

$$\leqq \frac{1}{2\pi}\sqrt{\int_0^{2\pi}|\mathfrak{z}\,\varphi(\mathfrak{z})-1|^2\,d\vartheta\int_0^{2\pi}\frac{d\vartheta}{|\mathfrak{z}-z_1|^2|\mathfrak{z}-z_2|^2}}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sqrt{\int_0^{2\pi}\{|\mathfrak{z}\,\varphi(\mathfrak{z})|^2-1\}\,d\vartheta\int_0^{2\pi}\frac{d\vartheta}{|\mathfrak{z}-z_1|^2|\mathfrak{z}-z_2|^2}}$$

$$\leqq \frac{1}{2\pi}\sqrt{2\pi(\varrho^2 M^2(\varrho)-1)\int_0^{2\pi}\frac{d\vartheta}{|\mathfrak{z}-z_1|^2|\mathfrak{z}-z_2|^2}},$$

wenn $|\varphi(z)| < M(\varrho)$ auf $|z| = \varrho$ ist.

Weiter ist

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\vartheta}{|\mathfrak{z}-z_1|^2|\mathfrak{z}-z_2|^2} \leqq \frac{2\pi}{(\varrho-1)^4}. \tag{2}$$

Daher ist

$$\left|\frac{z_1 z_2}{2\pi i}\int\frac{\mathfrak{z}\,\varphi(\mathfrak{z})-1}{\mathfrak{z}(\mathfrak{z}-z_1)(\mathfrak{z}-z_2)}\,d\mathfrak{z}\right| < \sqrt{(\varrho^2 M^2(\varrho)-1)\,\frac{1}{(\varrho-1)^4}}.$$

Daher gilt (1) sicher dann, wenn

$$M(\varrho) < \frac{\sqrt{1+(\varrho-1)^4}}{\varrho}$$

ist. Damit ist Satz 1 bewiesen.

Satz 1′. Satz 1 bleibt richtig, wenn man

$$m(\varrho) = \frac{\varrho}{\sqrt{1+\dfrac{(\varrho^2-1)^3}{\varrho^2+1}}}$$

nimmt.

Der Beweis von Satz 1′ beruht auf einer Verschärfung der Abschätzung (2). Es ist nämlich

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{d\vartheta}{|\mathfrak{z}-z_1|^2|\mathfrak{z}-z_2|^2}$$

$$= \frac{1}{(\varrho^2-r_1^2)(\varrho^2-r_2^2)}\,\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{d\vartheta\,(\varrho^2-r_1^2)(\varrho^2-r_2^2)}{[\varrho^2+r_1^2-2\varrho r_1\cos(\vartheta-\vartheta_1)]\,[\varrho^2+r_2^2-2\varrho r_2\cos(\vartheta-\vartheta_2)]},$$

wenn man

$$\mathfrak{z} = \varrho e^{i\vartheta},\quad z_1 = r_1 e^{i\vartheta_1},\quad z_2 = r_2 e^{i\vartheta_2}$$

setzt. Nun aber ist nach dem *Poisson*schen Integralsatz

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{d\vartheta(\varrho^2-r_1^2)(\varrho^2-r_2^2)}{[\varrho^2+r_1^2-2\varrho r_1\cos(\vartheta-\vartheta_1)]\,[\varrho^2+r_2^2-2\varrho r_2\cos(\vartheta-\vartheta_2)]}$$

diejenige in $|z_2| \leqq \varrho$ reguläre Potentialfunktion von z_2, welche auf $|z_2| = \varrho$ die Werte

$$\frac{\varrho^2-r_1^2}{\varrho^2+r_1^2-2\varrho r_1\cos(\vartheta-\vartheta_1)} = \Re\,\frac{\mathfrak{z}+z_1}{\mathfrak{z}-z_1}$$

hat. Diese ist aber

$$\Re\left(1+2\frac{z_2\bar{z}_1}{\varrho^2-\bar{z}_1 z_2}\right).$$

Dieser Realteil wird nämlich

$$\frac{\varrho^4-r_1^2r_2^2}{\varrho^4+r_1^2r_2^2-2\varrho^2 r_1 r_2\cos(\vartheta_2-\vartheta_1)}. \tag{3}$$

Daher wird

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{d\vartheta}{|\zeta-z_1|^2|\zeta-z_2|^2}=\frac{\varrho^4-r_1^2r_2^2}{\{(\varrho^4+r_1^2r_2^2-2\varrho^2r_1r_2\cos(\vartheta_2-\vartheta_1)\}(\varrho^2-r_1^2))(\varrho^2-r_2^2)}$$
$$<\frac{\varrho^4-1}{(\varrho^2-1)^4}=\frac{\varrho^2+1}{(\varrho^2-1)^3}$$

für $|z_1|<1$ und $|z_2|<1$. Diese Abschätzung beruht darauf, daß (3) eine Potentialfunktion von z_2 sowohl wie von z_1 ist, die das Maximum ihrer Werte am Rande von $|z_1|\leqq 1$, $|z_2|\leqq 1$ annimmt. Damit ist Satz 1′ bewiesen.

Die in den Sätzen 1 und 1′ ausgesprochene hinreichende Bedingung für schlichte Abbildungen des $|z|<1$ ist eine Verschärfung einer naheliegenden notwendigen Bedingung für schlichte Abbildung des Einheitskreises. Es gilt nämlich der folgende

Satz 2: Es sei $f(z)$ in $|z|\leqq\varrho$ regulär ($\varrho>1$), $f(0)=0$, $f'(0)=1$, $|f(z)|\leqq M(\varrho)$. Soll dann $f(z)$ in $|z|<1$ schlicht sein, so gibt es ein $R>1$, derart daß $\frac{f(z)}{z}\neq 0$ ist in $|z|<R$.

Beweis. Es ist

$$\frac{f(z_1)-f(z_2)}{z_1-z_2}=\frac{1}{2\pi i}\int\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-z_1)(\zeta-z_2)}.$$

Dabei sei $|z_1|<\varrho$, $|z_2|<\varrho$, und das Integral werde über $|\zeta|=\varrho$ erstreckt. Daher ist

$$\left|\frac{f(z_1)-f(z_2)}{z_1-z_2}\right|<\frac{M\varrho}{(\varrho-|z_1|)(\varrho-|z_2|)}.$$

Nun wähle ich $|z_1|=1$, $|z_2|=R$ und $\arg z_1=\arg z_2$. Dann wird

$$|f(z_1)-f(z_2)|<\frac{M\varrho(R-1)}{(\varrho-R)(\varrho-1)}.$$

Da nun nach einem bekannten Satz $w=f(z)$ in $|z|<1$ jeden Wert $|w|<\frac{1}{4}$ einmal annimmt, so wird $|z|<1$ gewiß dann *nicht* schlicht abgebildet, wenn

$$\frac{M\varrho(R-1)}{(\varrho-R)(\varrho-1)}<\frac{1}{4}\quad\text{und}\quad f(z_2)=0$$

ist. Daher muß für den absoluten Betrag R einer jeden Nullstelle von $f(z)$

$$\frac{M\varrho(R-1)}{(\varrho-R)(\varrho-1)}\geqq\frac{1}{4}$$

sein. D. h.

$$R\geqq\frac{M\varrho+\frac{1}{4}\varrho^2-\frac{1}{4}\varrho}{M\varrho+\frac{1}{4}\varrho-\frac{1}{4}}.$$

D. h. also, der Ring

$$0 < |z| < \frac{M\varrho + \frac{1}{4}\varrho^2 - \frac{1}{4}\varrho}{M\varrho + \frac{1}{4}\varrho - \frac{1}{4}} \tag{4}$$

ist frei von Nullstellen.

Ein dem Satz 2 analoger Satz gilt nicht, wenn man Pole von $f(z)$ in $|z| \leqq \varrho$ zuläßt. Denn z. B. bildet die Funktion

$$z\frac{1 - \alpha z}{1 - \beta z} \tag{5}$$

den $|z| \leqq 1$ stets dann schlicht ab, wenn $1/\alpha$ und $1/\beta$ außerhalb eines beliebigen Kreises $|z| = 1 + \delta$, $\delta > 0$ hinreichend nahe beisammen liegen.

Dies Beispiel lehrt auch, daß ein dem Satz 2 analoger Satz dann nicht gilt, wenn man zwar die Regularität von $f(z)$ in $|z| \leqq \varrho$ voraussetzt, auf eine Einschränkung des absoluten Betrages auf $|z| = \varrho$ aber verzichtet. So strebt ja auch die rechte Seite von (4) gegen 1, wenn $M \to \infty$ strebt. Die eben ausgesprochene Behauptung leuchtet ein, wenn man bedenkt, daß man die Funktion (5) durch ein bei $z = 0$ verschwindendes Polynom in einem $z = 1/\alpha$ enthaltenden, aber $z = 1/\beta$ ausschließenden mit $|z| = 1$ konzentrischen Kreis, mit beliebiger Genauigkeit approximieren kann. Ein solches Polynom bildet dann bei genügender Feinheit der Approximation $|z| < 1$ schlicht ab und hat beliebig nahe bei $z = 1/\alpha$ eine Nullstelle.

Noch sei ausdrücklich bemerkt, daß die Sätze 1 und 1′ nicht leer sind. Man überzeugt sich leicht, daß es in beiden Fällen Funktionen gibt, die den Bedingungen der Sätze genügen. Solche Beispiele trifft man schon unter den rationalen Funktionen an, deren Nullstellen und Pole zweckmäßig verteilt sind, z. B. außerhalb hinreichend großer Kreise liegen. Man bekommt damit Aussagen, die an einen freilich schärferen Satz über Polynome anknüpfen, den Herr *J. W. Alexander* Ann. of math. (2) 17 (1915) ausgesprochen hat.

Endlich möchte ich noch erwähnen, daß die von meinen Sätzen 1 und 1′ erfaßten Funktionen im Falle ihrer Regularität ganz und gar nicht alle den $|z| < 1$ auf einen Stern abbilden.

Über die *Batemans*che Transformationsgruppe.

Von *Gerhard Kowalewski* in Dresden.

Wenn gesagt wird, daß die *Maxwell*schen Gleichungen im reinen Äther die 10-gliedrige *Lorentz*gruppe oder die 15-gliedrige *Batemang*ruppe gestatten, so muß für den Uneingeweihten noch hinzugefügt werden, wie sich die in jenen Gleichungen auftretenden Komponenten der elektrischen und magnetischen Feldstärke transformieren. *Lorentz*gruppe und *Batemang*ruppe wirken zunächst nur auf die Weltpunkte x, y, z, t, und man weiß von vornherein nicht, welche Transformation der beiden Feldstärken einer gegebenen Transformation der x, y, z, t zuzuordnen ist, besonders, wenn man den Bereich der linearen Transformationen verläßt.

Der einfachste Weg zur Klärung dieser Frage ist wohl der, daß man vorerst nur eins der beiden *Maxwell*schen Quadrupel betrachtet. Schreibt man es in der Form

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial x_0} - \dfrac{\partial v_3}{\partial x_2} + \dfrac{\partial v_2}{\partial x_3} = 0, \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial x_0} - \dfrac{\partial v_1}{\partial x_3} + \dfrac{\partial v_3}{\partial x_1} = 0, \\ \dfrac{\partial u_3}{\partial x_0} - \dfrac{\partial v_2}{\partial x_1} + \dfrac{\partial v_1}{\partial x_2} = 0, \\ \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial u_2}{\partial x_2} + \dfrac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0, \end{cases}$$

so lassen sich die vier Gleichungen auffassen als die Integrabilitätsbedingungen des folgenden Systems:

$$(2)\qquad \begin{cases} u_1 = \dfrac{\partial \varphi_3}{\partial x_2} - \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x_3}, \quad u_2 = \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_3} - \dfrac{\partial \varphi_3}{\partial x_1}, \quad u_3 = \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} - \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_2}, \\ v_1 = \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_0} - \dfrac{\partial \varphi_0}{\partial x_1}, \quad v_2 = \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x_0} - \dfrac{\partial \varphi_0}{\partial x_2}, \quad v_3 = \dfrac{\partial \varphi_3}{\partial x_0} - \dfrac{\partial \varphi_0}{\partial x_3}. \end{cases}$$

D. h., wenn die Gleichungen (1) erfüllt sind, so gibt es vier Funktionen $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, die den Gleichungen (2) genügen, und auch nur dann. Hat man diese leicht beweisbare und auch längst bekannte Tatsache festgestellt, so sieht man, daß die

u, v nichts anderes sind, als die Koeffizienten der bilinearen Kovariante eines *Pfaff*schen Ausdrucks $\Sigma \varphi_a dx_a$, die nach den Gleichungen (2) folgendermaßen lautet:

$$(3) \qquad \sum u_\alpha (dx_\beta \delta x_\gamma - \delta x_\beta dx_\gamma) + \sum v_a (dx_0 \delta x_a - \delta x_0 dx_a).$$

Dabei hat α, β, γ alle geraden Permutationen von 1, 2, 3 zu durchlaufen. Die *Maxwell*schen Gleichungen (1) sind also die kennzeichnenden Bedingungen dafür, daß die Differentialform (3) die bilineare Kovariante eines *Pfaff*schen Ausdrucks ist.

Nun weiß man (vgl. z. B. die klassischen Arbeiten von *Frobenius* in Bd. 82 dieses Journals), daß die Beziehung zwischen dem *Pfaff*schen Ausdruck und seiner bilinearen Kovariante gegenüber allen Transformationen

$$(4) \qquad x'_a = f_a(x_0, \ldots, x_3) \qquad (a = 0, \ldots, 3)$$

erhalten bleibt. Ist also vermöge (4)

$$\sum \varphi'_a dx'_a = \sum \varphi_a dx_a$$

und

$$(5) \quad \begin{cases} \sum u'_\alpha (dx'_\beta \delta x'_\gamma - \delta x'_\beta dx'_\gamma) + \sum v'_a (dx'_0 \delta x'_a - \delta x'_0 dx'_a) \\ = \sum u_a (dx_\beta \delta x_\gamma - \delta x_\beta dx_\gamma) + \sum v_a (dx_0 \delta x_a - \delta x_0 dx_a), \end{cases}$$

so wird die linke Seite von (5) die bilineare Kovariante von $\Sigma \varphi'_a dx'_a$ sein. Dies bedeutet aber, daß die *Maxwell*schen Gleichungen (1) bestehen bleiben, wenn man die x und die u, v mit Strichen versieht, d. h. wenn man auf die x die Transformation (4) wirken läßt und den u, v das Transformationsgesetz (5) auferlegt. Um dieses Transformationsgesetz noch deutlicher herauszuarbeiten, bemerke man, daß für die aus vier Reihen von Differentialen gebildete Determinante $(dx_0, \delta x_1, \boldsymbol{d}x_2, \boldsymbol{\delta} x_3)$ die Beziehung

$$(6) \qquad (dx'_0, \ \delta x'_1, \ \boldsymbol{d}x'_2, \ \boldsymbol{\delta} x'_3) = D \cdot (dx_0, \ \delta x_1, \ \boldsymbol{d}x_2, \ \boldsymbol{\delta} x_3)$$

gilt, wobei

$$D = \frac{\partial (x'_0, \ x'_1, \ x'_2, \ x'_3)}{\partial (x_0, \ x_1, \ x_2, \ x_3)}$$

ist. Der Vergleich von (5) und (6) zeigt dann, daß die Größen

$$\ldots u_a \ldots, \ldots v_a \ldots$$

mit

$$\ldots D u'_a \ldots, \ldots D v'_a \ldots$$

genau ebenso zusammenhängen, wie die Größen

$$\ldots \boldsymbol{d}x_0 \boldsymbol{\delta} x_a - \boldsymbol{\delta} x_0 \boldsymbol{d} x_a \ldots, \ldots \boldsymbol{d}x_\beta \boldsymbol{\delta} x_\gamma - \boldsymbol{\delta} x_\beta \boldsymbol{d} x_\gamma \ldots$$

mit

$$\ldots \boldsymbol{d}x'_0 \boldsymbol{\delta} x'_a - \boldsymbol{\delta} x'_0 \boldsymbol{d} x'_a \ldots, \ldots \boldsymbol{d}x'_\beta \boldsymbol{\delta} x'_\gamma - \boldsymbol{\delta} x'_\beta \boldsymbol{d} x'_\gamma \ldots$$

Hieraus ergibt sich sofort

$$(7) \quad \begin{cases} u'_a = D^{-1} \left\{ \sum \dfrac{\partial (x'_0, x'_a)}{\partial (x_0, x_\lambda)} u_\lambda + \sum \dfrac{\partial (x'_0, x'_a)}{\partial (x_\mu, x_\nu)} v_\lambda \right\}, \\ v'_a = D^{-1} \left\{ \sum \dfrac{\partial (x'_\beta, x'_\gamma)}{\partial (x_0, x_\lambda)} u_\lambda + \sum \dfrac{\partial (x'_\beta, x'_\gamma)}{\partial (x_\mu, x_\nu)} v_\lambda \right\}. \end{cases}$$

Dabei durchläuft λ, μ, ν (ebenso wie α, β, γ) alle geraden Permutationen von 1, 2, 3.

Die Gleichungen (4) und (7) zusammen bilden eine unendliche Gruppe, die das *Maxwell*sche Quadrupel (1) invariant läßt.

Auch das zweite *Maxwell*sche Quadrupel gestattet, für sich allein betrachtet, eine solche unendliche Gruppe. Schreibt man es in der Form

$$(1') \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial v_1}{\partial x_0} - \dfrac{\partial u_3}{\partial x_2} + \dfrac{\partial u_2}{\partial x_3} = 0\,, \\ \dfrac{\partial v_2}{\partial x_0} - \dfrac{\partial u_1}{\partial x_3} + \dfrac{\partial u_3}{\partial x_1} = 0\,, \\ \dfrac{\partial v_3}{\partial x_0} - \dfrac{\partial u_2}{\partial x_1} + \dfrac{\partial u_1}{\partial x_2} = 0\,, \\ \dfrac{\partial v_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial v_2}{\partial x_2} + \dfrac{\partial v_3}{\partial x_3} = 0\,, \end{cases}$$

so entsteht es aus (1) durch Vertauschung der Buchstaben u und v. Die zu (1′) gehörige unendliche Gruppe baut sich also auf aus den Gleichungen (4) und den Gleichungen

$$(7') \qquad \begin{cases} u'_\alpha = D^{-1}\left\{ \sum \dfrac{\partial(x'_\beta, x'_\gamma)}{\partial(x_\mu, x_\nu)}\, u_\lambda + \sum \dfrac{\partial(x'_\beta, x'_\gamma)}{\partial(x_0, x_\lambda)}\, v_\lambda \right\}, \\ v'_\alpha = D^{-1}\left\{ \sum \dfrac{\partial(x'_0, x'_\alpha)}{\partial(x_\mu, x_\nu)}\, u_\lambda + \sum \dfrac{\partial(x'_0, x'_\alpha)}{\partial(x_0, x_\lambda)}\, v_\lambda \right\}. \end{cases}$$

Der Durchschnitt der beiden unendlichen Gruppen (4), (7) und (4), (7′) ist nun eine Gruppe G, die jedes der beiden *Maxwell*schen Quadrupel, also das ganze *Maxwell*sche Gleichungssystem invariant läßt. Um diesen Durchschnitt zu finden, muß man fordern, daß die Transformationen (7) und (7′) zusammenfallen. Dies führt auf folgende Gleichungen

$$(8) \qquad \frac{\partial(x'_k, x'_l)}{\partial(x_p, x_q)} = \frac{\partial(x'_m, x'_n)}{\partial(x_r, x_s)}\,,$$

wobei k, l, m, n und p, q, r, s alle geraden Permutationen von $0, 1, 2, 3$ durchlaufen. In (8) hat man die *Definitionsgleichungen der Gruppe G* (beschränkt auf die x) vor sich.

Wenn man in (8) die Indizes p, q, r zweimal zyklisch vertauscht, so erhält man die ebenfalls gültigen Gleichungen

$$(8') \qquad \frac{\partial(x'_k, x'_l)}{\partial(x_q, x_r)} = \frac{\partial(x'_m, x'_n)}{\partial(x_p, x_s)}\,,$$

$$(8'') \qquad \frac{\partial(x'_k, x'_l)}{\partial(x_r, x_p)} = \frac{\partial(x'_m, x'_n)}{\partial(x_q, x_s)}\,.$$

Multipliziert man nun (8), (8′), (8″) mit $\dfrac{\partial x'_k}{\partial x_r}, \dfrac{\partial x'_k}{\partial x_p}, \dfrac{\partial x'_k}{\partial x_q}$ und addiert, so ergibt sich

$$\frac{\partial x'_m}{\partial x_s}\sum_a \frac{\partial x'_k}{\partial x_a}\frac{\partial x'_n}{\partial x_a} - \frac{\partial x'_n}{\partial x_s}\sum_a \frac{\partial x'_k}{\partial x_a}\frac{\partial x'_m}{\partial x_a} = 0\,.$$

Hier kann s jeden der Werte 0, 1, 2, 3 annehmen, und es folgt, da die Determinante D nicht proportionale Reihen haben darf, daß die beiden Summen, die in der Gleichung auftreten, verschwinden müssen. Man hat also, wenn k, m irgend zwei verschiedene Indizes aus der Reihe 0, 1, 2, 3 sind,

$$\sum_a \frac{\partial x'_k}{\partial x_a}\frac{\partial x'_m}{\partial x_a} = 0\,.$$

Hieraus kann man schließen

$$\frac{\partial x'_k}{\partial x_a} = \varrho_k D_{ka}\,, \tag{9}$$

wobei D_{ka} die Adjunkte von $\dfrac{\partial x'_k}{\partial x_a}$ in der Determinante D bezeichnet. Geht man mit diesen Werten (9) in die Gleichung (8) hinein und benutzt den bekannten Determinantensatz über $D_{kp}D_{lq} - D_{kq}D_{lp}$, so nimmt (8) folgende Gestalt an

$$(\varrho_k\varrho_l D - 1)\,\frac{\partial(x'_m, x'_n)}{\partial(x_r, x_s)} = 0\,.$$

Der zweite Faktor kann nicht für alle Amben r, s verschwinden, da sonst $D = 0$ wäre. Es muß also

$$\varrho_k\varrho_l = D^{-1}$$

sein. Wenn aber alle Produkte $\varrho_k\varrho_l$ denselben Wert haben sollen, so müssen $\varrho_0, \varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ einander gleich sein, und zwar gleich einer Quadratwurzel aus D^{-1}. Wir können mit andern Worten in Gleichung (9) den Faktor ϱ_k durch ϱ ohne Index ersetzen und schreiben

$$\frac{\partial x'_k}{\partial x_a} = \varrho D_{ka}\,. \tag{9'}$$

Es ist also in D jedes Element proportional zu seiner Adjunkte. Dann folgt aber

$$\Sigma dx'_a\,\delta x'_a = \varrho D\,\Sigma dx_a\,\delta x_a\,. \tag{10}$$

Die Gruppe G besteht demnach aus lauter konformen Transformationen, und zwar stellt sie nach *Lie*s Anschauungen den *Hauptzweig* der konformen Gruppe des R_4 dar, nämlich denjenigen, der die Identität enthält. Um die Beziehung der konformen Gruppe des R_4, die durch die Eigenschaft (10) definiert ist, zur Gruppe G deutlicher zu übersehen, bemerke man, daß aus (10) die Gleichungen (9′) hervorgehen und aus diesen die Gleichung $\varrho^4 D^2 = 1$, also

$$\varrho^2 D = \pm 1\,.$$

Gilt das obere Vorzeichen, so folgen aus den Relationen (9′) die Definitionsgleichungen (8) der Gruppe G. Gilt das untere Vorzeichen, so gelangt man von (9′) nicht zu (8), sondern zu

$$\frac{\partial(x'_k, x'_l)}{\partial(x_p, x_q)} = -\frac{\partial(x'_m, x'_n)}{\partial(x_r, x_s)}\,. \tag{$\bar{8}$}$$

Der Übergang von (8) zu ($\overline{8}$) kann dadurch bewirkt werden, daß man einem der vier x' das entgegengesetzte Zeichen gibt. Man erhält also aus der Gruppe G die noch fehlenden Transformationen der konformen Gruppe, indem man die Transformationen von G mit

$$x_0'' = -x_0', \quad x_1'' = x_1', \quad x_2'' = x_2', \quad x_3'' = x_3'$$

zusammensetzt. G möchte ich die *Batemans*che Gruppe nennen (vgl. Proceedings of the Lond. Math. Soc. 1910, S. 223—64). Ich glaube hier seine Ergebnisse mit einfacheren Hilfsmitteln hergeleitet zu haben als er selbst. Diese Hilfsmittel entstammen teilweise einer noch unveröffentlichten Arbeit meiner ausgezeichneten Schülerin *M. E. Junge*.

Berichtigungen und Zusatz zu dem Aufsatz „Über Summen von fünf und sechs Quadraten". Bd. 157, S. 33.

Leider habe ich bei der Korrektur, die wegen des anfänglichen Fehlens einer Type und durchgängiger Verwechslung anderer besonders schwierig war, mehrere Schreib- oder Druckfehler übersehen.

S. 40, Zeile 12 v. u. und S. 47, Zeile 19 v. u. soll es heißen $Z_a \leqq -1$ statt $Z_a \leqq 1$.

S. 47, Zeile 3 v. o. fehlt auf der rechten Seite das Vorzeichen $\mp$.

S. 42, Zeile 1 und Zeile 14 v. o., ferner S. 43 Zeile 6 v. u. lies ∇_l, ∇_r statt $\triangle_l, \triangle_r$.

S. 43, Zeile 15 v. u. steht links $cz + a$ statt $cz + d$, und rechts ist bei dem Reindruck ein Zeichen $\tilde{z}'$ ausgefallen.

S. 45, Zeile 9 v. o. soll es heißen D_l statt D.

S. 50, Zeile 12. v. o. fehlen über den Zeichen p, q, q die Zirkumflexe; ebenso muß es auf Seite 56, Zeile 1 v. u. heißen $p = \tilde{p}$ statt $p = p$.

S. 55 sind in der Formel (72) drei Summenzeichen verloren gegangen.

Endlich lies auf Seite 58, Zeile 2 von oben vertauschbaren statt vertauschbarer.

Ich benutze die Gelegenheit zu der Bemerkung, daß ich die Untersuchung des Falles $n = 6$ mit Absicht nicht weitergeführt habe. Dieser Gegenstand soll (unter anderem) in einer Dissertation abgehandelt werden.

Bonn, im Dezember 1926.

E. Study.

Walter de Gruyter & Co. Berlin W 10 und Leipzig
Postscheckkonto: Berlin NW 7 Nr. 59533

Soeben erschienen:

Mengenlehre

Von **Dr. F. Hausdorff**
o. Professor der Mathematik an der Universität Bonn

Zweite, neubearbeitete Auflage. Mit 12 Figuren. Groß-Oktav. 285 Seiten.
Geh. M. 12.—, in Leinen geb. M. 13.50
(*Göschens Lehrbücherei, I. Gruppe: Reine Mathematik, Band 7*)

Algebra

Von **Dr. O. Perron**
o. ö. Professor der Mathematik an der Universität München

Zwei Bände

I. Band: Die Grundlagen. Mit 4 Figuren. Groß-Oktav. VIII, 307 Seiten. Geh. M. 10.—, in Leinen geb. M. 11.50

II. Band: Theorie der algebraischen Gleichungen. Mit 5 Figuren. Groß-Oktav. VIII, 243 Seiten. Geh. M. 8.—, in Leinen geb. M. 9.50
(*Göschens Lehrbücherei, I. Gruppe: Reine Mathematik, Band 8 u. 9*)

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Von **Dr. J. Horn**
o. Professor an der Technischen Hochschule Darmstadt

Zweite, umgearbeitete Auflage. Mit 4 Figuren. Groß-Oktav. Im Druck.
(*Göschens Lehrbücherei, I. Gruppe: Reine Mathematik, Band 10*)

Elliptische Funktionen

Von
Dr. R. König und **Dr. M. Krafft**
o. Professor a. d. Universität Münster i. W. — Privatdozent a. d. Universität Marburg i. H.

Groß-Oktav. Im Druck.
(*Göschens Lehrbücherei, I. Gruppe: Reine Mathematik, Band 11*)

Einführung in die konforme Abbildung

Von **Dr. L. Bieberbach**
o. ö. Professor an der Universität Berlin

Zweite, neubearbeitete Auflage. Mit 38 Figuren. Klein-Oktav. 131 Seiten.
In Leinen geb. M. 1.50
(*Sammlung Göschen, Band 768*)

Walter de Gruyter & Co. Berlin W 10 und Leipzig
Postscheckkonto: Berlin NW 7 Nr. 59533

MATHEMATIK
AUS DER SAMMLUNG GÖSCHEN

Jeder Band gebunden 1.50

Geschichte der Mathematik. Von Prof. Dr. H. Wieleitner. 2 Bde. . . . . Nr. 226, 875
Vierstellige Tafeln und Gegentafeln für logarithmisches u. trigonometrisches Rechnen, in zwei Farben zusammengestellt. Von Prof. Dr. Herm. Schubert. Neue Ausg. v. Prof. Dr. Rob. Haußner. Nr. 81
Fünfstellige Logarithmen. Von Direktor Prof. Aug. Adler . . . . . Nr. 423
Mathematische Formelsammlung und Repetitorium der Mathematik. Von Prof. O. Th. Bürklen. Mit 18 Fig. . . . . Nr. 51
Arithmetik nebst Gleichungen 1. u. 2. Grades. Von Prof. Dr. Herm. Schubert u. Prof. Paul B. Fischer. Nr. 47
Elementare Algebra. Von Prof. Paul B. Fischer. Mit 20 Fig. . . . . Nr. 930
Beispielsammlung zur Arithmetik und Algebra. Von Prof. Dr. Herm. Schubert. Neubearb. von Prof. Paul B. Fischer. Mit 8 Fig. . . . . Nr. 48
Höhere Algebra. Von Prof. Dr. H. Hasse.
I. Lineare Gleichungssysteme . . . . Nr. 931
II. Gleichungen höheren Grades. Mit 5 Fig. Nr. 932
Praktisches Zahlenrechnen. Von Prof. Dr.-Ing. P. Werkmeister. Mit 58 Fig. . . . . Nr. 405
Determinanten. Von Prof. Paul B. Fischer. Nr. 402
Gruppentheorie. Von Dr. Ludw. Baumgartner. Mit 6 Fig. . . . . Nr. 837
Elementare Reihenlehre. Von Prof. Dr. Hans Falckenberg. Mit 4 Fig. im Text . . . . Nr. 943
Niedere Analysis. Von Prof. Dr. B. Sporer. Mit 6 Fig. . . . . Nr. 53
Höhere Analysis I: Differentialrechnung. Von Rektor Dr. Friedr. Junker. Mit 167 Übungsbeisp. und 68 Fig. . . . . Nr. 87
Repetitorium und Aufgabensammlung zur Differentialrechnung. Von Rektor Dr. Friedr. Junker. Mit 46 Fig. . . . . Nr. 146
Höhere Analysis II: Integralrechnung. Von Rektor Dr. Friedr. Junker. Mit 50 Fig. . . . . Nr. 88
Repetitorium u. Aufgabensammlung zur Integralrechnung. V. Rekt. Dr. Fr. Junker. M. 52 Fig. Nr. 147
Gewöhnliche Differentialgleichungen. Von Priv.-Doz. Dr. H. Hoheisel . . . . . Nr. 920
Einleitung in die Funktionentheorie (Theorie der komplexen Zahlenreihen). Von Oberlehrer M. Rose. Mit 10 Fig. . . . . Nr. 581
Funktionentheorie. Von Prof. Dr. Konrad Knopp.
I. Grundlagen der allgemeinen Theorie der analytischen Funktionen. Mit 8 Fig. . . Nr. 668
II. Anwendungen und Weiterführung der allgem. Theorie. Mit 7 Fig. . . . . Nr. 703
Aufgabensammlung zur Funktionentheorie I. Von Prof. Dr. K. Knopp . . . . . Nr. 877
Einführung in die konforme Abbildung. Von Prof. Dr. Ludwig Bieberbach. Mit 38 Fig. . . Nr. 768
Potentialtheorie. Von Dr. W. Sternberg.
I. Die Elemente d. Potentialtheorie. M. 5 Fig. Nr. 901
II. Die Randwertaufgaben der Potentialtheorie. Mit 1 Fig. . . . . Nr. 944
Vektoranalysis. Von Prof. Dr. Siegfr. Valentiner. Mit 13 Fig. . . . . Nr. 354
Graphische Integration. Von Dr. F. A. Willers. Mit 53 Fig. . . . . Nr. 801
Numerische Integration. Von Dr. F. A. Willers. Mit 2 Fig. . . . . Nr. 864
Ebene Geometrie. Von Prof. G. Mahler. Mit 110 zweifarb. Fig. . . . . Nr. 41
Ebene und sphärische Trigonometrie. Von Prof. Dr. Gerh. Hessenberg. Mit 59 Fig. . . . . Nr. 99
Sammlung und Aufgaben aus der ebenen und sphärischen Trigonometrie. Von Studienrat Dr. Fritz Heiland. Mit 26 Fig. . . . . Nr. 848
Stereometrie. V. Prof. Dr. R. Glaser. M. 81 Fig. Nr. 97
Sammlung von Aufgaben aus der Stereometrie. Von Prof. Dr. Robert Glaser. Mit 54 Fig. Nr. 779
Projektive Geometrie in synthetischer Behandlung. Von Prof. Dr. K. Doehlemann. Mit 91 Fig. 2 Bände. Nr. 72, 867
Darstellende Geometrie. Von Prof. Dr. Robert Haußner. Mit 150 Fig. 2 Bde. . . . Nr. 142, 143
Geometrisches Zeichnen. Von H. Becker. Neubearb. von Prof. J. Vonderlinn. Mit 290 Fig. u. 23 Taf. Nr. 58
Graphische Darstellung in Wissenschaft und Technik. Von Obering. Privatdoz. Dr. Marcello Pirani. Mit 58 Fig. . . . . Nr. 728
Analytische Geometrie der Ebene. Von Prof. Dr. M. Simon. Mit 52 Fig. . . . . Nr. 65
Aufgabensammlung zur analytischen Geometrie der Ebene. V. Prof. O. Th. Bürklen. M. 31 Fig. Nr. 256
Analytische Geometrie des Raumes. Von Prof. Dr. M. Simon. Mit 28 Fig. . . . . Nr. 89
Aufgabensammlung zur analytischen Geometrie des Raumes. Von Prof. O. Th. Bürklen. Mit 8 Fig. Nr. 309
Koordinatensysteme. Von Prof. Paul B. Fischer. Mit 8 Fig. . . . . Nr. 507
Algebraische Kurven. Neue Bearbeit. von Prof. Dr. H. Wieleitner.
I. Gestaltliche Verhältnisse. Mit 97 Figuren. Nr. 435
II. Allgemeine Eigenschaften. Mit 35 Fig. Nr. 436
Wahrscheinlichkeitsrechnung. Von Prof. Dr. O. Knopf. 2 Bde. Mit 10 Fig. . . . . Nr. 508, 871
Politische Arithmetik. V. Prof. Dr. E. Foerster. Nr. 879
Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate. Von Prof. Wilh. Weitbrecht. 2 Bde. Mit 16 Fig. . . . . Nr. 302, 641
Vermessungskunde. Von Prof. Dipl.-Ing. P. Werkmeister. 3 Bde. Mit 300 Fig. . . . Nr. 468, 469, 862
Geodäsie. Von Prof. Dr. C. Reinhertz. Neubearb. von Dr. G. Förster. Mit 68 Fig. . . . . Nr. 102
Mathematische Instrumente. Von Dr. Fr. A. Willers. Mit 68 Fig. . . . . Nr. 922
Versicherungsmathematik. Von Prof. Dr. Fr. Boehm.
I. Elemente der Versicherungsrechnung. Nr. 180
II. Lebensversicherungsmathematik. Einführung in die technischen Grundlagen der Sozialversicherung . . . . . Nr. 917

VOLLSTÄNDIGES VERZEICHNIS KOSTENLOS

PERIODICAL ROOM
GENERAL LIBRARY
UNIV. OF MICH.

JUBILÄUMSBAND

AUS ANLASS DES 100 JÄHRIGEN BESTEHENS

Journal

für die

reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826.

Herausgegeben

unter Mitwirkung der Herren

Hasse, Schaefer, Schlesinger, Schottky

von

K. Hensel.

Band 157.

Heft 4.

Mit Bildern von Poncelet, Möbius, Steiner und Plücker.

Ausgegeben den 25. Mai.

Berlin und Leipzig

WALTER DE GRUYTER & CO.

VORMALS G. J. GÖSCHEN'SCHE VERLAGSHANDLUNG - J. GUTTENTAG VERLAGS-BUCHHANDLUNG - GEORG REIMER - KARL J. TRÜBNER - VEIT & COMP.

1927

Jährlich zirka 6 Hefte. Vier Hefte bilden einen Band.

Band 157. Heft 4.

(Jubiläumsband I.)

Mit Bildern von Poncelet, Möbius, Steiner und Plücker.

Inhaltsverzeichnis.

Mertens, Franz, Ein Satz zur Bildung algebraisch lösbarer Gleichungen . . Seite 199
Hahn, Hans, Über lineare Gleichungssysteme in linearen Räumen . . . . — 214
Takagi, Teiji, Zur Theorie des Kreiskörpers . . . . . — 230
Loewy, Alfred, Über abstrakt definierte Transmutationssysteme oder Mischgruppen — 239
Brouwer, L. E. J., Virtuelle Ordnung und unerweiterbare Ordnung . . . . — 255

An unsere Mitarbeiter!

Um ein schnelles Erscheinen der einzelnen Hefte des Journals zu ermöglichen, können wir den Herren Autoren grundsätzlich nur eine Korrektur ihrer Beiträge zustellen. Da die Korrekturen seitens der Redaktion, auch hinsichtlich ihres Inhalts, mit größter Genauigkeit gelesen werden, hoffen wir auch so, allen Wünschen gerecht zu werden.

Die Herren Verfasser erhalten von Abhandlungen bis zu 24 Seiten Umfang 100 Sonderabdrucke, von größeren Arbeiten 50 Sonderabdrucke kostenfrei, weitere gegen Berechnung.

Sendungen für das Journal erbittet die Redaktion **ausschließlich** unter der Adresse
An die Redaktion des Journals für die reine und angewandte Mathematik
Professor Dr. Kurt Hensel, Marburg (Bez. Cassel), Breiter Weg 7.

Jean Victor Poncelet
geb. 1. Juli 1788, gest. 22. Dezember 1867.
(Nach einer in Paris stehenden Marmorbüste.)

Jacob Steiner
geb. 18. März 1796, gest. 1. April 1863.

Band 157. Heft 4.

(Jubiläumsband I.)

Mit Bildern von Poncelet, Möbius, Steiner und Plücker.

Inhaltsverzeichnis.

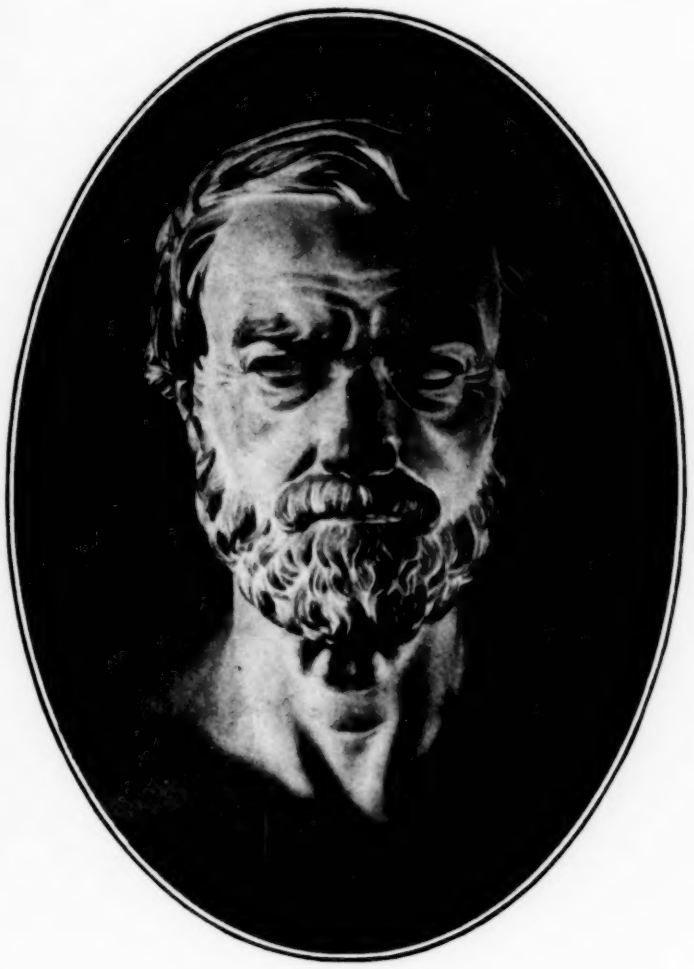
Mertens, Franz, Ein Satz zur Bildung algebraisch lösbarer Gleichungen . . Seite 199
Hahn, Hans, Über lineare Gleichungssysteme in linearen Räumen . . . . . — 214
Takagi, Teiji, Zur Theorie des Kreiskörpers . . . . . — 230
Loewy, Alfred, Über abstrakt definierte Transmutationssysteme oder Mischgruppen — 239
Brouwer, L. E. J., Virtuelle Ordnung und unerweiterbare Ordnung . . . . — 255

An unsere Mitarbeiter!

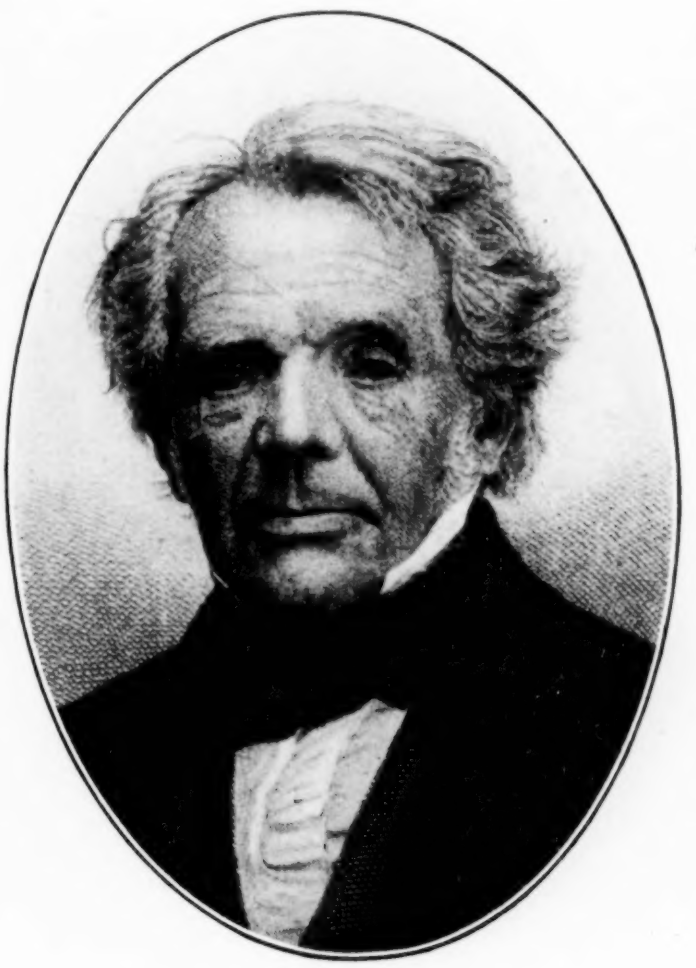
Um ein schnelles Erscheinen der einzelnen Hefte des Journals zu ermöglichen, können wir den Herren Autoren grundsätzlich nur eine Korrektur ihrer Beiträge zustellen. Da die Korrekturen seitens der Redaktion, auch hinsichtlich ihres Inhalts, mit größter Genauigkeit gelesen werden, hoffen wir auch so, allen Wünschen gerecht zu werden.

Die Herren Verfasser erhalten von Abhandlungen bis zu 24 Seiten Umfang 100 Sonderabdrucke, von größeren Arbeiten 50 Sonderabdrucke kostenfrei, weitere gegen Berechnung.

Sendungen für das Journal erbittet die Redaktion **ausschließlich** unter der Adresse
An die Redaktion des Journals für die reine und angewandte Mathematik
Professor Dr. Kurt Hensel, Marburg (Bez. Cassel), Breiter Weg 7.



Jean Victor Poncelet
geb. 1. Juli 1788, gest. 22. Dezember 1867.
(Nach einer in Paris stehenden Marmorbüste.)



August Ferdinand Möbius
geb. 17. November 1790, gest. 26. September 1868.

Jacob Steiner
geb. 18. März 1796, gest. 1. April 1863.

Julius Plücker
geb. 16. Juli 1801, gest. 22. Mai 1868.

Ein Satz zur Bildung algebraisch lösbarer Gleichungen.

Von *Franz Mertens* † in Wien.

1.

Im Folgenden wird ein Satz aufgestellt, welcher algebraisch lösbare Gleichungen liefert und nicht ohne Interesse ist.

Es sei eine irreduktibele Normalgleichung l-ten Grades

$$\mathfrak{U} = 0 \tag{1}$$

eines Bereichs $\mathfrak{R}$ mit den Wurzeln

$$\varrho, \varrho', \varrho'', \ldots$$

gegeben. Die aus zwei Wurzeln φ, ψ derselben zusammengesetzte Wurzel werde, wenn kein Mißverständnis zu befürchten ist, mit $\varphi\psi$ bezeichnet. Die Gleichung werde kurz Unterbau genannt.

2.

Es werde vorausgesetzt, daß eine Gruppe l-ter Ordnung $\mathcal{A}$ von linear-homogenen, nach einem gegebenen Primzahlmodul p zu nehmenden Substitutionen u von n Unbestimmten

$$x_0, x_1, \ldots, x_{n-1} \tag{2}$$

gebildet werden kann, welche als dem Unterbau zugehörige Gruppe bezeichnet wird und folgenden Bedingungen genügt:

Die Substitutionen u werden mit $[f, g, \ldots, h]$ bezeichnet, wo $f, g, \ldots, h$ n lineare, ganzzahlige, nach p linear-unabhängige Formen der Unbestimmten (2) bedeuten, und bestehen in der Forderung, daß letztere bzw. durch $f, g, \ldots, h$ zu ersetzen sind. Das durch Ausführung der Substitution u an einem Ausdruck $\mathfrak{A}$ entspringende Resultat werde mit $\mathfrak{A} \mid u$, die aus der Zusammensetzung zweier Substitutionen s, t entstehende Substitution mit st bezeichnet.

Die Substitutionen der Gruppe $\mathcal{A}$ sollen mit den Wurzeln des Unterbaus derart in Isomorphie gebracht werden können, daß der aus den Wurzeln φ, ψ des Unterbaus zusammengesetzten Wurzel $\varphi\psi$ die Substitution st zugeteilt wird, welche aus den den Wurzeln φ, ψ zugeteilten Substitutionen zusammengesetzt ist. Wird demnach die der Wurzel φ zugeteilte Substitution mit $s\varphi$ bezeichnet, so ist allgemein $s\varphi\psi = s\varphi s\psi$.

Stellt man je eine Wurzel φ des Unterbaus mit je einer Substitution s der Gruppe $\mathcal{A}$ zu einem Paar (φ, s) zusammen und versteht unter dem aus den Paaren (φ, s), (ψ, t) zusammengesetzten Paar das Paar $(\varphi\psi, st)$, so gibt es l Paare, welche aus einer Wurzel und der ihr zugeteilten Substitution bestehen und Isomorphiepaare genannt werden können. Die Isomorphiepaare haben die Gruppeneigenschaft, durch Zusammensetzung wieder erzeugt zu werden. Kann man umgekehrt l Paare angeben, welche die Gruppeneigenschaft besitzen, so hat man eine Isomorphie.

Die erste Form der Substitution $s\varphi$ soll die Exponentenform der Wurzel φ genannt und mit $e\varphi$, ihre Koeffizienten mit $e_0\varphi, e_1\varphi, \ldots, e_{n-1}\varphi$ bezeichnet werden. Unter den Wurzeln des Unterbaus sollen n Wurzeln

$$\varrho_0, \varrho_1, \ldots, \varrho_{n-1}$$

vorkommen, deren Exponentenformen $e\varrho, e\varrho_1, \ldots, e\varrho_{n-1}$ bzw. mit den Unbestimmten (2) zusammenfallen und Basiswurzeln genannt werden. Ist

$$s\varphi = [f_0, f_1, \ldots, f_{n-1}],$$

so ist auf Grund der Isomorphie

$$s\varrho_i\varphi = s\varrho_i s\varphi,$$

also

$$e\varrho_i\varphi = e\varrho_i \mid s\varphi = x_i \mid s\varphi = f_i$$

und daher

$$s\varphi = [e\varrho\varphi, e\varrho_1\varphi, \ldots, e\varrho_{n-1}\varphi].$$

Die Determinante

$$\mathfrak{D} = \begin{vmatrix} e_0\varrho_0\varrho_0^{-1}, & e_0\varrho_0\varrho_1^{-1}, & \ldots, & e_0\varrho_0\varrho_{n-1}^{-1} \\ e_0\varrho_1\varrho_0^{-1}, & e_0\varrho_1\varrho_1^{-1}, & \ldots, & e_0\varrho_1\varrho_{n-1}^{-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ e_0\varrho_{n-1}\varrho_0^{-1}, & e_0\varrho_{n-1}\varrho_1^{-1}, & \ldots, & e_0\varrho_{n-1}\varrho_{n-1}^{-1} \end{vmatrix}$$

wird teilerfremd zu p vorausgesetzt.

3.

Sind Unterbau und die zugehörige Gruppe $\mathcal{A}$ gegeben, so ziehe man l den einzelnen Wurzeln $\varrho, \varrho', \varrho'', \ldots$ des Unterbaus entsprechende Unbestimmte in Betracht und bezeichne dieselben mit

$$y_\varrho, y_{\varrho'}, y_{\varrho''}, \ldots \tag{3}$$

Ist φ eine Unterbauwurzel, so fallen die Unbestimmten

$$y_{\varrho\varphi}, y_{\varrho'\varphi}, y_{\varrho''\varphi}, \ldots$$

von der Reihenfolge abgesehen wieder mit den Unbestimmten (3) zusammen und bilden eine Permutation derselben. Die Forderung, daß die Permutation

$$\begin{pmatrix} y_\varrho, & y_{\varrho'}, & y_{\varrho''}, \ldots \\ y_{\varrho\varphi}, & y_{\varrho'\varphi}, & y_{\varrho''\varphi}, \ldots \end{pmatrix}$$

an einer ganzen Funktion $\mathfrak{F}$ der Unbestimmten (3) auszuführen ist, wird als Substitution $y_\delta \mid y_{\delta\varphi}$ und das Ergebnis mit $\mathfrak{F}_\varphi$ bezeichnet.

Ein Produkt von Unbestimmten y_δ und ihren reziproken Werten $\frac{1}{y_\delta}$ werde allgemein mit M bezeichnet.

Es sei, über alle Wurzeln δ des Unterbaus erstreckt,

$$T = \prod_{\delta} y_\delta^{e_0 \delta^{-1}}.$$

Es ist

$$T_\varphi = \prod_{\delta} y_{\delta\varphi}^{e_0 \delta^{-1}}.$$

Da $\delta\varphi^{-1}$ mit δ wieder alle Unterbauwurzeln durchläuft, so darf in dem vorstehenden Produkt δ durch $\delta\varphi^{-1}$ ersetzt werden, und es wird

$$T_\varphi = \prod_{\delta} y_\delta^{e_0 \varphi \delta^{-1}}.$$

Entnimmt man die Exponentenform $e\,\varphi\,\delta^{-1}$ der Kongruenz

$$e\,\varphi\,\delta^{-1} = e\,\varphi \mid s\,\delta^{-1} \equiv e_0\,\varphi e\,\varrho\,\delta^{-1} + e_1\,\varphi e\,\varrho_1 \delta^{-1} + \cdots + e_{n-1}\varphi e \varrho_{n-1}\delta^{-1} \quad (p)$$

und setzt der Kürze halber

$$T_i = \prod_{\delta} y_\delta^{e_0 \varrho_i \delta^{-1}},$$

so folgt

$$T_\varphi = M^p\, T_0^{e_0\varphi}\, T_1^{e_1\varphi} \ldots T_{n-1}^{e_{n-1}\varphi}. \tag{4}$$

Setzt man, über alle Unterbauwurzeln φ erstreckt,

$$X = \sum_\varphi T_\varphi$$

$$X[\xi, \eta, \ldots, \zeta] = \sum_\varphi \omega^{\overline{e\varphi}}\, T_\varphi$$

$$S^{(m)} = \sum X[\xi, \eta, \ldots, \zeta]^m, \qquad \xi, \eta, \ldots, \zeta = 0, 1, \ldots, p-1,$$

wo ω eine primitive p-te Einheitswurzel und $\overline{e\varphi}$ den aus der Exponentenform $e\varphi$ nach Ersetzung der Unbestimmten (2) durch $\xi, \eta, \ldots, \zeta$ entstehenden Ausdruck bedeutet, so ist

$$X[\xi, \eta, \ldots, \zeta]_\psi = \sum_\varphi \omega^{\overline{e\varphi}} T_{\varphi\psi}$$

und nach Ersetzung von φ durch $\varphi\psi^{-1}$

$$X[\xi, \eta, \ldots, \zeta]_\psi = \sum_\varphi \omega^{\overline{e\varphi\psi^{-1}}}\, T_\varphi.$$

Der Kongruenz

$$\overline{e\,\varphi\,\psi^{-1}} = \overline{e\varphi \mid s\,\psi^{-1}} \equiv e_0\varphi\overline{e\,\varrho\,\psi^{-1}} + e_1\varphi\overline{e\,\varrho_1\psi^{-1}} + \cdots + e_{n-1}\varphi\overline{e\,\varrho_{n-1}\psi^{-1}} \quad (p)$$

zufolge ist demnach

$$X[\xi, \eta, \ldots, \zeta]_\psi = X[\overline{e\,\varrho\,\psi^{-1}}, \overline{e\,\varrho_1\psi^{-1}}, \ldots, \overline{e\,\varrho_{n-1}\psi^{-1}}],$$

und es erhellt, da die Zahlen $\overline{e\,\varrho\,\psi^{-1}}, \overline{e\,\varrho_1\psi^{-1}}, \ldots$ nach dem Modul p dieselben Werte wie $\xi, \eta, \ldots, \zeta$ durchlaufen, daß die Ausdrücke $X[\xi, \eta, \ldots, \zeta]$ durch eine Substitution $y_\delta \mid y_{\delta\psi}$ nur eine Permutation erfahren. Somit ist

$$S_\psi^{(m)} = \sum X[\xi, \eta, \ldots, \zeta]_\psi^m = \sum X[\xi, \eta, \ldots, \zeta]^m = S^{(m)}. \tag{5}$$

Gibt man dem Ausdruck X nach (4) die Gestalt

$$X = \sum_{\varphi} M^{\varphi}\, T_0^{e_0\varphi}\, T_1^{e_1\varphi} \dots\, T_{n-1}^{e_{n-1}\varphi},$$

so erhellt, daß X^m in der Gestalt

$$X^m = \sum C_{ab\dots e}\, T_0^a\, T_1^b \dots\, T_{n-1}^e, \qquad a, b, \dots, e = 0, 1, \dots, p-1 \tag{6}$$

darstellbar ist, wo $C_{ab\dots e}$ eine ganze rationalzahlige Funktion der p-ten Potenzen der Unbestimmten y_δ und ihrer reziproken Werte ist. Werden hierauf $y_{\varrho_0}, y_{\varrho_1}, \dots, y_{\varrho_{n-1}}$ durch

$$\omega^{z_0} y_{\varrho_0},\ \omega^{z_1} y_{\varrho_1},\ \dots,\ \omega^{z_{n-1}} y_{\varrho_{n-1}}$$

ersetzt, wo $z_0, z_1, \dots, z_{n-1}$ die Lösung der Kongruenzen

$$\begin{aligned}
&e_0\varrho_0 \quad \varrho_0^{-1} z_0 + e_0\varrho_0 \quad \varrho_1^{-1} z_1 + \dots + e_0\varrho_0 \quad \varrho_{n-1}^{-1} z_{n-1} \equiv \xi \\
&e_0\varrho_1 \quad \varrho_0^{-1} z_0 + e_0\varrho_1 \quad \varrho_1^{-1} z_1 + \dots + e_0\varrho_1 \quad \varrho_{n-1}^{-1} z_{n-1} \equiv \eta \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&e_0\varrho_{n-1}\varrho_0^{-1} z_0 + e_0\varrho_{n-1}\varrho_1^{-1} z_1 + \dots + e_0\varrho_{n-1}\varrho_{n-1}^{-1} z_{n-1} \equiv \zeta
\end{aligned} \tag{p}$$

bedeuten, so gehen die Ausdrücke

$$T_0,\ T_1,\ \dots,\ T_{n-1},\ X$$

in

$$\omega^{\xi} T_0,\ \omega^{\eta} T_1,\ \dots,\ \omega^{\zeta} T_{n-1},\quad X[\xi, \eta, \dots, \zeta],$$

die Identität (6) in

$$X^m[\xi, \eta, \dots, \zeta] = \sum C_{ab\dots e}\, \omega^{a\xi + b\eta + \dots e\zeta}\, T_0^a\, T_1^b \dots\, T_{n-1}^e$$

über, und die Summation über die Werte von $\xi, \eta, \dots, \zeta$ ergibt

$$S^{(m)} = p^n C_{00\dots 0}.$$

Hiernach enthält $S^{(m)}$ die Unbestimmten (3) nur mit positiven, durch p teilbaren Exponenten und ist eine ganze rationalzahlige Funktion der p-ten Potenzen derselben, welche nach (5) alle Permutationen $y_\delta | y_{\delta\psi}$ zuläßt.

Die p^n Ausdrücke

$$X[\xi, \eta, \dots, \zeta], \qquad \xi, \eta, \dots, \zeta = 0, 1, \dots, p-1$$

genügen demnach einer Gleichung p^n-ten Grades

$$F(y) = y^{p^n} + C_1 y^{p^n-1} + \dots + C_{p^n} = 0,$$

deren Koeffizienten ganze rationalzahlige Funktionen der p-ten Potenzen der Unbestimmten (3) sind und alle Permutationen $y_\delta | y_{\delta\psi}$ vertragen.

4.

Es sei $f(\varrho)$ eine Größe des Bereichs $(\mathfrak{R}, \varrho)$ von der Art, daß die n Produkte

$$\mathfrak{K}(\varrho_i) = \prod f(\delta)^{e_0\varrho_i\delta^{-1}}, \qquad i = 0, 1, \dots, n-1$$

in $(\mathfrak{R}, \varrho)$ in bezug auf p frei sind, d. h. daß kein Potenzprodukt

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{K}(\varrho_0)^{a_0}\, \mathfrak{K}(\varrho_1)^{a_1} \dots\, \mathfrak{K}(\varrho_{n-1})^{a_{n-1}}, \tag{7}$$

dessen Exponenten nicht alle durch p teilbar sind, in $(\mathfrak{R}, \varrho)$ eine p-te Potenz sein kann.

Man erhält etwa eine solche Größe in dem Falle $\mathfrak{R} = 1$, wenn man für $f(\varrho)$ eine ganze algebraische Zahl des Bereichs $(1, \varrho)$ nimmt, welche das Produkt eines Primideals $\mathfrak{j}(\varrho)$ ersten Grades in ein zu der Norm $N\mathfrak{j}(\varrho)$ teilerfremdes Ideal ist. Ein Potenzprodukt (7) hat dann die Gestalt

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{j}(\varrho_0)^{\varepsilon_0}\mathfrak{j}(\varrho_1)^{\varepsilon_1} \dots \mathfrak{j}(\varrho_{n-1})^{\varepsilon_{n-1}}\mathfrak{n},$$

wo $\mathfrak{n}$ ein zu $\mathfrak{j}(\varrho_0), \mathfrak{j}(\varrho_1), \dots, \mathfrak{j}(\varrho_{n-1})$ teilerfremdes Ideal und

$$\varepsilon_n = a_0 e_0 \varrho_0 \varrho_n^{-1} + a_1 e_0 \varrho_1 \varrho_n^{-1} + \dots + a_{n-1} e_0 \varrho_{n-1} \varrho_n^{-1}$$

ist. Da $\mathfrak{j}(\varrho_n)$ in $\mathfrak{R}(\varrho_i)$ genau mit dem Exponenten $e_0 \varrho_i \varrho_h^{-1}$, also in $\mathfrak{P}$ genau mit dem Exponenten ε_h aufgeht, so kommen unter den Zahlen $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}$ durch p nicht teilbare vor, weil $\mathfrak{D}$ zu p teilerfremd ist, so daß $\mathfrak{P}$ keine p^m-te Potenz in $(1, \varrho)$ sein kann.

Werden nun statt der Unbestimmten (3) beliebige feste Werte der Wurzeln

$$f(\varrho)^{\frac{1}{p}},\ f(\varrho')^{\frac{1}{p}},\ f(\varrho'')^{\frac{1}{p}}, \dots$$

und

$$\mathfrak{R}(\varrho)^{\frac{1}{p}} = \prod_{\delta} f(\delta)^{\frac{1}{p} e_0 \varphi \delta^{-1}}$$

$$x_{\xi\eta\dots\zeta} = \sum \omega^{\overline{e\varphi}}\, \mathfrak{R}(\varphi)^{\frac{1}{p}}, \qquad \xi, \eta, , \dots, \zeta = 0, 1, \dots, p-1 \tag{8}$$

gesetzt, so sind die Größen (8) die Wurzeln einer Gleichung p^n-ten Grades des Bereichs $\mathfrak{R}$:

$$F(y) = 0. \tag{9}$$

Die Größen (8) sind ungleich. Denn die Differenz

$$x_{\xi'\eta'\dots\zeta'} - x_{\xi\eta\dots\zeta}$$

enthält die Glieder

$$(\omega^{\xi'} - \omega^{\xi})\,\mathfrak{R}(\varrho)^{\frac{1}{p}}, \quad (\omega^{\eta'} - \omega^{\eta})\,\mathfrak{R}(\varrho_1)^{\frac{1}{p}}, \dots, (\omega^{\zeta'} - \omega^{\zeta})\,\mathfrak{R}^{\frac{1}{p}}(\varrho_{n-1}),$$

von welchem mindestens eines nicht $= 0$ und gegen andere Glieder nicht forthebbar ist.

Die Gleichung (9) ist in $\mathfrak{R}$ irreduktibel, da ein bereichsmäßiger Teiler $T(y)$ von $F(y)$ mit dem Koeffizienten 1 bei der höchsten Potenz von y, welcher für $x_{00\dots0}$ verschwindet, für alle Wurzeln $x_{\xi\eta\dots\zeta}$ verschwinden und wegen der Ungleichheit der letzteren mit $F(y)$ zusammenfallen muß.

Die Gleichung (9) ist algebraisch lösbar, wenn der Unterbau es ist.

5.

Man kann die Affektpermutationen

$$x_{\xi\eta\dots\zeta} \mid x_{\xi'\eta'\dots\zeta'},$$

welche ein ganzer bereichsmäßiger Ausdruck $\mathfrak{F}(x_{\xi\eta\ldots\zeta})$ der Wurzeln $x_{\xi\eta\ldots\zeta}$ vertragen muß, um einen bereichsmäßigen Wert $\mathfrak{B}$ anzunehmen, wie folgt ermitteln:

Die Gleichung

$$\mathfrak{F}(x_{\xi\eta\ldots\zeta}) - \mathfrak{B} = 0$$

kann als ganze, bereichsmäßige Gleichung zwischen

$$\omega,\ \varrho,\ \mathfrak{K}(\varrho)^{\frac{1}{p}},\quad \mathfrak{K}(\varrho_1)^{\frac{1}{p}},\ \ldots,\ \mathfrak{K}(\varrho_{n-1})^{\frac{1}{p}}$$

aufgefaßt werden und muß demnach bestehen bleiben, wenn

$$\mathfrak{K}(\varrho)^{\frac{1}{p}},\quad \mathfrak{K}(\varrho_1)^{\frac{1}{p}},\ \ldots,\ \mathfrak{K}(\varrho_{n-1})^{\frac{1}{p}}$$

durch

$$\omega^{\alpha}\mathfrak{K}(\varrho)^{\frac{1}{p}},\quad \omega^{\beta}\mathfrak{K}(\varrho_1)^{\frac{1}{p}},\ \ldots,\ \omega^{\varepsilon}\mathfrak{K}(\varrho_{n-1})^{\frac{1}{p}}$$

ersetzt werden, wo $\alpha, \beta, \ldots, \varepsilon$ beliebige Zahlen der Reihe $0, 1, \ldots, p-1$ bezeichnen. Da hierbei $x_{\xi\eta\ldots\zeta}$ für alle Werte von $\xi, \eta, \ldots, \zeta$ in $x_{\xi+\alpha,\,\eta+\beta,\,\ldots,\,\zeta+\varepsilon}$ übergeht, so ist

$$\mathfrak{F}(x_{\xi+\alpha,\,\eta+\beta,\,\ldots,\,\zeta+\varepsilon}) - \mathfrak{B} = 0.$$

Somit ist

$$\mathfrak{F}(x_{\xi+\alpha,\,\eta+\beta,\,\ldots,\,\zeta+\varepsilon}) = \mathfrak{F}(x_{\xi\eta\ldots\zeta}),$$

und $\mathfrak{F}$ muß alle Substitutionen

$$x_{\xi\eta\ldots\zeta} \,|\, x_{\xi+\alpha,\,\eta+\beta,\,\ldots,\,\zeta+\varepsilon}$$

zulassen.

Der Ausdruck (8) hat die Gestalt

$$\sum_{\varphi} \omega^{\overline{e\varphi}}\mu(\varphi)\,\mathfrak{K}(\varrho)^{\frac{1}{p}e_0\varphi},\ \mathfrak{K}(\varrho_1)^{\frac{1}{p}e_1\varphi}\ \ldots\ \mathfrak{K}(\varrho_{n-1})^{\frac{1}{p}e_{n-1}\varphi},$$

wo $\mu(\varphi)$ in $(\mathfrak{R}, \varrho)$ liegt, und es sei

$$x'_{\xi\eta\ldots\zeta} = \sum_{\varphi} \omega^{\overline{e\varphi}}\,\mu(\varphi)\,y_0^{e_0\varphi}\,y_1^{e_1\varphi},\ \ldots,\ y_{n-1}^{e_{n-1}\varphi},$$

wo $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$ Unbestimmte bedeuten. Der Ausdruck $\mathfrak{F}(x'_{\xi\eta\ldots\zeta}) - \mathfrak{B}$ nimmt mittels einer Reihe von aufeinander folgenden Divisionen durch die Teiler

$$y_0^p - \mathfrak{K}(\varrho),\quad y_1^p - \mathfrak{K}(\varrho_1),\ \ldots,\ y_{n-1}^p - \mathfrak{K}(\varrho_{n-1})$$

in bezug auf $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$ die Gestalt

$$\mathfrak{F}(x'_{\xi\eta\ldots\zeta}) - \mathfrak{B} = R + Q(y^p - \mathfrak{K}(\varrho_0)) + Q_1(y_1^p - \mathfrak{K}(\varrho_1)) + \cdots + Q_{n-1}(y_{n-1}^p - \mathfrak{K}(\varrho_{n-1}))$$

an, wo $R, Q, Q_1, \ldots, Q_{n-1}$ ganze Funktionen von $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$ mit Koeffizienten in $(\mathfrak{R}, \varrho, \omega)$ sind und R in bezug auf keine der Unbestimmten $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$ den Grad p erreicht. Da $\mathfrak{F}(x'_{\xi\eta\ldots\zeta}) - \mathfrak{B}$ für

$$y_0 = \mathfrak{K}(\varrho_0)^{\frac{1}{p}},\quad y_1 = \mathfrak{K}(\varrho_1)^{\frac{1}{p}},\ \ldots,\ y_{n-1} = \mathfrak{K}(\varrho_{n-1})^{\frac{1}{p}}$$

verschwindet, so gilt dasselbe von R, und es ist identisch in $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$

$$R = 0$$

$$(10) \quad \mathfrak{F}(x'_{\xi\eta\ldots\zeta}) - \mathfrak{B} = Q(y_0^p - \Re(\varrho)) + Q_1(y_1^p - \Re(\varrho_1)) + \cdots .$$

Bezeichnet $\Omega(x, \varrho)$ den in $(\Re, \varrho)$ irreduktibelen Faktor von $x^p - 1$, welcher für $x = \omega$ verschwindet, so hat die Gleichung

$$\Omega(x, \varrho) = 0$$

die Wurzeln

$$\omega^{c_0}, \omega^{c_1}, \ldots, \omega^{c_{\nu-1}},$$

wo ν den Grad von Ω und $c_0, c_1, \ldots, c_{\nu-1}$ die Wurzeln der Kongruenz

$$z^\nu \equiv 1 \quad (p)$$

bedeuten. Man darf in der Identität (10) ω, ϱ durch ω^{c_i} und eine beliebige Unterbauwurzel ψ^{-1} ersetzen, wodurch $Q, Q_1, \ldots$ in $Q', Q'_1, \ldots$ übergehen mögen. Es wird dann, da $x'_{\xi\eta\ldots\zeta}$ in

$$\sum_{\varphi} \omega^{c_i e\overline{\varphi}}\, \mu(\varphi\psi^{-1})\, y_0^{e_0\varphi}\, y_1^{e_1\varphi} \ldots\ y_{n-1}^{e_{n-1}\varphi}$$

übergeht,

$$\mathfrak{F}\left(\sum \omega^{c_i e\overline{\varphi}}\, \mu(\varphi\psi^{-1})\, y_0^{e_0\varphi}\, y_1^{e_1\varphi} \ldots\right) - \mathfrak{B} = Q'(y_0^p - \Re(\varrho\psi^{-1})) + \cdots,$$

und die Ersetzung von $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$ durch

$$\Re(\varrho\psi^{-1})^{\frac{1}{p}}, \quad \Re(\varrho_1\psi^{-1})^{\frac{1}{p}}, \ldots, \Re(\varrho_{n-1}\psi^{-1})^{\frac{1}{p}}$$

ergibt

$$\mathfrak{F}\left(\sum \omega^{c_i e\overline{\varphi}}\, \mu(\varphi\psi^{-1})\, \Re(\psi^{-1})^{\frac{1}{p}e_0\varphi}\, \Re(\varrho_1\psi^{-1})^{\frac{1}{p}e_1\varphi} \ldots\right) = \mathfrak{F}\left(\sum \omega^{c_i e\overline{\varphi}}\, \Re(\varphi\psi^{-1})^{\frac{1}{p}} \ldots\right)$$

$$= \mathfrak{F}\left(\sum \omega^{c_i e\overline{\varphi\psi}}\, \Re(\varphi)^{\frac{1}{p}} \ldots\right) = \mathfrak{F}(x_{c_i e\overline{\varrho\psi}, c_i e\overline{\varrho_1\psi}, \ldots}) = \mathfrak{B}\,.$$

$\mathfrak{F}(x_{\xi\eta\ldots\zeta})$ muß danach alle Substitutionen

$$(11) \qquad x_{\xi\eta\ldots\zeta} \mid x_{c_i e\overline{\varrho\psi}, c_i e\overline{\varrho_1\psi}, \ldots, c_i e\overline{\varrho_{n-1}\psi}}$$

vertragen.

Hiernach muß $\mathfrak{F}(x_{\xi\eta\ldots\zeta})$ alle p^n-ten Substitutionen

$$x_{\xi\eta\ldots\zeta} \mid x_{\alpha+c_i e\overline{\varrho\psi}, \beta+c_i e\overline{\varrho_1\psi}, \ldots, \varepsilon+c_i e\overline{\varrho_{n-1}\psi}}$$

zulassen.

Verträgt umgekehrt ein Ausdruck $\mathfrak{F}(x_{\xi\eta\ldots\zeta})$ alle diese Substitutionen, so hat er einen bereichsmäßigen Wert.

Denn die Gleichung

$$F(x_{\xi+\alpha, \eta+\beta, \ldots, \zeta+\varepsilon}) = \mathfrak{F}(x_{\xi\eta\ldots\zeta})$$

zeigt zunächst, daß aus $\mathfrak{F}(x_{\xi\eta\ldots\zeta})$ alle Wurzeln

$$\Re(\varrho)^{\frac{1}{p}}, \quad \Re(\varrho_1)^{\frac{1}{p}}, \ldots, \Re(\varrho_{n-1})^{\frac{1}{p}}$$

herausfallen müssen, also nur eine ganze bereichsmäßige Funktion von ω, ϱ zurückbleibt. Diese Funktion bleibt auf Grund der Substitutionen (11) ungeändert, wenn ω, ϱ durch ω^{c_i}, ψ ersetzt werden und fällt demzufolge in den Bereich $\mathfrak{R}$.

6.

Beispiel I. Der Unterbau sei eine irreduktibele zyklische Gleichung l-ten Grades

$$\mathfrak{U} = 0$$

des Bereichs $\mathfrak{R}$ mit den Wurzeln

$$\varrho, \varrho_1, \ldots, \varrho_{l-1}$$

wo ϱ_1 eine ganze bereichsmäßige Funktion von ϱ ist und $\varrho_2, \varrho_3, \ldots$ die wiederholten Funktionen von ϱ_1 bedeuten.

p sei eine nach dem Modul l zum Exponenten n gehörende Primzahl. Die für die primitiven l-ten Einheitswurzeln verschwindende ganze ganzzahlige irreduktibele Funktion zerfällt nach dem Modul p in Urfunktionen n-ten Grades, deren eine mit P bezeichnet werde. x gehört nach dem Doppelmodul P, p zum Exponenten l.

Der den Grad n nicht erreichende Rest einer ganzen ganzzahligen Funktion u von x in bezug auf den Teiler P werde mit $[u]$, die aus $[u]$ nach Ersetzung der Potenzen $x^0, x^1, \ldots, x^{n-1}$ durch die Unbestimmten

$$x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$$

hervorgehende lineare Form der letzteren mit $\overline{u}$ bezeichnet.

Die Formen

$$\overline{u}, \quad \overline{xu}, \quad \overline{x^2 u}, \ldots, \overline{x^{n-1} u}$$

sind in bezug auf p linear unabhängig, wenn u nicht durch P, p teilbar ist. Denn irgend n ganze Zahlen $g_0, g_1, \ldots, g_{n-1}$, für welche der Ausdruck

$$g_0 \overline{u} + g_1 \overline{xu} + \cdots + g_{n-1} \overline{x^{n-1} u}$$

durch p teilbar ist, genügen den Kongruenzen

$$\begin{aligned} 0 &\equiv g_0 [u] + g_1 [xu] + \cdots + g_{n-1} [x^{n-1} u] \qquad (p) \\ &\equiv u(g_0 + g_1 x + \cdots + g_{n-1} x^{n-1}) \qquad (P, p), \end{aligned}$$

und es muß, da u nicht $\equiv 0$ (P, p) ist,

$$\begin{aligned} g_0 + g_1 x + \cdots + g_{n-1} x^{n-1} &\equiv 0 \qquad (P, p) \\ g_0 \equiv 0, \quad g_1 &\equiv 0, \ldots, g_{n-1} \equiv 0 \qquad (p) \end{aligned}$$

sein.

Man kann demnach eine nach dem Modul p zu nehmende, linear-homogene Substitution

$$[\overline{u}, \quad \overline{xu}, \ldots, \overline{x^{n-1} u}]$$

bilden, welche mit su bezeichnet werde.

Ist

$$[x^k u] = c_0 + c_1 x + \cdots + c_{n-1} x^{n-1},$$

also

$$\overline{x^k u} = c_0 x_0 + c_1 x_1 + \cdots + c_{n-1} x_{n-1},$$

und v eine ebenfalls zu P, p teilerfremde ganze ganzzahlige Funktion von x, so ist

$$[x^k u v] \equiv c_0 [v] + c_1 [x v] + \cdots + c_{n-1} [x^{n-1} v] \qquad (p)$$

und daher

$$\begin{aligned} \overline{x^k u v} &\equiv c_0 \overline{v} + c_1 \overline{x v} + \cdots + c_{n-1} \overline{x^{n-1} v} && (p) \\ &\equiv \overline{x^k u} \,|\, s v && (p). \end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$s u v = s u s v .$$

Hiernach ist die Gruppe der Wurzeln

$$1, x, x^2, \ldots, x^{l-1}$$

der Kongruenz

$$z^l \equiv 1 \qquad (P, p)$$

mit der Gruppe der Substitutionen

$$s1, sx, sx^2, \ldots, sx^{l-1}$$

in Isomorphie, wenn $s x^m$ der Wurzel x^m zugeteilt wird. Versteht man demnach unter $s\varrho_k$ die Substitution $s x^k$, so ist auch die Gruppe der Wurzeln des Unterbaus mit der Gruppe der Substitutionen

$$(12) \qquad s\varrho, s\varrho_1, \ldots, s\varrho_{l-1}$$

isomorph, wenn $(\varrho_k, s\varrho_k)$ als Isomorphiepaare festgesetzt werden.

Als Exponentenform der Wurzel ϱ_k ist die Form $\overline{x^k}$ zu nehmen. Die Exponentenformen von $\varrho, \varrho_1, \ldots, \varrho_{n-1}$ sind $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$.

Es ist

$$\mathfrak{D} = \begin{vmatrix} 1, & 0, & \ldots\ldots\ldots, 0 \\ e_0 \varrho_{-1}, & 1, & 0, \ldots\ldots\ldots, 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ e_0 \varrho_{-n+1}, & e_0 \varrho_{-n+2}, & \ldots, 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Man kann demnach die Substitutionen (12) als zugehörige Gruppe des Unterbaus nehmen.

Bei passender Wahl von $f(\varrho)$ sind daher die Ausdrücke

$$x_{\xi\eta\ldots\zeta} = \sum_k \omega^{\overline{e\varrho_k}} \mathfrak{R}(\varrho_k)^{\frac{1}{p}}$$

$$\mathfrak{R}^{\frac{1}{p}}(\varrho_k) = \prod_h f(\varrho_h)^{\frac{1}{p} e_0(e_{k-h})}$$

die Wurzeln einer bereichsmäßigen irreduktibelen Gleichung vom Grade p^n, welche algebraisch lösbar ist.

Nimmt man $p = 2$ und für den Unterbau eine rationalzahlige, irreduktibele, zyklische Gleichung 7-ten Grades, so erhält man die von *H. Weber* aufgestellte algebraisch lösbare Gleichung 8-ten Grades.

7.

Beispiel II. Es seien $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ die Wurzeln einer bereichsmäßigen, irreduktibelen, zyklischen Gleichung 3-ten Grades und es werde der Kürze halber

$$A = 1 + \mathfrak{a}^2 + \mathfrak{a}^2\mathfrak{b}^2, \quad B = 1 + \mathfrak{b}^2 + \mathfrak{b}^2\mathfrak{c}^2, \quad C = 1 + \mathfrak{c}^2 + \mathfrak{c}^2\mathfrak{a}^2,$$

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}, \qquad t = \frac{1}{1 - \mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}},$$

$$D = ABCt^2 - A - B - C + 2 - 2\mathfrak{p}^2,$$

$$m = \frac{D}{ABC},$$

$$\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{b}\mathfrak{c} + \mathfrak{a}tB, \quad \mathfrak{b}_1 = \mathfrak{c}\mathfrak{a} + \mathfrak{b}tC, \quad \mathfrak{c}_1 = \mathfrak{a}\mathfrak{b} + \mathfrak{c}tA,$$

$$u = \frac{1}{\sqrt{B}\sqrt{C}}, \qquad v = \frac{1}{\sqrt{C}\sqrt{A}}, \qquad w = \frac{1}{\sqrt{A}\sqrt{B}},$$

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{a}_1 w + \mathfrak{a} v, \quad \mathfrak{B} = \mathfrak{b}_1 u + \mathfrak{b} w, \quad \mathfrak{C} = \mathfrak{c}_1 v - \mathfrak{c} u,$$

$$\mathfrak{A}' = \mathfrak{a}_1 w - \mathfrak{a} v, \quad \mathfrak{B}' = \mathfrak{b}_1 u - \mathfrak{b} w, \quad \mathfrak{C}' = \mathfrak{c}_1 v - \mathfrak{c} u$$

gesetzt. Man findet

$$\mathfrak{A}\mathfrak{A}' = m, \quad \mathfrak{B}\mathfrak{B}' = m, \quad \mathfrak{C}\mathfrak{C}' = m,$$

$$\mathfrak{a}\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1 B + \mathfrak{a}_1\mathfrak{b}\mathfrak{c} C = D,$$

$$\mathfrak{b}\mathfrak{c}_1\mathfrak{a}_1 C + \mathfrak{b}_1\mathfrak{c}\mathfrak{a} A = D,$$

$$\mathfrak{c}\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1 A + \mathfrak{c}_1\mathfrak{a}\mathfrak{b} B = D,$$

$$\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1 + \mathfrak{p} = Dt,$$

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C} = m(t + u + v + w),$$

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B}'\mathfrak{C}' = m(t + u - v - w),$$

$$\mathfrak{A}'\mathfrak{B}\mathfrak{C}' = m(t - u + v - w),$$

$$\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'\mathfrak{C} = m(t - u - v + w).$$

Setzt man

$$z_0 = \sqrt{\frac{\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}}{m}} = \sqrt[4]{t + u + v + w},$$

$$z_1 = \sqrt{\frac{\mathfrak{A}\mathfrak{B}'\mathfrak{C}'}{m}} = \sqrt[4]{t + u - v - w},$$

$$z_2 = \sqrt{\frac{\mathfrak{A}'\mathfrak{B}\mathfrak{C}'}{m}} = \sqrt{t - u + v - w},$$

$$z_3 = \sqrt{\frac{\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'\mathfrak{C}}{m}} = \sqrt{t - u - v + w},$$

$$z_4 = -z_0, \quad z_5 = -z_1, \quad z_6 = -z_2, \quad z_7 = -z_3,$$

$$F(y) = y^8 - 4ty^6 + \left(6t^2 - 2\left(\frac{A+B+C}{ABC}\right)\right)y^4 - 4\,\frac{(Dt - 2\mathfrak{p})}{ABC}\,y^2 + \frac{D^2}{A^2B^2C^2},$$

so finden die Gleichungen

$$z_0 z_1 = \mathfrak{A}, \quad z_0 z_2 = \mathfrak{B}, \quad z_0 z_3 = \mathfrak{C},$$
$$z_2 z_3 = \mathfrak{A}', \quad z_3 z_1 = \mathfrak{B}', \quad z_1 z_2 = \mathfrak{C}',$$
$$z_0^2 + z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 4t,$$
$$z_0^2 z_1^2 + z_2^2 z_3^2 + z_0^2 z_2^2 + z_1^2 z_3^2 + z_0^2 z_3^2 + z_2^2 z_2^2 = 6t^2 - 2\left(\frac{A+B+C}{ABC}\right),$$
$$z_0^2 z_1^2 z_2^2 + z_0^2 z_1^2 z_3^2 + z_0^2 z_2^2 z_3^2 + z_1^2 z_2^2 z_3^2 = 4\left(\frac{Dt - 2\mathfrak{p}}{ABC}\right),$$
$$z_0^2 z_1^2 z_2^2 z_3^2 = m^2$$

statt.

Hiernach sind die Ausdrücke

$$z_0, z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6, z_7$$

die Wurzeln der bereichsmäßigen Gleichung 8-ten Grades

$$F = 0,$$

welche irreduktibel vorausgesetzt wird.

Die Gleichung

$$F = 0$$

ist in dem Bereich $(\mathfrak{R}, \mathfrak{a})$ eine Normalgleichung.

Denn die Ausdrücke

$$u + v + w, \quad BCu + CAv + ABw, \quad Au + Bv + Cw$$

ergeben sich aus der Gleichung

$$z_0^2 - t = u + v + w$$

als lineare Formen χ_1, χ_2, χ_3 von $1, z_0^2, z_0^4, z_0^6$ mit Koeffizienten des Bereichs $(\mathfrak{R}, \mathfrak{a})$.

Die Gleichungen

$$u + v + w = \chi_1$$
$$BCu + CAv + ABw = \chi_2$$
$$Au + Bv + Cw = \chi_3$$

sind wegen der Ungleichheit von A, B, C nach u, v, w auflösbar, und man erhält durch Einsetzung der für u, v, w gefundenen Ausdrücke in die Gleichungen

$$(13) \qquad z_1 = \frac{\mathfrak{a}_1 w + \mathfrak{a} v}{z_0}, \quad z_2 = \frac{\mathfrak{b}_1 u + \mathfrak{b} w}{z_0}, \quad z_0 = \frac{\mathfrak{c}_1 v + \mathfrak{c} u}{z_0}$$

die Wurzeln z_1, z_2, z_3 als ganze Funktionen von z_0 mit Koeffizienten des Bereichs $(\mathfrak{R}, \mathfrak{a})$.

Führt man in den vorstehenden Gleichungen (13) die Substitutionen $z_0 \mid z_1, z_0 \mid z_2$ aus und beachtet, daß u, v, w hierbei in $u, -v, -w$ bzw. in $-u, v, -w$ übergehen, so ergibt sich

$$z_0|z_1 = z_1$$
$$z_1|z_1 = \frac{-\mathfrak{a}_1 w - \mathfrak{a} v}{z_1} = \frac{-\mathfrak{A}}{z_1} = -z_0 = z_4$$
$$z_2|z_1 = \frac{\mathfrak{b}_1 u - \mathfrak{b} w}{z_1} = \frac{\mathfrak{B}'}{z_1} = z_3$$
$$z_3|z_1 = \frac{-\mathfrak{c}_1 w + \mathfrak{c} u}{z_1} = \frac{-\mathfrak{C}'}{z_1} = -z_2 = z_6$$
$$z_0|z_2 = z_2$$
$$z_1|z_2 = \frac{-\mathfrak{a}_1 w + \mathfrak{a} v}{z_2} = \frac{-\mathfrak{A}'}{z_2} = -z_3 = z_7$$
$$z_2|z_2 = \frac{-\mathfrak{b}_1 u - \mathfrak{b} w}{z_2} = \frac{-\mathfrak{B}}{z_2} = -z_0 = z_4$$
$$z_3|z_2 = \frac{\mathfrak{c}_1 v - \mathfrak{c} u}{z_2} = \frac{\mathfrak{C}'}{z_2} = z_1 .$$

Bezeichnet man die Permutationen der Wurzeln z_j mittels ihrer Stellenzeiger und setzt

$$a = (0\,1\,4\,5)\,(2\,3\,6\,7)$$
$$b = (0\,2\,4\,6)\,(1\,7\,5\,3)$$
$$c = (0\,3\,4\,7)\,(1\,2\,5\,6) = ba$$
$$d = (0\,4)\,(1\,5)\,(2\,6)\,(3\,7) = a^2 = b^2 = c^2$$
$$f = (1\,2\,3)\,(5\,6\,7)\,,$$

so bilden die Permutationen

$$1,\ a,\ b,\ c,\ d,\ da,\ db,\ dc$$

eine Gruppe 8-ter Ordnung H und auf Grund der Gleichungen

$$f^{-1}af = b, \quad f^{-1}bf = c, \quad f^{-1}cf = a$$

ist

$$f^{-1}Hf = H .$$

Die Inbegriffe

$$H, \quad Hf, \quad Hf^2$$

bilden daher eine Gruppe 24-ter Ordnung G, von welcher H eine selbst-konjugierte Untergruppe ist.

Es sei

$$U = u_0 z_0 + u_1 z_1 + \cdots + u_7 z_7$$

eine lineare Form der Wurzeln z_j mit unbestimmten Koeffizienten $u_0, u_1, \ldots$ und U_q das Resultat der Ausführung der Permutation q der Wurzeln z_j an U.

Die über die Permutationen h der Gruppe H erstreckte Summe

$$\sum U_h^m$$

kann als ganze bereichsmäßige Funktion $\varphi_m(\mathfrak{a})$ von $\mathfrak{a}$ und der Unbestimmten u_j dargestellt und auf die Form

$$\sum U_h^m = \varphi_m\left(\frac{2 z_0 z_1 - 2 z_2 z_3}{z_0^2 - z_1^2 + z_2^2 - z_3^2}\right) = \varphi_m(\mathfrak{a})$$

gebracht werden. Die Ausführung von f, f^2 ergibt dann

$$\sum U_{hf}^m = \varphi_m\left(\frac{2z_0z_2 - 2z_3z_1}{z_0^2 - z_1^2 - z_2^2 + z_3^2}\right) = \varphi_m(b),$$

$$\sum U_{hff}^m = \varphi_m\left(\frac{2z_0z_3 - 2z_1z_2}{z_0^2 + z_1^2 - z_2^2 - z_3^2}\right) = \varphi_m(c).$$

Hieraus folgt, über alle Permutationen q von G erstreckt,

$$\sum U_q^m = \varphi_m(a) + \varphi_m(b) + \varphi_m(c).$$

Das Produkt

$$\prod (y - U_q)$$

ist daher eine bereichsmäßige ganze Funktion $\Phi(y)$ der Unbestimmten $y, u_0, u_1, \ldots$

Da die Werte, welche U bei den Permutationen q annimmt, in $u_0, u_1, \ldots$ unidentisch sind, so können ganze Zahlen $c_0, c_1, \ldots$ von der Art ermittelt werden, daß die Werte, welche aus dem Ausdruck

$$\varrho = c_0z_0 + c_1z_1 + \cdots + c_7z_7$$

durch alle Permutationen q von G hervorgehen, ungleich ausfallen.

Es seien $\Psi(y)$, $\Psi_i(y)$ die Funktionen, in welche $\Phi(y)$, $\Phi_i(y) = \frac{\partial \Phi(y)}{\partial u_i}$ nach Ersetzung der Unbestimmten u_j durch die Zahlen c_j übergehen. Da identisch in $u_0, u_1, \ldots$

$$\Phi(U) = 0$$

ist, so ergibt die Differentiation nach u_i

$$\Phi'(U)z_i + \Phi_i(U) = 0,$$

und es wird nach Ersetzung der Unbestimmten u_j durch die Zahlen c_j

$$\Psi'(\varrho)z_i + \Psi_i(\varrho) = 0, \qquad z_i = \frac{\Psi_i(\varrho)}{\Psi'(\varrho)}.$$

Hiernach ist die Gleichung

$$\Psi(y) = 0$$

eine *Galois*sche Resolvente der Gleichung

$$F(y) = 0,$$

da die Wurzeln z_j als ganze bereichsmäßige Funktionen von ϱ darstellbar sind und ϱ eine ganzzahlige Form der Wurzeln z_j ist.

Die Affektpermutationen sind die der Gruppe G.

Die Gleichung

$$\Psi(y) = 0$$

werde als Unterbau genommen. Eine zugehörige Gruppe $\mathfrak{A}$ ist dann eine der in der Abhandlung von *C. Jordan* (Journal de math. (2) 13, p. 111) gegebenen Gruppen.

Um diese Gruppe aufzustellen, sei p eine beliebig gegebene ungerade Primzahl, (r, s) eine ganzzahlige Lösung der Kongruenz

$$r^2 + s^2 + 1 \equiv 0 \quad (p),$$

wo im Falle $p \equiv 1\ (4)$ $s = 0$ zu setzen ist, und der Kürze halber

$$\mathfrak{a}_1 = \tfrac{1}{2}(-1 - r + s), \quad \mathfrak{b}_1 = \tfrac{1}{2}(-1 - r - s), \quad \mathfrak{c}_1 = \tfrac{1}{2}(1 - r - s),$$
$$\mathfrak{d}_1 = \tfrac{1}{2}(-1 + r - s).$$

Man setze, unter x, y Unbestimmte verstanden,

$$e = [-x, -y]$$
$$s = [y, -x], \quad t = [rx + sy, sx - ry], \quad u = [-sx + ry, rx + sy]$$
$$v = [\mathfrak{a}_1 x + \mathfrak{b}_1 y, \mathfrak{c}_1 x + \mathfrak{d}_1 y].$$

Es ist

$$s^2 = t^2 = u^2 = e$$
$$v^2 = [\mathfrak{d}_1 x - \mathfrak{b}_1 y, -\mathfrak{c}_1 x + \mathfrak{d}_1 y] = v^{-1}$$
$$v^3 = 1$$
$$tu = eut = es$$
$$us = esu = et$$
$$st = etu = eu$$
$$v^{-1} s v = t, \qquad v^{-1} t v = u, \qquad v^{-1} u v = s.$$

Die Substitutionen

$$1, e, s, t, u, es, et, eu$$

bilden eine Gruppe Γ, welche eine selbst-konjugierte Untergruppe der Gruppe

$$\mathcal{A} = \Gamma, \Gamma v, \Gamma v^2$$

ist.

Die Gruppen $G, \mathcal{A}$ sind isomorph. Um die Isomorphiepaare bequem angeben zu können, ist zu bemerken, daß alle Permutationen von G auf die Form $a^\alpha b^\beta f^\gamma$, alle Substitutionen von $\mathcal{A}$ auf die Form $s^\alpha t^\beta v^\gamma$ gebracht werden können. Die Isomorphiepaare lauten dann

$$(a^\alpha b^\beta f^\gamma, \quad s^\alpha t^\beta v^\gamma).$$

Mit Hilfe der Formeln

$$c^m = d^{\frac{1}{2}m(m-1)} b^m a^m$$
$$a^\lambda b^\mu = d^{\lambda\mu} b^\mu a^\lambda$$

nimmt das Produkt

$$a^\alpha b^\beta f^\gamma \cdot a^{\alpha'} b^{\beta'} f^{\gamma'},$$

wenn zunächst $f^\gamma a^{\alpha'}$ durch $c^{\alpha'} f^\gamma$, hierauf $f^\gamma b^{\beta'}$ durch $a^{\beta'} f^\gamma$ ersetzt wird, schrittweise die Gestalten

$$a^\alpha b^\beta c^{\alpha'} f^\gamma b^{\beta'} f^{\gamma'}, \qquad a^\alpha b^\beta c^{\alpha'} a^{\beta'} f^{\gamma+\gamma'}$$

an. Wird dann $c^{\alpha'}$ durch $d^{\frac{1}{2}\alpha'(\alpha'-1)} b^{\alpha'} a^{\alpha'}$, hierauf $b^{\beta+\alpha'} a^{\alpha'+\beta'}$ durch $d^{(\beta+\alpha')(\alpha'+\beta')} a^{\alpha'+\beta'} b^{\beta+\alpha'}$ ersetzt, so erhält man die Permutation

$$d^{\frac{1}{2}\alpha'(\alpha'-1)+(\beta+\alpha')(\alpha'+\beta')} a^{\alpha+\alpha'+\beta'} b^{\beta+\alpha'} f^{\gamma+\gamma'},$$

welche in der Gestalt $a^{\alpha''} b^{\beta''} f^{\gamma''}$ erscheint, wenn die Reste der Exponenten

$$\alpha'(\alpha' - 1) + 2(\beta + \alpha')(\beta' + \alpha') + \alpha + \alpha' + \beta',\ \beta + \alpha',\ \gamma + \gamma'$$

in bezug auf die Moduln 4, 4, 3 mit $\alpha'', \beta'', \gamma''$ bezeichnet werden.

In derselben Weise ergibt sich für das Produkt

$$s^{\alpha} t^{\beta} v^{\gamma} \cdot s^{\alpha'} t^{\beta'} v^{\gamma'}$$

durch analoge schrittweise Umwandlungen die Substitution $s^{\alpha''} t^{\beta''} v^{\gamma''}$.

Die Zusammensetzung der Isomorphiepaare

$$(a^{\alpha} b^{\beta} f^{\gamma}, s^{\alpha} t^{\beta} v^{\gamma}), \quad (a^{\alpha'} b^{\beta'} f^{\gamma'}, s^{\alpha'} t^{\beta'} v^{\gamma'})$$

führt somit wieder zu einem Isomorphiepaar

$$(a^{\alpha''} b^{\beta''} f^{\gamma''}, \quad s^{\alpha''} t^{\beta''} v^{\gamma''}).$$

Die Wurzelgruppe

$$\varrho, \varrho_a, \varrho_b, \ldots, \varrho_{dcff}$$

des Unterbaus ist daher ebenfalls mit $\mathcal{A}$ isomorph. Die Basiswurzeln sind ϱ, ϱ_a.

Die Determinante

$$\begin{vmatrix} e_0 \varrho, & e_0 \varrho_a \\ e_0 \varrho_{ad}, & e_0 \varrho \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

ist zu p teilerfremd.

Bei passender Wahl von $f(\varrho)$ sind daher die Ausdrücke

$$x_{\xi\eta} = \sum \omega^{e_0 \varrho_q} \mathfrak{R}(\varrho_q)^{\frac{1}{p}}$$

$$\mathfrak{R}(\varrho_q)^{\frac{1}{p}} = \prod f(\varrho_r)^{\frac{1}{p} e_0 \varrho_{qr}^{-1}}$$

die Wurzeln einer bereichsmäßigen irreduktibelen Gleichung vom Grade p^2.

Nimmt man $p = 3$, $r = s = 1$, so erhält man die Gleichung 9-ten Grades mit der Gruppe 216-ter Ordnung, welche aus den Permutationen

$$[x + \alpha,\ y + \beta], \qquad \alpha, \beta = 0, 1\ 2$$
$$e = [-x, -y]$$
$$s = [y, -x]$$
$$t = [x + y, x - y]$$
$$u = ts = [-x + y, x + y]$$
$$v = [x, x + y]$$

ableitbar ist.

Über lineare Gleichungssysteme in linearen Räumen.

Von *Hans Hahn* in Wien.

Bekanntlich sind die Integralgleichungen zweiter Art:

$$\varphi(s) + \int_a^b K(s,t)\,\varphi(t)\,dt = f(s)$$

der Untersuchung erheblich leichter zugänglich, als die Integralgleichungen erster Art:

$$\int_a^b K(s,t)\,\varphi(t)\,dt = f(s)\,.$$

Es liegt das offenbar daran, daß wir die Auflösung der Gleichung $\varphi(s) = f(s)$ vollständig beherrschen, und durch Hinzutreten des Zusatzgliedes $\int_a^b K(s,t)\,\varphi(t)\,dt$ die für die Gleichung $\varphi(s) = f(s)$ herrschenden durchsichtigen Verhältnisse nicht allzusehr gestört werden. Es liegt also die Frage nahe: sei in irgendeinem linearen Raume, dessen Punkte wir mit x bezeichnen, ein lineares Gleichungssystem gegeben:

$$u_y(x) = c_y\,,$$

von dem wir wissen, daß es auflösbar ist; unter welchen Umständen wird man daraus auf die Auflösbarkeit des linearen Gleichungssystemes:

$$u_y(x) + v_y(x) = c_y$$

schließen können [1])? Mit dieser Frage sollen sich die folgenden Zeilen beschäftigen. Als ausschlaggebend erweist sich dabei der in § 3 auseinandergesetzte Begriff der *Vollstetigkeit* des Systems der Linearformen $v_y(x)$ in bezug auf das System der Linearformen $u_y(x)$, der eine direkte Verallgemeinerung des von *Fr. Riesz* [2]) eingeführten Begriffes der Vollstetigkeit einer linearen Transformation darstellt.

§ 1.

Sei $\mathfrak{R}$ ein linearer Raum [3]); seine Punkte bezeichnen wir mit x. Ist dann λ eine reelle Zahl, so kommt neben x auch der Punkt λx in $\mathfrak{R}$ vor; sind x_1 und x_2 Punkte von $\mathfrak{R}$, so kommt auch der Punkt $x_1 + x_2$ in $\mathfrak{R}$ vor.

---

[1]) Im Falle der Integralgleichungen bedeutet x die Funktion $\varphi(s)$ und y durchläuft alle Werte des Intervalles $[a, b]$.

[2]) *Fr. Riesz*, Über lineare Funktionalgleichungen. Acta Math. 41, S. 71.

[3]) Näheres über lineare Räume: *H. Hahn*, Monatsh. f. Math. u. Phys. 32, S. 3 und insbes. *St. Banach*, Fund. math. 3, 131.

Sei in $\mathfrak{R}$ eine konvexe Maßbestimmung gegeben; d. h. es sei in $\mathfrak{R}$ eine Funktion $D(x)$ definiert mit folgenden Eigenschaften:

1. Es ist $D(x) \geqq 0$, und zwar $= 0$ dann und nur dann, wenn $x = 0$.

2. $$D(\lambda x) = |\lambda| D(x).$$ (2)

3. $$D(x_1 + x_2) \leqq D(x_1) + D(x_2).$$

Die Zahl $D(x_1 - x_2)$ gilt dann als der Abstand der Punkte x_1 und x_2. Auf Grund dieser Maßbestimmung ist $\mathfrak{R}$ ein *metrischer* Raum. Der Begriff des Grenzpunktes:

$$\underset{\nu \to \infty}{L}\, x_\nu = x$$

ist gegeben durch:

$$\lim_{\nu \to \infty} D(x_\nu - x) = 0.$$

Eine Punktfolge $\{x_n\}$ heißt eine *Cauchysche Folge*, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein ν_0 gibt, so daß:

$$D(x_\nu - x_{\nu'}) < \varepsilon \quad \text{für} \quad \nu \geqq \nu_0,\ \nu' \geqq \nu_0.$$

Besitzt jede *Cauchy*sche Folge einen Grenzpunkt, so heißt der Raum $\mathfrak{R}$ *vollständig*. Wir setzen im folgenden den linearen Raum $\mathfrak{R}$ als vollständig voraus.

Sei $\mathfrak{A}$ eine Punktmenge aus $\mathfrak{R}$. Es gibt dann einen kleinsten vollständigen linearen Teilraum von $\mathfrak{R}$, der $\mathfrak{A}$ enthält; er heiße: *der von $\mathfrak{A}$ aufgespannte lineare Raum*; seine Punkte bezeichnen wir als *Linearkombinationen der Punkte von $\mathfrak{A}$*; sie haben entweder die Gestalt $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n$, wo $x_1, x_2, \ldots, x_n$ Punkte von $\mathfrak{A}$ und $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ reelle Zahlen bedeuten — dann heißen sie *endliche Linearkombinationen* — oder sie sind Grenzpunkte *Cauchy*scher Folgen solcher endlicher Linearkombinationen.

Satz I. *Ist $\mathfrak{R}_0$ ein vollständiger linearer Teilraum von $\mathfrak{R}$, so gibt es eine mit $\mathfrak{R}_0$ beginnende wohlgeordnete Menge linearer Räume $\{\mathfrak{R}_\xi\}$ $(\xi \leqq a)$, die mit $\mathfrak{R}_a = \mathfrak{R}$ endigt, und in der stets $\mathfrak{R}_\xi$ echter Teil aller folgenden $\mathfrak{R}_{\xi'}$ $(\xi' > \xi)$ ist.*

Um dies einzusehen, nehmen wir an, die $\mathfrak{R}_\xi$ seien für $\xi < \xi_0$ schon bekannt (und echte Teile von $\mathfrak{R}$). Wir unterscheiden zwei Fälle: 1. Fall, ξ_0 sei keine Grenzzahl. Dann sei a ein beliebiger nicht zu $\mathfrak{R}_{\xi_0 - 1}$ gehöriger Punkt, und unter $\mathfrak{R}_{\xi_0}$ werde der lineare Raum verstanden, der von der Vereinigung von $\mathfrak{R}_{\xi_0}$ mit dem Punkte a aufgespannt wird. 2. Fall, ξ_0 sei eine Grenzzahl. Dann werde unter $\mathfrak{R}_{\xi_0}$ der von der Vereinigung aller $\mathfrak{R}_\xi$ $(\xi < \xi_0)$ aufgespannte lineare Raum verstanden. Dieses Verfahren muß abbrechen (d. h. $\mathfrak{R}_{\xi_0}$ muß mit $\mathfrak{R}$ zusammenfallen), bevor die Mächtigkeit der wohlgeordneten Menge $\{\mathfrak{R}_\xi\}$ die Mächtigkeit von $\mathfrak{R}$ übersteigt. Damit ist Satz I bewiesen.

Eine in einem linearen Raume $\mathfrak{R}$ definierte Funktion $f(x)$ heiße eine Linearform in $\mathfrak{R}$, wenn sie folgende Eigenschaften hat:

1. Für jeden Punkt x von $\mathfrak{R}$ und jedes reelle λ ist:

$$f(\lambda x) = \lambda f(x).$$

2. Für je zwei Punkte x_1 und x_2 von $\mathfrak{R}$ ist:

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2).$$

3. Es gibt eine Zahl M, so daß für alle x von $\mathfrak{R}$:

$$|f(x)| \leqq M D(x). \tag{1}$$

Man erkennt sofort, daß es unter allen diese Ungleichung erfüllenden Zahlen M eine kleinste gibt. Sie werde als die *Steigung* der Linearform $f(x)$ bezeichnet.

Da ferner aus den Eigenschaften 1., 2., 3. von $f(x)$ folgt:

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leqq M \cdot D(x_1 - x_2),$$

so sieht man, daß jede Linearform in $\mathfrak{R}$ *gleichmäßig stetig* ist. Wir werden uns nun überzeugen, daß es in $\mathfrak{R}$ Linearformen gibt, die nicht identisch verschwinden [1]).

Satz II. *Sei $\mathfrak{A}$ eine Punktmenge des linearen Raumes $\mathfrak{R}$, und sei $\mathfrak{R}_0$ der von $\mathfrak{A}$ aufgespannte lineare Raum. Damit es zu der auf $\mathfrak{A}$ definierten Funktion $f_0(x)$ eine Linearform $f(x)$ in $\mathfrak{R}_0$ gebe, die auf $\mathfrak{A}$ mit $f_0(x)$ übereinstimmt und deren Steigung $\leqq M$ ist, ist notwendig und hinreichend, daß für jede endliche Linearkombination $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n$ aus Punkten von $\mathfrak{A}$ die Ungleichung bestehe:*

$$|\lambda_1 f_0(x_1) + \lambda_2 f_0(x_2) + \cdots + \lambda_n f_0(x_n)| \leqq M D(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n). \tag{2}$$

Daß die Bedingung *notwendig* ist, leuchtet ein; es ist nur zu zeigen, daß sie auch *hinreichend* ist. Zunächst ergibt sich aus (2): ist $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n = 0$, so ist auch $\lambda_1 f_0(x_1) + \lambda_2 f_0(x_2) + \cdots + \lambda_n f_0(x_n) = 0$. Daraus schließt man weiter: ist $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n = \lambda_1' x_1' + \lambda_2' x_2' + \cdots + \lambda_{n'}' x_{n'}'$, so ist auch $\lambda_1 f_0(x_1) + \lambda_2 f_0(x_2) + \cdots + \lambda_n f_0(x_n) = \lambda_1' f_0(x_1') + \lambda_2' f_0(x_2') + \cdots + \lambda_{n'}' f_0(x_{n'}')$. Wir sehen also: setzen wir $f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n) = \lambda_1 f_0(x_1) + \lambda_2 f_0(x_2) + \cdots + \lambda_n f_0(x_n)$, so ist dadurch $f(x)$ in allen Punkten von $\mathfrak{R}_0$, die endliche Linearkombinationen aus Punkten von $\mathfrak{A}$ sind, eindeutig definiert. Sei nun x_0 ein beliebiger Punkt von $\mathfrak{R}_0$. Es gibt dann eine gegen x_0 konvergierende Folge $\{x_\nu\}$ endlicher Linearkombinationen aus Punkten von $\mathfrak{A}$. Aus (2) folgt:

$$|f(x_\nu) - f(x_{\nu'})| \leqq M D(x_\nu - x_{\nu'}).$$

Da wegen $x_\nu \to x_0$ die x_ν eine *Cauchy*sche Punktfolge bilden, so bilden also die $f(x_\nu)$ eine *Cauchy*sche Folge reeller Zahlen. Wir sehen also: für jede gegen x_0 konvergierende Folge $\{x_\nu\}$ von endlichen Linearkombinationen aus Punkten von $\mathfrak{A}$ existiert $\lim_{\nu\to\infty} f(x_\nu)$, und ein bekannter Schluß zeigt, daß dieser Grenzwert für alle solchen Folgen derselbe ist. Wir können also setzen: $f(x_0) = \lim_{\nu\to\infty} f(x_\nu)$, und haben dadurch $f(x)$ auf ganz $\mathfrak{R}_0$ definiert.

Es ist noch zu zeigen, daß die so definierte Funktion eine Linearform in $\mathfrak{R}_0$ ist, und daß ihre Steigung $\leqq M$ ist. Daß die Eigenschaften 1. und 2. einer Linearform erfüllt sind, leuchtet ein. Sei ferner x ein beliebiger Punkt von $\mathfrak{R}_0$ und $\{x_\nu\}$ eine gegen ihn konvergierende Folge endlicher Linearkombinationen aus Punkten von $\mathfrak{A}$. Wegen (2) ist:

---

[1]) Vgl. zum folgenden *E. Helly*, Monatsh. f. Math. u. Phys. 31, S. 75ff.

$$|f(x_\nu)| \leqq M D(x_\nu).$$

Durch den Grenzübergang $\nu \to \infty$ folgt aber daraus:

$$|f(x)| \leqq M D(x),$$

also hat $f(x)$ auch die Eigenschaft 3. einer Linearform und ihre Steigung ist $\leqq M$. Damit ist Satz II bewiesen.

Satz III. *Sei $\mathfrak{R}_0$ ein vollständiger linearer Teilraum von $\mathfrak{R}$ und $f_0(x)$ eine Linearform in $\mathfrak{R}_0$ der Steigung M. Dann gibt es eine Linearform $f(x)$ in $\mathfrak{R}$ der Steigung M, die auf $\mathfrak{R}_0$ mit $f_0(x)$ übereinstimmt.*

Sei $\mathfrak{R}_\xi (\xi \leqq a)$ die mit $\mathfrak{R}_0$ beginnende, mit $\mathfrak{R}$ endende wohlgeordnete Menge linearer Räume von Satz I. Wir nehmen an, auf allen $\mathfrak{R}_\xi (\xi < \xi_0)$ sei $f(x)$ schon definiert, und haben $f(x)$ auf $\mathfrak{R}_{\xi_0}$ zu bilden.

1. Fall, ξ_0 sei keine Grenzzahl. In diesem Fall war $\mathfrak{R}_{\xi_0}$ der von $\mathfrak{R}_{\xi_0-1}$ und einem nicht zu $\mathfrak{R}_{\xi_0-1}$ gehörenden Punkte a aufgespannte Raum. Wir bezeichnen mit U die obere Schranke von $f(x) - MD(x-a)$ auf $\mathfrak{R}_{\xi_0-1}$, mit V die untere Schranke von $f(x) + MD(x-a)$ auf $\mathfrak{R}_{\xi_0-1}$. Dann ist $U \leqq V$; wäre in der Tat $U > V$, so gäbe es in $\mathfrak{R}_{\xi_0-1}$ Punkte x' und x'', so daß:

$$f(x') - MD(x'-a) > f(x'') + MD(x''-a);$$

es wäre also:

$$f(x') - f(x'') > M\big((D(x'-a) + D(x''-a)\big) \geqq MD(x'-x''),$$

entgegen der Annahme, daß $f(x)$ auf $\mathfrak{R}_{\xi_0-1}$ eine Linearform der Steigung M ist. Wegen $U \leqq V$ kann nun der Funktionswert $f(a)$ so gewählt werden, daß:

$$U \leqq f(a) \leqq V. \tag{3}$$

Bezeichnen wir mit $\mathfrak{A}$ die aus den Punkten von $\mathfrak{R}_{\xi_0-1}$ und dem Punkte a bestehende Menge, so erfüllt $f(x)$ auf $\mathfrak{A}$ die Voraussetzung (2) von Satz II. Denn jede endliche Linearkombination aus Punkten von $\mathfrak{A}$ hat die Gestalt $x_0 + \lambda a$, wo x_0 einen Punkt von $\mathfrak{A}$ bedeutet. Für $\lambda = 0$ ist gewiß $|f(x_0)| \leqq MD(x_0)$, da nach Annahme $f(x)$ auf $\mathfrak{R}_{\xi_0-1}$ die Steigung M hat. Sei also $\lambda \neq 0$. Dann ist $-\frac{x_0}{\lambda}$ ein Punkt von $\mathfrak{A}$ und somit wegen (3):

$$-f\Big(\frac{x_0}{\lambda}\Big) - MD\Big(\frac{x_0}{\lambda} + a\Big) \leqq f(a) \leqq -f\Big(\frac{x_0}{\lambda}\Big) + MD\Big(\frac{x_0}{\lambda} + a\Big), \tag{2}$$

woraus sofort folgt:

$$|f(x_0) + \lambda f(a)| \leqq MD(x_0 + \lambda a);$$

das aber ist Voraussetzung (2) von Satz II. Nach Satz II kann also $f(x)$ zu einer Linearform in $\mathfrak{R}_{\xi_0}$ der Steigung M erweitert werden.

2. Fall, ξ_0 sei eine Grenzzahl. In diesem Falle war $\mathfrak{R}_{\xi_0}$ der von der Vereinigung $\mathfrak{A}$ aller $\mathfrak{R}_\xi (\xi < \xi_0)$ aufgespannte Raum. Da nach Annahme $f(x)$ auf jedem $\mathfrak{R}_\xi (\xi < \xi_0)$ gegeben ist, so ist $f(x)$ auf $\mathfrak{A}$ gegeben. Und zwar genügt $f(x)$ auf $\mathfrak{A}$ der Voraussetzung (2) von Satz II; denn sei $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n$ eine endliche Linearkombination aus Punkten von $\mathfrak{A}$; es gehöre etwa x_i zu $\mathfrak{R}_{\xi_i} (\xi_i < \xi_0)$;

ist $\bar{\xi}$ die größte unter den Ordinalzahlen $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, so gehören $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sämtlich zu $\mathfrak{R}_{\bar{\xi}}$, und da auf $\mathfrak{R}_{\bar{\xi}}$ $f(x)$ eine Linearform der Steigung M ist, so ist:

$$|\lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \cdots + \lambda_n f(x_n)|$$
$$= |f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n)| \leqq MD(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n),$$

womit (2) nachgewiesen ist. Satz II lehrt also, daß $f(x)$ zu einer Linearform in $\mathfrak{R}_{\xi_\bullet}$ der Steigung M erweitert werden kann. — Damit ist Satz III bewiesen.

Aus Satz II und III folgt nun:

Satz IV. *Sei $\mathfrak{A}$ eine Punktmenge des linearen Raumes $\mathfrak{R}$. Damit es zu der auf $\mathfrak{A}$ definierten Funktion $f_0(x)$ eine Linearform $f(x)$ in $\mathfrak{R}$ gebe, die auf $\mathfrak{A}$ mit $f_0(x)$ übereinstimmt, und deren Steigung $\leqq M$ ist, ist notwendig und hinreichend, daß für jede endliche Linearkombination aus Punkten von $\mathfrak{A}$ Ungleichung (2) gelte.*

In Satz IV ist als Spezialfall enthalten:

Satz IV a. *Ist der vollständige lineare Raum $\mathfrak{R}_0$ echter Teil von $\mathfrak{R}$, so gibt es eine nicht identisch verschwindende Linearform in $\mathfrak{R}$, die in allen Punkten von $\mathfrak{R}_0$ den Wert 0 hat.*

In der Tat, man hat nur in Satz IV für $\mathfrak{A}$ die Menge zu wählen, die aus $\mathfrak{R}_0$ durch Hinzufügen eines nicht zu $\mathfrak{R}_0$ gehörigen Punktes a entsteht; man kann dann noch den Funktionswert $f(a)$ $(\neq 0)$ ganz beliebig vorschreiben. Ungleichung (2) ist dann erfüllt, wenn man unter d den Abstand des Punktes a von $\mathfrak{R}_0$ versteht, und $M = \frac{|f(a)|}{d}$ setzt.

Damit ist auch die Existenz nicht identisch verschwindender Linearformen in $\mathfrak{R}$ nachgewiesen. Besteht insbesondere $\mathfrak{R}_0$ nur aus dem Punkte 0 und setzt man $f(a) = D(a)$, so erhält man:

Satz V. *Zu jedem Punkte a $(\neq 0)$ von $\mathfrak{R}$ gibt es eine Linearform der Steigung 1, die im Punkte a den Wert $D(a)$ annimmt.*

Diese Linearform $f(x)$ hat folgende Eigenschaft: in jedem Punkte der konvexen Menge $D(x) \leqq D(a)$ ist $f(x) \leqq D(a)$, im Punkte a dieser Menge aber ist $f(a) = D(a)$. Man könnte also die Mannigfaltigkeit $f(x) = D(a)$ als Stützmannigfaltigkeit der konvexen Menge $D(x) \leqq D(a)$ im Punkte a bezeichnen.

§ 2.

Wir betrachten nun die Menge $\mathfrak{S}$ aller Linearformen $u = f(x)$ im Raume $\mathfrak{R}$. Speziell sei $u = 0$ die identisch verschwindende Linearform. Verstehen wir unter $\Delta(u)$ die Steigung der Linearform $u = f(x)$, so hat $\Delta(u)$ offenbar folgende Eigenschaften:

1. Es ist $\Delta(u) \geqq 0$, und zwar $\Delta(u) = 0$ dann und nur dann, wenn $u = 0$.
2. $\Delta(\lambda u) = |\lambda| \Delta(u)$.
3. $\Delta(u_1 + u_2) \leqq \Delta(u_1) + \Delta(u_2)$.

Durch $\Delta(u)$ ist also eine konvexe Maßbestimmung im Raume $\mathfrak{S}$ gegeben. Jeder Punkt u von $\mathfrak{S}$ bedeutet eine Linearform von x in $\mathfrak{R}$. Bezeichnen wir den Wert der Linearform u im Punkte x mit $B(u, x)$, so gilt die Ungleichung:

(3) $$|B(u, x)| \leqq \Delta(u) \cdot D(x).$$

Der Raum $\mathfrak{S}$ der u ist ein *vollständiger* linearer Raum. Denn sei $\{u_\nu\}$ eine *Cauchy*sche Folge aus $\mathfrak{S}$, d. h. zu jedem $\varepsilon > 0$ gebe es ein ν_0, so daß

$$\Delta(u_\nu - u_{\nu'}) < \varepsilon \quad \text{für} \quad \nu \geqq \nu_0, \ \nu' \geqq \nu_0.$$

Wegen (3) ist dann

$$|B(u_\nu, x) - B(u_{\nu'}, x)| < D(x) \cdot \varepsilon \quad \text{für} \quad \nu \geqq \nu_0, \ \nu' \geqq \nu_0.$$

Für jedes x von $\mathfrak{R}$ existiert also ein endlicher Grenzwert:

(4) $$f(x) = \lim_{\nu \to \infty} B(u_\nu, x).$$

Offenbar ist $f(x)$ eine Linearform in $\mathfrak{R}$; denn das Bestehen von $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ und $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$ leuchtet ein, und um das Bestehen einer Ungleichung (1) einzusehen, beachte man nur, daß — weil die $\{u_\nu\}$ eine *Cauchy*sche Folge bilden — gewiß die Folge der $\Delta(u_\nu)$ beschränkt bleibt:

$$\Delta(u_\nu) \leqq M \quad \text{für alle} \quad \nu;$$

aus (3) aber folgt:

$$|B(u_\nu, x)| \leqq \Delta(u_\nu) \cdot D(x),$$

und somit aus (4):

$$|f(x)| \leqq M \cdot D(x).$$

Es ist also $u^* = f(x)$ ein Punkt von $\mathfrak{S}$, und offenbar gilt:

$$L \underset{\nu \to \infty}{} u_\nu = u^*.$$

Also ist $\mathfrak{S}$ vollständig.

Wir bezeichnen[1]) $\mathfrak{S}$ als den zu $\mathfrak{R}$ *polaren* Raum, $\Delta(u)$ als die zu $D(x)$ *polare* Maßbestimmung.

Setzt man in $B(u, x)$ für x einen festen Punkt $\bar{x}$ von $\mathfrak{R}$ ein, so wird $B(u, \bar{x})$ eine Linearform in $\mathfrak{S}$ (im allgemeinen ist aber nicht jede Linearform in $\mathfrak{S}$ in dieser Gestalt darstellbar).

Satz VI. *Die Linearform $B(u, \bar{x})$ in $\mathfrak{S}$ hat die Steigung $D(\bar{x})$.*

In der Tat, aus (3) folgt, daß diese Steigung $\leqq D(\bar{x})$ ist. Andrerseits gibt es nach Satz V in $\mathfrak{R}$ eine Linearform $\bar{u}$ der Steigung 1, die im Punkte $\bar{x}$ den Wert $D(\bar{x})$ annimmt:

(4a) $$B(\bar{u}, \bar{x}) = D(\bar{x}).$$

Da die Linearform $\bar{u}$ in $\mathfrak{R}$ die Steigung 1 hat, ist $\Delta(\bar{u}) = 1$, und wegen (4a) ist also die Steigung von $B(u, \bar{x})$ in $\mathfrak{S}$ mindestens gleich $D(\bar{x})$. Sie ist also genau gleich $D(\bar{x})$, wie behauptet.

Sei nun $\mathfrak{B}$ eine Punktmenge im Raume $\mathfrak{S}$ (d. h. eine Menge von Linearformen in $\mathfrak{R}$). Die zu $\mathfrak{B}$ gehörigen Linearformen bezeichnen wir ausführlicher mit $u_y(x)$, wobei der Index y eine zu $\mathfrak{B}$ äquivalente Menge $\mathfrak{Y}$ durchläuft. Bedeuten dann die c_y reelle Zahlen, so ist:

(5) $$u_y(x) = c_y \quad \text{(für alle } y \text{ von } \mathfrak{Y})$$

---

[1]) *E. Helly*, a. a. O. S. 62.

ein lineares Gleichungssystem in $\mathfrak{R}$. Sei $\mathfrak{S}_0$ der von $\mathfrak{B}$ aufgespannte lineare Teilraum von $\mathfrak{S}$. Wir werden uns insbesondere mit dem Falle befassen, daß jede Linearform $g(u)$ in $\mathfrak{S}_0$ die Gestalt hat: $g(u) = B(u, \bar{x})$, wo $\bar{x}$ einen Punkt von $\mathfrak{R}$ bedeutet. In diesem Falle heiße das Gleichungssystem (5) *regulär*. Hat insbesondere jede Linearform in $\mathfrak{S}$ die Gestalt $B(u, \bar{x})$, so ist jedes Gleichungssystem (5) regulär. Wir nennen dann den Raum $\mathfrak{R}$ *regulär*.

Satz VII[1]. *Damit es einen dem regulären Gleichungssysteme* (5) *genügenden Punkt x von $\mathfrak{R}$ gebe, ist notwendig und hinreichend die Existenz einer Zahl M, so daß für jede endliche Linearkombination $\lambda_1 u_{y_1} + \lambda_2 u_{y_2} + \cdots + \lambda_n u_{y_n}$ aus den u_y des Systems* (5) *die Ungleichung gelte*:

$$(6) \quad |\lambda_1 c_{y_1} + \lambda_2 c_{y_2} + \cdots + \lambda_n c_{y_n}| \leqq M \Delta(\lambda_1 u_{y_1} + \lambda_2 u_{y_2} + \cdots \lambda_n u_{y_n}).$$

Die Bedingung ist *notwendig*: sei in der Tat $\bar{x}$ eine Lösung von (5). Dann ist:

$$\lambda_1 u_{y_1}(\bar{x}) + \cdots + \lambda_n u_{y_n}(\bar{x}) = \lambda_1 c_{y_1} + \cdots + \lambda_n c_{y_n},$$

und somit nach (3):

$$|\lambda_1 c_{y_1} + \cdots + \lambda_n c_{y_n}| \leqq D(\bar{x}) \cdot \Delta(\lambda_1 u_{y_1} + \cdots + \lambda_n u_{y_n}).$$

Die Bedingung ist *hinreichend*. Denn ist sie erfüllt, so gibt es nach Satz II in $\mathfrak{S}_0$ eine Linearform $g(u)$ deren Steigung $\leqq M$ ist, und für die $g(u_y) = c_y$ ist. Da das Gleichungssystem (5) regulär ist, gibt es in $\mathfrak{R}$ einen Punkt $\bar{x}$, so daß $g(u) = B(u, \bar{x})$ ist. Für alle Punkte u_y von $\mathfrak{B}$ gilt also:

$$u_y(\bar{x}) = B(u_y, \bar{x}) = g(u_y) = c_y,$$

d. h. der Punkt $\bar{x}$ genügt dem Gleichungssystem (5).

Wir nennen $\bar{x}$ eine Minimallösung von (5), wenn für jede andre Lösung x von (5) die Ungleichung gilt:

$$D(x) \geqq D(\bar{x}).$$

Satz VIII. *Ist der Raum $\mathfrak{R}$ regulär und genügt das Gleichungssystem* (5) *der Bedingung* (6) *von Satz* VII, *so besitzt es eine Minimallösung.*

In der Tat, unter den Zahlen M, für die Ungleichung (6) besteht, gibt es eine kleinste $\overline{M}$. Jede Linearform in $\mathfrak{S}$, die für u_y den Wert c_y annimmt, hat dann mindestens die Steigung $\overline{M}$. Ist x' eine Lösung von (5), so ist $B(u, x')$ eine Linearform in $\mathfrak{S}$, die für u_y den Wert c_y annimmt. Ihre Steigung ist zufolge Satz VI gleich $D(x')$, und es ist somit:

$$(7) \qquad D(x') \geqq \overline{M}.$$

Andererseits gibt es nach Satz IV in $\mathfrak{S}$ eine Linearform der Steigung $\overline{M}$, die für u_y den Wert c_y annimmt; nach Annahme hat sie die Gestalt $B(u, \bar{x})$, nach Satz VI ist also:

$$(8) \qquad D(\bar{x}) = \overline{M}.$$

Aus (7) und (8) folgt, daß $\bar{x}$ eine Minimallösung ist. Zugleich sehen wir, daß für jede Minimallösung $D(x)$ gleich ist dem kleinsten Werte von M, für den (6) gilt.

Es sei noch bemerkt, daß es stets möglich ist, den Raum $\mathfrak{R}$ durch Hinzufügung neuer Punkte so zu erweitern, daß jedes in $\mathfrak{R}$ gegebene Gleichungssystem

[1]) *E. Helly*, a. a. O. S. 81.

(5) im erweiterten Raume regulär ist [1]). Zu dem Zwecke betrachten wir den zu $\mathfrak{S}$ polaren Raum, der geliefert wird durch die Gesamtheit der Linearformen $\xi = f(u)$ in $\mathfrak{S}$, sowie die zu $\Delta(u)$ polare Maßbestimmung $D^*(\xi)$, die nichts anderes ist, als die Steigung der Linearform $\xi = f(u)$.

Unter diesen Linearformen befinden sich insbesondere auch diejenigen, die aus $B(u, x)$ durch Festhalten von x entstehen. Ihre Steigung ist nach Satz VI gleich $D(x)$. Ist $\xi = f(u)$ eine solche Linearform, so können wir also ohne weiteres ξ mit dem Punkte x von $\mathfrak{R}$ identifizieren. Alle übrigen Linearformen $\xi = f(u)$ fügen wir als neue Punkte zu $\mathfrak{R}$ hinzu. Den so erweiterten Raum nennen wir $\mathfrak{R}^*$. Die durch $D^*(\xi)$ in $\mathfrak{R}^*$ gegebene Metrik reduziert sich für die zu $\mathfrak{R}$ gehörigen Punkte von $\mathfrak{R}^*$ auf die durch $D(x)$ gegebene Metrik von $\mathfrak{R}$.

Sei $u(x)$ eine Linearform in $\mathfrak{R}$. Wir erweitern sie zu einer Linearform $u(\xi)$ in $\mathfrak{R}^*$ durch die Festsetzung: der Wert von $u(\xi)$ im Punkte ξ von $\mathfrak{R}^*$ sei der Wert, den die Linearform $\xi = f(u)$ im Punkte $u = u(x)$ von $\mathfrak{S}$ annimmt. Wir erkennen sofort, daß die Steigung M^* der Linearform $u(\xi)$ in $\mathfrak{R}^*$ übereinstimmt mit der Steigung M der Linearform $u(x)$ in $\mathfrak{R}$. Jedenfalls ist $M^* \geqq M$. Andrerseits ist nach Definition:

$$u(\xi) = f(u(x));$$

die Steigung von $f(u)$ ist $D^*(\xi)$, also ist:

$$|u(\xi)| \leqq D^*(\xi) \cdot \Delta(u(x)).$$

Also gilt für die Steigung M^* von $u(\xi)$ in $\mathfrak{R}^*$:

$$M^* \leqq \Delta(u(x)).$$

Nun ist aber $\Delta(u(x))$ nichts andres als die Steigung M von $u(x)$ in $\mathfrak{R}$. Wir haben also auch $M^* \leqq M$, und somit $M^* = M$, wie behauptet.

Sei $u(\xi)$ eine in diesem Sinne von $\mathfrak{R}$ auf $\mathfrak{R}^*$ erweiterte Linearform. Wir bezeichnen wieder mit $B(u, \xi)$ den Wert, den sie im Punkte ξ von $\mathfrak{R}^*$ annimmt. Wir erkennen nun sofort, daß jede Linearform $f(u)$ in $\mathfrak{S}$ aus $B(u, \xi)$ entsteht, indem man für ξ einen geeigneten festen Punkt von $\mathfrak{R}^*$ einsetzt. In der Tat $f(u)$ definiert ja einen Punkt $\bar{\xi}$ von $\mathfrak{R}^*$, und offenbar ist $f(u) = B(u, \bar{\xi})$. Jedes Gleichungssystem (5) in $\mathfrak{R}$ ist also in $\mathfrak{R}^*$ regulär.

Der Beweis von Satz VIII zeigt ferner, daß das Gleichungssystem (5), wenn es die Bedingung (6) erfüllt, in $\mathfrak{R}^*$ eine Minimallösung besitzt.

§ 3.

Nach diesem Exkurse über eine Erweiterung des Raumes $\mathfrak{R}$ beschränken wir uns wieder auf $\mathfrak{R}$ selbst.

Sei jeder in (5) auftretenden Linearform u_y eine zweite Linearform v_y in $\mathfrak{R}$ zugeordnet. Wir ordnen auch jeder endlichen Linearkombination $u_s = \lambda_1 u_{y_1} + \cdots + \lambda_n u_{y_n}$ die entsprechende Linearkombination $v_s = \lambda_1 v_{y_1} + \cdots + \lambda_n v_{y_n}$ zu. Sowohl die u_s als die v_s sind dann Punkte des zu $\mathfrak{R}$ polaren metrischen Raumes $\mathfrak{S}$. Das System der v_y heiße *vollstetig* in bezug auf das System der u_y, wenn jeder *beschränkten* Folge der u_s eine *kompakte* Folge der v_s entspricht.

---

[1]) Vgl. hierzu *E. Helly*, a. a. O. S. 74.

Satz IX. *Ist das System der v_y vollstetig in bezug auf das System der u_y, so gibt es eine Zahl M, so daß für alle endlichen Linearkombinationen $u_s \neq 0$ der u_y und die entsprechenden Linearkombinationen v_s der v_y die Ungleichung gilt*

$$\Delta(v_s) \leqq M\,\Delta(u_s)\,.$$

In der Tat, andernfalls gäbe es zu jeder natürlichen Zahl n ein $u_{s_n} \neq 0$, so daß:

$$\Delta(v_{s_n}) > n\,\Delta(u_{s_n})\,.$$

Setzen wir:

$$u'_{s_n} = \frac{1}{\Delta(u_{s_n})}\,u_{s_n}, \qquad v'_{s_n} = \frac{1}{\Delta(u_{s_n})}\,v_{s_n},$$

so ist:

$$\Delta(v'_{s_n}) > n, \qquad \Delta(u'_{s_n}) = 1\,.$$

Die u'_{s_n} $(n = 1, 2, \ldots)$ bilden also eine beschränkte Punktmenge in $\mathfrak{S}$, die Menge der zugehörigen v'_{s_n} aber wäre nicht kompakt, entgegen der Voraussetzung.

Satz X. *Ist das System der v_y vollstetig in bezug auf das System der u_y, so folgt aus $u_s = 0$ auch $v_s = 0$.*

Sei in der Tat $u_s = 0$; wir bezeichnen mit u_{s^*} irgendeine endliche Linearkombination der u_y, für die $\Delta(u_{s^*}) = 1$ ist. Für alle λ ist $u_s + \lambda u_{s^*} = \lambda u_{s^*}$, mithin:

$$\Delta\Big(\frac{1}{\lambda}\,u_s + u_{s^*}\Big) = \Delta(u_{s^*}) = 1\,. \tag{9}$$

Ferner ist:

$$\Delta\Big(\frac{1}{\lambda}\,v_s + v_{s^*}\Big) \geqq \frac{1}{|\lambda|}\,\Delta(v_s) - \Delta(v_{s^*})\,. \tag{10}$$

Angenommen nun, es wäre $v_s \neq 0$, mithin auch $\Delta(v_s) \neq 0$. Lassen wir λ die Folge $\frac{1}{n}$ durchlaufen, so zeigen (9) und (10), daß die Menge der $\frac{1}{\lambda}\,u_s + u_{s^*}$ beschränkt, die Menge der $\frac{1}{\lambda}\,v_s + v_{s^*}$ nicht kompakt ist, im Widerspruche gegen die Voraussetzung. Also muß $v_s = 0$ sein.

Satz XI. *Ist das System der v_y vollstetig in bezug auf das System der u_y, so entspricht jeder Cauchyschen Folge $\{u_{s_n}\}$ eine Cauchysche Folge $\{v_{s_n}\}$.*

In der Tat, nach Satz IX folgt aus

$$\Delta(u_{s_n} - u_{s_{n'}}) < \varepsilon$$

die Ungleichung $\Delta(v_{s_n} - v_{s_{n'}}) < M\varepsilon$, und daraus folgt die Behauptung.

Wir betrachten nun den vom Systeme der u_y aufgespannten linearen Teilraum $\mathfrak{S}_0$ von $\mathfrak{S}$, und den vom Systeme der v_y aufgespannten linearen Teilraum $\mathfrak{T}_0$ von $\mathfrak{S}$. Wir haben die Punkte von $\mathfrak{S}_0$ als Linearkombinationen der u_y bezeichnet. Wir wollen nun diejenigen Punkte von $\mathfrak{S}_0$, die *endliche* Linearkombinationen der u_y sind, also die Gestalt

$$u_s = \lambda_1 u_{y_1} + \cdots + \lambda_n u_{y_n} \tag{11}$$

haben, als Punkte *erster Art* von $\mathfrak{S}_0$, die übrigen als Punkte *zweiter Art* bezeichnen. Jeder Punkt zweiter Art ist Grenzpunkt einer Folge von Punkten erster Art. Sei

u ein Punkt *erster Art* von $\mathfrak{S}_0$, etwa der Punkt (11). Er kann noch auf eine zweite Art linear durch endlich viele u_y darstellbar sein:

$$u_s = u_{s'} = \lambda'_1 u_{y_1} + \cdots + \lambda'_n u_{y_n} \tag{12}$$

(indem wir für die Koeffizienten λ und λ' auch den Wert 0 zulassen, können wir annehmen, daß in (11) und (12) dieselben u_y auftreten). Dann ist

$$(\lambda_1 - \lambda'_1)\, u_{y_1} + \cdots + (\lambda_n - \lambda'_n)\, u_{y_n} = 0,$$

und mithin nach Satz X auch:

$$(\lambda_1 - \lambda'_1)\, v_{y_1} + \cdots + (\lambda_n - \lambda'_n)\, v_{y_n} = 0,$$

d. h. aus $u_s = u_{s'}$ folgt auch $v_s = v_{s'}$. Wir sehen also: ordnet man jeder endlichen Linearkombination u_s der u_y die entsprechende Linearkombination v_s der v_y zu, so wird jeder Punkt erster Art von $\mathfrak{S}_0$ abgebildet auf einen ganz bestimmten Punkt von $\mathfrak{T}_0$.

Sei nun u ein Punkt *zweiter Art* von $\mathfrak{S}_0$. Es gibt dann in $\mathfrak{S}_0$ eine gegen u konvergierende Folge $\{u_n\}$ von Punkten erster Art. Da sie eine *Cauchy*sche Folge ist entspricht ihr nach Satz XI auch eine *Cauchy*sche Folge $\{v_n\}$; sei v ihr Grenzpunkt. Eine bekannte Schlußweise ergibt, daß, wenn $\{u'_n\}$ eine zweite gegen u konvergierende Folge von Punkten erster Art in $\mathfrak{S}_0$ ist, die entsprechende Punktfolge $\{v'_n\}$ in $\mathfrak{T}_0$ gegen denselben Grenzpunkt v konvergiert, wie $\{v_n\}$. Diesen Punkt v ordnen wir dem Punkte zweiter Art u von $\mathfrak{S}_0$ zu. Es entspricht somit eindeutig jeder Linearkombination der u_y auch eine Linearkombination der v_y.

Wir haben nun $\mathfrak{S}_0$ eindeutig abgebildet auf einen Teil von $\mathfrak{T}_0$, und wir erkennen sofort, daß diese Abbildung *linear* ist, d. h.

1. Ist v das Bild von u, so ist λv das Bild von λu.
2. Sind v', v'' die Bilder von u', u'', so ist $v' + v''$ das Bild von $u' + u''$.
3. Es gibt eine Zahl M, so daß, wenn v das Bild von u ist:

$$\Delta(v) \leqq M \Delta(u).$$

(Eigenschaft 3. folgt unmittelbar aus Satz IX und der Stetigkeit von $\Delta(u)$). Aus 3. ergibt sich ohne weiteres die Stetigkeit dieser Abbildung.

Satz XII. *Bei dieser Abbildung entspricht jeder beschränkten Punktfolge $\{u_\nu\}$ aus $\mathfrak{S}_0$ eine kompakte Punktfolge $\{v_\nu\}$ aus $\mathfrak{T}_0$.*

In der Tat, es gibt in $\mathfrak{S}_0$ eine aus Punkten erster Art bestehende Folge $\{u'_\nu\}$, so daß

$$\Delta(u_\nu - u'_\nu) < \frac{1}{\nu}. \tag{13}$$

Wegen Satz IX gilt für die entsprechende Punktfolge $\{v'_\nu\}$ aus $\mathfrak{T}_0$:

$$\Delta(v_\nu - v'_\nu) \to 0. \tag{14}$$

Wegen (13) ist die Folge $\{u'_\nu\}$ ebenso wie die Folge $\{u_\nu\}$ beschränkt. Wegen der Vollstetigkeit der v_y in bezug auf die u_y folgt daraus, daß die Folge $\{v'_\nu\}$ kompakt ist, und wegen (14) ist also auch die Folge $\{v_\nu\}$ kompakt, wie behauptet.

Die lineare Abbildung von $\mathfrak{S}_0$ auf einen Teil von $\mathfrak{T}_0$ vermittelt nun auch eine lineare Abbildung von $\mathfrak{S}_0$ auf einen Teil des von dem Systeme $u_y + v_y$ aufge-

spannten linearen Raumes $\mathfrak{W}_0$ (d. h. es entspricht auch jeder Linearkombination der u_y eine bestimmte Linearkombination der $u_y + v_y$). Für diese Abbildung gilt:

Satz XIII. *Die Menge $\mathfrak{S}_{00}$ aller Punkte u von $\mathfrak{S}_0$, die in $\mathfrak{W}_0$ auf den Nullpunkt abgebildet werden* [1]*, ist ein vollständiger linearer Teilraum endlicher Dimensionszahl von $\mathfrak{S}_0$.*

Daß $\mathfrak{S}_{00}$ ein vollständiger linearer Teilraum von $\mathfrak{S}_0$ ist, ist evident. Wäre nun $\mathfrak{S}_{00}$ nicht von endlicher Dimensionszahl, so gäbe es [2]) in $\mathfrak{S}_{00}$ eine beschränkte Punktfolge $\{u_\nu\}$, in der für je zwei Punkte $u_{\nu'}$, $u_{\nu''}$ gilt:

$$\Delta(u_{\nu'} - u_{\nu''}) \geqq \frac{1}{2}. \tag{15}$$

Wegen Satz XII ist die entsprechende Folge $\{v_\nu\}$ kompakt. Indem wir erforderlichenfalls zu einer Teilfolge übergehen, können wir also annehmen, die v_ν konvergieren gegen einen Grenzpunkt $\bar{v}$. Da u_ν zu $\mathfrak{S}_{00}$ gehört, ist aber $u_\nu + v_\nu = 0$, d. h. $u_\nu = -v_\nu$. Es müßte also u_ν gegen $-\bar{v}$ konvergieren, im Widerspruche zu (15).

Wird der Punkt u von $\mathfrak{S}_0$ auf den Punkt $u + v$ von $\mathfrak{W}_0$ abgebildet, so erhält man die Menge aller Punkte von $\mathfrak{S}_0$, die auf $u + v$ abgebildet werden, indem man zu u alle möglichen Punkte von $\mathfrak{S}_{00}$ addiert. Wegen der endlichen Dimensionszahl von $\mathfrak{S}_{00}$ gibt es also unter allen auf $u + v$ abgebildeten Punkten von $\mathfrak{S}_0$ einen, dessen Abstand vom Nullpunkt am kleinsten ist; wir wollen ihn als *Hauptbild* von $u + v$ bezeichnen. Dann gilt:

Satz XIV. *Ist u_n Hauptbild von $u_n + v_n$, so folgt aus $u_n + v_n \to 0$ auch $u_n \to 0$.*

Angenommen nämlich, es wäre nicht $u_n \to 0$. Dann gäbe es ein $\varrho > 0$, so daß für unendlich viele n gilt:

$$\Delta(u_n) \geqq \varrho. \tag{16}$$

Indem wir nötigenfalls zu einer Teilfolge übergehen, können wir annehmen, dies gelte für alle n. Wir setzen:

$$u_n' = \frac{1}{\Delta(u_n)}\, u_n, \qquad v_n' = \frac{1}{\Delta(u_n)}\, v_n.$$

Wegen (16) gilt auch $u_n' + v_n' \to 0$, und es ist:

$$\Delta(u_n') = 1.$$

Offenbar ist auch u_n' Hauptbild von $u_n' + v_n'$.

Die Folge $\{u_n'\}$ ist *kompakt*. Denn andernfalls gäbe es in ihr eine Teilfolge $\{u_{n_\nu}'\}$ und ein $\sigma > 0$, so daß je zwei u_{n_ν}' einen Abstand $\geqq \sigma$ haben. Da wegen der Vollstetigkeit die zugehörige Folge $\{v_{n_\nu}'\}$ kompakt ist, gibt es in ihr eine Teilfolge $\{v_{n_{\nu_i}}'\}$, die gegen einen Grenzpunkt v' konvergiert. Wegen $u_n' + v_n' \to 0$ müßte $u_{n_{\nu_i}}'$ gegen $-v'$ konvergieren, was unmöglich ist, da je zwei $u_{n_{\nu_i}}'$ einen Abstand $\geqq \sigma$ haben. Da $\{u_n'\}$ kompakt ist, können wir, indem wir nötigenfalls zu einer Teil-

---

[1]) D. i. die Menge aller Linearkombinationen der u_y, denen die Linearkombination 0 der $u_y + v_y$ entspricht.

[2]) *Fr. Riesz*, Acta math. 41, S. 78 (Hilfssatz 5).

folge übergehen, annehmen, $\{u_n'\}$ konvergiere gegen einen Grenzpunkt u'. Wegen $u_n' + v_n' \to 0$, und wegen der Stetigkeit unserer Abbildung wird u' auf den Nullpunkt abgebildet, gehört also zu $\mathfrak{S}_{00}$. Also wird auch der Punkt $u_n' - u'$ auf den Punkt $u_n' + v_n'$ abgebildet. Wegen $\Delta(u_n' - u') \to 0$ und $\Delta(u_n') = 1$ widerspricht dies aber der Tatsache, daß u_n' Hauptbild von $u_n' + v_n'$ war. Damit ist Satz XIV bewiesen.

Satz XV. *Es gibt eine Zahl N, so daß, wenn u Hauptbild von $u + v$ ist, stets die Ungleichung gilt:*

$$\Delta(u) \leqq N \cdot \Delta(u + v).$$

Andernfalls gäbe es zu jeder natürlichen Zahl ein u_n und v_n, so daß:

$$\Delta(u_n) > n \cdot \Delta(u_n + v_n).$$

Setzen wir:

$$u_n' = \frac{1}{n\,\Delta(u_n + v_n)} \cdot u_n \qquad v_n' = \frac{1}{n\Delta(u_n + v_n)} \cdot v_n,$$

so wäre u_n' Hauptbild von $u_n' + v_n'$ und

$$u_n' + v_n' \to 0, \quad \Delta(u_n') > 1,$$

im Widerspruche zu Satz XIV.

Satz XVI. *Ist $\{u_n + v_n\}$ eine Cauchysche Folge aus $\mathfrak{W}_0$ und u_n Hauptbild von $u_n + v_n$, so ist $\{u_n\}$ eine kompakte Folge.*

Denn nach Satz XV ist $\{u_n\}$ beschränkt; die beim Beweise von Satz XIV verwendete Schlußweise ergibt sodann die Behauptung.

Satz XVII. *Durchläuft u den ganzen Raum $\mathfrak{S}_0$, so durchläuft sein Bild $u + v$ den ganzen Raum $\mathfrak{W}_0$* [1]).

Bezeichnen wir die Punkte von $\mathfrak{W}_0$, die endliche Linearkombinationen der $u_y + v_y$ sind, als Punkte erster Art, die übrigen als Punkte zweiter Art, so ist zunächst ersichtlich, daß wenn u alle Punkte erster Art von $\mathfrak{S}_0$ durchläuft, das Bild $u + v$ alle Punkte erster Art von $\mathfrak{W}_0$ durchläuft. Sei nun w ein Punkt zweiter Art von $\mathfrak{W}_0$; er ist Grenzpunkt einer Punktfolge erster Art $\{w_n\}$; sei u_n Hauptbild von w_n; nach Satz XVI ist $\{u_n\}$ eine kompakte Folge in $\mathfrak{S}_0$; sie besitzt also einen Häufungspunkt u. Wegen der Stetigkeit unserer Abbildung ist dann w das Bild von u, und Satz XVII ist bewiesen.

Ganz ebenso zeigt man:

Satz XVII a. *Durchläuft u einen vollständigen linearen Teilraum von $\mathfrak{S}_0$, so durchläuft auch das Bild $u + v$ von u einen vollständigen linearen Raum.*

§ 4.

Wir kehren zurück zur Betrachtung des regulären Gleichungssystemes (5), und nehmen an, Bedingung (6) von Satz VII sei erfüllt. Ist wieder $\mathfrak{S}_0$ der von der Menge der u_y aufgespannte lineare Raum, so gibt es dann eine Linearform $g(u)$ in $\mathfrak{S}_0$, die im Punkte u_y den Wert c_y annimmt.

---

[1]) D. h. durchläuft u alle Linearkombinationen der u_y, so durchläuft die entsprechende Linearkombination $u + v$ alle Linearkombinationen der $u_y + v_y$.

Die Punkte von $\mathfrak{S}_0$ sind die Linearkombinationen der u_y. Sei zunächst

$$u = \lambda_1 u_{y_1} + \lambda_2 u_{y_2} + \cdots + \lambda_n u_{y_n}$$

eine *endliche* Linearkombination der u_y. Wir bilden die *entsprechende* Linearkombination der c_y, nämlich: $\lambda_1 c_{y_1} + \lambda_2 c_{y_2} + \cdots + \lambda_n c_{y_n}$. Offenbar ist:

$$\lambda_1 c_{y_1} + \lambda_2 c_{y_2} + \cdots + \lambda_n c_{y_n} = g(u).$$

Also: aus $\lambda_1 u_{y_1} + \cdots + \lambda_n u_{y_n} = 0$ folgt: $\lambda_1 c_{y_1} + \cdots + \lambda_n c_{y_n} = 0$; aus:

$$\lambda_1 u_{y_1} + \cdots + \lambda_n u_{y_n} = \mu_1 u_{y'_1} + \cdots + \mu_m u_{y'_m}$$

folgt:

$$\lambda_1 c_{y_1} + \cdots + \lambda_n c_{y_n} = \mu_1 c_{y_1'} + \cdots + \mu_m c_{y'_m}.$$

Sei sodann u eine *beliebige* Linearkombination der u_y (ein beliebiger Punkt von $\mathfrak{S}_0$); wir bezeichnen wieder den Funktionswert $g(u)$ als *die entsprechende Linearkombination der* c_y. Aus der Stetigkeit von $g(u)$ folgt: sind u_n und u^* Linearkombinationen der u_y, und c_n bzw. c^* die entsprechenden Linearkombinationen der c_y, so gilt:

(17) *Aus* $u_n \to u^*$ *folgt* $c_n \to c^*$;

insbesondere:

(18) *Aus* $u_n \to 0$ *folgt* $c_n \to 0$.

Sei nun das System der v_y vollstetig in bezug auf das System der u_y. Wie wir in § 3 sahen, entspricht jeder Linearkombination der u_y eine bestimmte Linearkombination der $u_y + v_y$. Insbesondere entspricht der Linearkombination 0 der u_y auch die Linearkombination 0 der $u_y + v_y$; doch kann es auch noch andere Linearkombinationen der u_y geben, denen die Linearkombination 0 der $u_y + v_y$ entspricht; nach Satz XIII bilden sie einen linearen Raum $\mathfrak{S}_{00}$ endlicher Dimensionszahl.

Wir betrachten nun neben dem regulären Gleichungssystem (5) auch das Gleichungssystem:

(19) $$u_y(x) + v_y(x) = c_y,$$

das wir gleichfalls als regulär voraussetzen.

Satz XVIII. *Seien die Gleichungssysteme* (5) *und* (19) *regulär, und es sei das System der* v_y *vollstetig in bezug auf das System der* u_y. *Besitzt das System* (5) *eine Auflösung in* $\mathfrak{R}$, *so ist, damit auch das System* (19) *eine Auflösung in* $\mathfrak{R}$ *besitze, notwendig und hinreichend, daß jeder Linearkombination der* u_y, *der die Linearkombination* 0 *der* $u_y + v_y$ *entspricht, auch die Linearkombination* 0 *der* c_y *entspricht.*

Die Bedingung ist *notwendig*; denn besitzt (19) eine Auflösung, so gibt es nach Satz VII eine Zahl N, so daß für jede endliche Linearkombination der $u_y + v_y$ gilt:

(20) $$|\lambda_1 c_{y_1} + \cdots + \lambda_n c_{y_n}| \leqq N \Delta (\lambda_1 (u_{y_1} + v_{y_1}) + \cdots + \lambda_n (u_{y_n} + v_{y_n})).$$

Sei nun u^* eine Linearkombination der u_y, der die Linearkombination 0 der $u_y + v_y$ entspricht; es gibt eine Folge $\{u_\nu\}$ endlicher Linearkombinationen der u_y, so daß $u_\nu \to u^*$. Für die entsprechende Folge $\{u_\nu + v_\nu\}$ gilt dann: $u_\nu + v_\nu \to 0$. Seien c_ν und c^* die u_ν bzw. u^* entsprechenden Linearkombinationen der c_y, so gilt nach (17): $c_\nu \to c^*$. Wegen (20) folgt aber aus $u_\nu + v_\nu \to 0$ auch $c_\nu \to 0$, also ist $c^* = 0$, wie behauptet.

Die Bedingung ist *hinreichend.* In der Tat, ist sie erfüllt, und sind u', u'' zwei Linearkombinationen der u_y, denen dieselbe Linearkombination der $u_y + v_y$ entspricht, so entspricht der Differenz $u' - u''$ die Linearkombination 0 der $u_y + v_y$; es entspricht also $u' - u''$ auch die Linearkombination 0 der c_y, und es entspricht somit u' und u'' dieselbe Linearkombination der c_y. D. h. allen Linearkombinationen der u_y, denen dieselbe Linearkombination der $u_y + v_y$ entspricht, entspricht auch dieselbe Linearkombination der c_y. Jeder Linearkombination der $u_y + v_y$ ist also eine ganz bestimmte Linearkombination der c_y, d. h. ein ganz bestimmter Wert c zugeordnet.

Wir erkennen nun leicht, daß Bedingung (20) erfüllt ist. Wäre sie nämlich nicht erfüllt, so gäbe es eine Folge $\{u_\nu + v_\nu\}$ endlicher Linearkombinationen der $u_y + v_y$, so daß für die entsprechenden Linearkombinationen c_ν der c_y gilt:

$$|c_\nu| \geqq \nu \Delta(u_\nu + v_\nu). \tag{21}$$

Nach dem eben Gesagten können wir, ohne den Wert von c_ν zu ändern, annehmen, u_ν sei Hauptbild von $u_\nu + v_\nu$. Wir setzen:

$$u'_\nu = \frac{1}{\nu \cdot \Delta(u_\nu + v_\nu)} \cdot u_\nu, \quad v'_\nu = \frac{1}{\nu \cdot \Delta(u_\nu + v_\nu)} \cdot v_\nu, \quad c'_\nu = \frac{1}{\nu \cdot \Delta(u_\nu + v_\nu)} \cdot c_\nu. \tag{22}$$

Dann ist u'_ν Hauptbild von $u'_\nu + v'_\nu$ und c'_ν der $u'_\nu + v'_\nu$ entsprechende Wert von c, und es gilt wegen (21) und (22):

$$u'_\nu + v'_\nu \to 0, \quad |c'_\nu| \geqq 1. \tag{23}$$

Nach Satz XIV gilt dann aber auch: $u'_\nu \to 0$, und somit wegen (18) auch: $c'_\nu \to 0$, im Widerspruche mit (23).

Die Annahme, (20) gelte nicht, führt also auf einen Widerspruch; demnach gilt (20), und somit besitzt nach Satz VII das Gleichungssystem (19) eine Auflösung in $\mathfrak{R}$.

Wir wollen uns zum Schlusse noch mit dem Falle befassen, daß das zum Systeme (5) gehörige *homogene* System

$$u_y(x) = 0 \tag{24}$$

nur die triviale Lösung $x = 0$ besitzt, und fragen, unter welchen Umständen dann auch das homogene Gleichungssystem:

$$u_y(x) + v_y(x) = 0 \tag{25}$$

nur die triviale Auflösung besitzt.

Satz XIX. *Es sei der Raum $\mathfrak{R}$ regulär und es besitze das Gleichungssystem $u_y(x) = 0$ nur die triviale Auflösung, ferner sei das System der v_y vollstetig in bezug auf das System der u_y. Damit auch das System $u_y(x) + v_y(x) = 0$ nur die triviale Auflösung besitze, ist notwendig und hinreichend, daß jeder von 0 verschiedenen Linearkombination der u_y auch eine von 0 verschiedene Linearkombination der $u_y + v_y$ entspreche.*

Die Bedingung ist *notwendig.* Denn besitzt das Gleichungssystem (25) nur die triviale Auflösung, so muß der von den $u_y + v_y$ aufgespannte Raum $\mathfrak{W}_0$ der gesamte Raum $\mathfrak{S}$ sein. Wäre nämlich $\mathfrak{W}_0$ echter Teil von $\mathfrak{S}$, so gäbe es nach Satz IV a

eine nicht identisch verschwindende Linearform $g(u)$ in $\mathfrak{S}$, die auf $\mathfrak{W}_0$ verschwindet. Da der Raum $\mathfrak{R}$ regulär ist, gibt es in $\mathfrak{R}$ einen Punkt $\bar{x}$, so daß:

$$g(u) = B(u, \bar{x});$$

da $g(u)$ nicht identisch verschwindet, ist $\bar{x} \neq 0$, und da $g(u)$ auf $\mathfrak{W}_0$ verschwindet, ist

$$g(u_y + v_y) = B(u_y + v_y, \bar{x}) = u_y(\bar{x}) + v_y(\bar{x}) = 0,$$

d. h. $\bar{x}$ ist eine nicht triviale Auflösung von (25).

Genau so folgt, daß auch der von den u_y aufgespannte Raum $\mathfrak{S}_0$ der ganze Raum $\mathfrak{S}$ ist. Ordnen wir also wie in § 3 jeder Linearkombination der u_y die entsprechende Linearkombination der $u_y + v_y$ zu, so haben wir eine lineare Abbildung A von $\mathfrak{S}$ auf sich selbst.

Wir bezeichnen, wie in § 3, den linearen Teilraum von $\mathfrak{S}$, der durch A auf den Punkt 0 abgebildet wird, mit $\mathfrak{S}_{00}$. Was wir zu beweisen haben ist, daß $\mathfrak{S}_{00}$ nur aus dem Punkte 0 besteht.

Wir bezeichnen mit $\mathfrak{S}_{0n}$ die Menge aller Punkte von $\mathfrak{S}$, die durch die Abbildung A^{n+1} auf den Punkt 0 abgebildet werden. Man erkennt sofort, daß $\mathfrak{S}_{0n}$ ein vollständiger linearer Raum ist. Offenbar ist $\mathfrak{S}_{0n-1}$ Teil von $\mathfrak{S}_{0n}$; denn da A den Punkt 0 auf sich selbst abbildet, folgt aus $A^n(u) = 0$ auch

$$A^{n+1}(u) = A\,A^n(u) = A(0) = 0.$$

Enthielte nun $\mathfrak{S}_{00}$ einen Punkt $\neq 0$, so müßte (für jedes n), $\mathfrak{S}_{0n-1}$ *echter* Teil von $\mathfrak{S}_{0n}$ sein. Denn A führt $\mathfrak{S}_{0n}$ in $\mathfrak{S}_{0n-1}$ über. Wäre also $\mathfrak{S}_{0n^\bullet} = \mathfrak{S}_{0n^\bullet-1}$, so auch $\mathfrak{S}_{0n^\bullet} = \mathfrak{S}_{0n^\bullet-2} = \cdots = \mathfrak{S}_{00}$, und A müßte auch $\mathfrak{S}_{00}$ in sich überführen, und da $\mathfrak{S}_{00}$ durch A auf den Punkt 0 abgebildet wird, könnte $\mathfrak{S}_{00}$ nur den Punkt 0 enthalten.

Ist nun $\mathfrak{S}_{0n-1}$ echter Teil von $\mathfrak{S}_{0n}$, so gibt es[1]) in $\mathfrak{S}_{0n} - \mathfrak{S}_{0n-1}$ einen Punkt u_n, so daß:

$$\Delta(u_n) = 1, \tag{26}$$

während für jeden Punkt u von $\mathfrak{S}_{0n-1}$ gilt:

$$\Delta(u_n - u) \geqq \frac{1}{2}. \tag{27}$$

Sei nun v_n die u_n entsprechende Linearkombination der v_y, also:

$$A(u_n) = u_n + v_n.$$

Dann ist

$$v_n - v_i = A(u_n) - A(u_i) - u_n + u_i.$$

Für $i < n$ gehört aber der Punkt:

$$u' = A(u_n) - A(u_i) + u_i$$

zu $\mathfrak{S}_{0n-1}$, da:

$$A^n(A(u_n)) = A^{n+1}(u_n) = 0; \quad A^n(A(u_i)) = A^{n-i}(A^{i+1}(u_i)) = 0; \quad A^n(u_i) = 0.$$

---

[1]) *Fr. Riesz*, a. a. O. S. 75, Hilfssatz 2. Vgl. zum folgenden Beweise auch S. 81.

Wegen (27) ist also:

$$\Delta(v_n - v_i) \geqq \frac{1}{2} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1). \tag{28}$$

Wegen (26) ist aber die Punktfolge $\{u_n\}$ beschränkt, während wegen (28) die entsprechende Punktfolge $\{v_n\}$ nicht kompakt sein kann — im Widerspruche zur Voraussetzung, das System der v_y sei vollstetig in bezug auf das der u_y.

Die Annahme, $\mathfrak{S}_{00}$ enthalte einen Punkt $\neq 0$, führt also auf einen Widerspruch, d. h. $\mathfrak{S}_{00}$ enthält nur den Punkt 0, d. h. einer von 0 verschiedenen Linearkombination der u_y kann nicht die Linearkombination 0 der $u_y + v_y$ entsprechen, wie behauptet.

Die Bedingung ist *hinreichend.* In der Tat, wie wir sahen, folgt aus der Voraussetzung, das Gleichungssystem (24) habe nur die triviale Auflösung, daß der vom Systeme der u_y aufgespannte Raum $\mathfrak{S}_0$ der ganze Raum $\mathfrak{S}$ ist. Die Bedingung, daß jeder von 0 verschiedenen Linearkombination der u_y eine von 0 verschiedene Linearkombination der $u_y + v_y$ entspricht, besagt, daß $\mathfrak{S}_{00}$ nur aus dem Punkte 0 besteht. Dann aber ist die Abbildung A, die jeder Linearkombination der u_y (d. h. jedem Punkte von $\mathfrak{S}_0 = \mathfrak{S}$) die entsprechende Linearkombination der $u_y + v_y$ (d. h. den entsprechenden Punkt von $\mathfrak{W}_0$) zuordnet, *eineindeutig.*

Daraus nun können wir weiter schließen, daß auch $\mathfrak{W}_0 = \mathfrak{S}$ ist. Angenommen in der Tat, es wäre $\mathfrak{W}_0$ echter Teil von $\mathfrak{S}$. Bezeichnen mir mit $\mathfrak{W}_{n-1}$ die Punktmenge, auf die $\mathfrak{S}$ durch A^n abgebildet wird, so folgt aus der Eineindeutigkeit der Abbildung A von $\mathfrak{S}$ auf $\mathfrak{W}_0$, daß auch $\mathfrak{W}_n$ echter Teil von $\mathfrak{W}_{n-1}$ ist. Nach Satz XVII a ist $\mathfrak{W}_n$ ein vollständiger linearer Raum. Wir wählen u_n in $\mathfrak{W}_n - \mathfrak{W}_{n+1}$ so, daß

$$\Delta(u_n) = 1\,, \tag{29}$$

und daß für jeden Punkt u von $\mathfrak{W}_{n+1}$ gilt:

$$\Delta(u_n - u) \geqq \frac{1}{2}\,. \tag{30}$$

Ist v_n die u_n entsprechende Linearkombination der v_y, so ist wieder:

$$v_n - v_i = A(u_n) - A(u_i) + u_i - u_n\,.$$

Für $i > n$ gehört offenbar der Punkt $A(u_n) - A(u_i) + u_i$ zu $\mathfrak{W}_{n+1}$, so daß nach (30):

$$\Delta(v_n - v_i) \geqq \frac{1}{2} \quad \text{für} \quad i > n;$$

also kann die Folge $\{v_n\}$ nicht kompakt sein; da aber nach (29) die Folge $\{u_n\}$ beschränkt ist, ist das ein Widerspruch gegen die Voraussetzung, das System der v_y sei vollstetig in bezug auf das System der u_y. Die Annahme, $\mathfrak{W}_0$ sei echter Teil von $\mathfrak{S}$, führt also auf einen Widerspruch, somit ist $\mathfrak{W}_0 = \mathfrak{S}$.

Das aber heißt: das System der $u_y + v_y$ spannt den ganzen Raum $\mathfrak{S}$ auf. Daraus aber folgt sofort, daß das Gleichungssystem (25) nur die triviale Auflösung besitzt. Denn wäre

$$u_y(\bar{x}) + v_y(\bar{x}) = 0\,, \qquad \bar{x} \neq 0\,,$$

so wäre für jede Linearform $u(\bar{x}) = 0$, was unmöglich ist, da es nach Satz V zu jedem $\bar{x} \neq 0$ Linearformen gibt, für die $u(\bar{x}) \neq 0$ ist.

Zur Theorie des Kreiskörpers.

Von *Teiji Takagi* in Tokio.

In der vorliegenden Note bedienen wir uns durchgehend der folgenden Bezeichnungen:

l eine ungerade Primzahl,

$\zeta = e^{\frac{2\pi i}{l}}$ die primitive l-te Einheitswurzel,

k der Kreiskörper von ζ,

r eine Primitivzahl nach l, nötigenfalls mit der Zusatzbedingung $r^{l-1} \not\equiv 1 \bmod. l$,

s die Substitution $(\zeta \mid \zeta^r)$ des Körpers k,

$\lambda = 1 - \zeta$ der Primteiler von l in k,

$\left(\frac{\mu}{\nu}\right)$ der l-te Potenzrestcharakter,

$\{\mu, \nu\} = \left(\frac{\mu}{\nu}\right)\left(\frac{\nu}{\mu}\right)^{-1}$ das Normenrestsymbol mod. λ^l.

1. *Das Reziprozitätsgesetz für die l-ten Reste im Körper k* [1]) lautet wie folgt: Sind μ, ν prim zu l und zueinander, dann hängt der Wert des Symbols $\{\mu, \nu\}$ nur von den Restklassen mod. λ^l ab, welchen die Zahlen μ und ν angehören, d. h.

$$\{\mu, \nu\} = \{\mu', \nu'\}, \quad \text{wenn} \quad \mu \equiv \mu', \quad \nu \equiv \nu' \quad \bmod. \lambda^l.$$

Speziell $\{\mu, \nu\} = 1$, wenn μ oder ν primär, d. h. l-ter Rest mod. λ^l ist.

Für ein gegebenes Basissystem $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_{l-1}$ für die Restklassen mod. λ^l derart, daß

$$\mu \equiv \mu^l \prod_{i=1}^{l-1} \varkappa_i^{u_i}, \quad \nu \equiv \nu^l \prod_{i=1}^{l-1} \varkappa_i^{v_i} \quad \bmod. \lambda^l,$$

gilt daher

$$(1) \qquad \{\mu, \nu\} = \zeta^{\sum a_{pq} u_p v_q}, \qquad (p, q = 1, 2, \ldots, l-1),$$

wo $(\varkappa_p, \varkappa_q) = \zeta^{a_{pq}}$ gesetzt ist.

---

[1]) Dasselbe hat der Verfasser behandelt in der Note: On the law of reciprocity in the cyclotomic corpus, Proc. Math-Phys. Soc. Japan, 1922. Da es die Grundlage des folgenden bildet, sei erlaubt, daß ich das Ergebnis in vereinfachter Darstellung hier wiedergebe.

Besonders einfach und übersichtlich gestaltet sich diese Formel, wenn die Basis $\varkappa_i$ den folgenden Bedingungen unterworfen wird:

$$\varkappa_i \equiv 1 - \lambda^i \mod \lambda^{i+1}, \tag{2}$$

$$\varkappa_i^{s-r^i} \equiv 1 \mod \lambda^l. \tag{3}$$

Die Möglichkeit einer solchen Basis liegt auf der Hand; man wähle z. B.

$$\varkappa^i \equiv (1-\lambda^i)^{-r^i \frac{s^{l-1}-r^{l-1}}{s-r^i}} \mod \lambda^l,$$
$$(i = 1, 2, \ldots l-1),$$

wo man auch für $i = 1$ und $i = l-1$ direkt $\varkappa_1 = \zeta = 1-\lambda$, $\varkappa_{l-1} = 1+l \equiv 1-\lambda^{l-1} \mod \lambda^l$ setzen kann; übrigens werden die $\varkappa_i$ mod. λ^l durch die Kongruenzen (2) und (3) eindeutig bestimmt. Ein Vorteil dieser Basis besteht darin, daß vermöge (3)

$$N(\varkappa_i) \equiv 1 \mod l^2, \tag{4}$$
$$(i = 1, 2, \ldots, l-2)$$

ausfällt, so daß

$$u_{l-1} \equiv \frac{1-N(\mu)}{l} \mod l. \tag{5}$$

Ferner folgt aus (3) für das Symbol $\{\varkappa_i^s, \varkappa_j^s\} = \{\varkappa_i, \varkappa_j\}^r$ die Beziehung

$$\{\varkappa_i^s, \varkappa_j^s\} = \{\varkappa_i^{r^i}, \varkappa_j^{r^j}\} = \{\varkappa_i, \varkappa_j\}^{r^{i+j}};$$

es ergibt sich also

$$\{\varkappa_i, \varkappa_j\} = 1, \tag{6}$$

wenn $r^{i+j} \not\equiv r \mod l$, d. h. wenn $i+j \neq l$.
Da, wie sogleich gezeigt wird,

$$\{\varkappa_i, \varkappa_{l-i}\} = \zeta^{-i}, \tag{7}$$

so erhält man

$$\{\mu, \nu\} = \zeta^{-\sum_{i=1}^{l-1} i u_i v_{l-i}}. \tag{1*}$$

Für $i = 1$ ergibt sich (7) aus

$$\{\varkappa_1, \varkappa_{l-1}\} = \left(\frac{\zeta}{1+l}\right) = \zeta^{\frac{(1+l)^{l-1}-1}{l}} = \zeta^{-1}.$$

Um allgemein die Richtigkeit von (7) nachzuweisen, schicken wir einen Hilfssatz voraus:

Hilfssatz. Ist $\mu = 1 - \lambda_1$, wo λ_1 eine genau durch die erste Potenz von λ teilbare Zahl von k und j eine ganze rationale Zahl mit $l > j > \frac{l}{2}$ ist, dann ist $1-l-\lambda_1^j$ Normenrest des Körpers $K = k(\sqrt[l]{\mu})$ nach dem Modul λ^l; mit anderen Worten:

$$\{1-\lambda_1,\ 1-l-\lambda_1^j\} = 1. \tag{8}$$

Beweis. Nach Voraussetzung folgt, daß $\Lambda = 1 - \sqrt[l]{\mu}$ genau durch die erste Potenz des Primteilers $\mathfrak{L}$ von λ in K teilbar ist. Nun ist

$$\mathfrak{N}(1-\mathfrak{A}^j) = 1 - S_1(\mathfrak{A}^j) + S_2(\mathfrak{A}^j\mathfrak{A}'^j) - \cdots + S_{l-1}(\mathfrak{A}^j \cdots \mathfrak{A}^{(l-2)j}) - \mathfrak{N}(\mathfrak{A})^j$$

wo $S_1, S_2, \ldots, S_{l-1}$ die elementar-symmetrischen Funktionen von den mit $\mathfrak{A}$ relativ-konjugierten Zahlen und $\mathfrak{N}$ die Relativnorm von K/k bedeuten. Es ist offenbar $S_1 = l$. S_2 läßt sich in $\frac{l-1}{2}$ Teilsummen zerlegen, deren jede die Relativspur einer genau durch $\mathfrak{L}^{2j}$ teilbaren Zahl, also einer Zahl der Form λA mit einem durch $\mathfrak{L}$ teilbaren A ist; daraus folgt leicht $S_2 \equiv 0 \bmod \lambda^l$. Gleiches gilt für $S_3, \ldots, S_{l-1}$. Also

$$\mathfrak{N}(1-\mathfrak{A}^j) \equiv 1 - l - \lambda_1^j \mod \lambda^l,$$

w. z. b. w.

Setzt man nun in (8)

$$\mu = 1 - \lambda_1 = \zeta \varkappa_i, \quad \frac{l}{2} > i > 1, \quad j = l - i > \frac{l}{2},$$

so folgt

$$\{\zeta, 1 - l - \lambda_1^j\} = \{\varkappa_i, 1 - l - \lambda_1^j\}^{-1}. \tag{9}$$

Da hierbei

$$\lambda_1 \equiv \lambda + \lambda^i \mod \lambda^{i+1},$$
$$\lambda_1^j \equiv \lambda^j + j\lambda^{l-1} \equiv \lambda^j - jl \mod \lambda^l,$$
$$1 - l - \lambda_1^j \equiv (1 - l - \lambda^j)(1 + jl) \mod \lambda^l,$$

so ist

$$\{\zeta, 1 - l - \lambda_1^j\} = \{\zeta, 1 + jl\} = \zeta^{-j}, \tag{10}$$

wegen $\{\zeta, 1 - l - \lambda^j\} = 1$, was aus (8) folgt für $\lambda_1 = \lambda$.

Andererseits ist

$$1 - l - \lambda_1^j \equiv \varkappa_j \mod \lambda^{j+1},$$

so daß nach (6)

$$\{\varkappa_i, 1 - l - \lambda_1^j\} = \{\varkappa_i, \varkappa_j\}.$$

Folglich nach (9), (10)

$$\{\varkappa_i, \varkappa_j\} = \zeta^j = \zeta^{-i}, \qquad \text{wenn } i + j = l,$$

womit (7) und (1*) bewiesen sind.

2. Die Exponenten $u_i = u_i(\mu)$ in

$$\mu \equiv \mu^l \varkappa_1^{u_1} \varkappa_2^{u_2} \ldots \varkappa_{l-1}^{u_{l-1}} \tag{11}$$

stehen in einer einfachen Beziehung zu den *Kummer*schen logarithmischen Differentialquotienten. Ist

$$\mu = f(\zeta), \tag{12}$$

wo $f(x)$ ein ganzzahliges Polynom von x bedeutet, und ist

$$\log \frac{f(e^v)}{f(1)} = \sum_{i=1}^{l-2} l_i(\mu) \frac{v^i}{i!} + (v^{l-1}), \tag{13}$$

dann sind die ersten $l-2$ Koeffizienten $l_1(\mu), \ldots, l_{l-2}(\mu)$ mod. l eindeutig be-

stimmt für eine gegebene Zahl μ von k; sie hängen nicht von der besonderen Wahl des Ausdrucks $f(\zeta)$ in (12) ab. Ferner gilt bekanntlich für $i = 1, 2, \ldots, l-2$

$$l_i(\mu) \equiv l_i(\mu') \mod l, \quad \text{wenn} \quad \mu \equiv \mu' \mod \lambda^{l-1},$$
$$l_i(\mu^s) \equiv r^i l_i(\mu) \mod l,$$
$$l_i(\mu\nu) \equiv l_i(\mu) + l_i(\nu) \mod l.$$

Für die Basen $\varkappa_i$ erhält man leicht

$$l_i(\varkappa_i) \equiv (-1)^{i-1}\, i! \mod l,$$
$$l_i(\varkappa_j) \equiv 0\,, \quad (i \neq j)\,.$$

Demnach wird in (11)

$$u_i(\mu) \equiv (-1)^{i-1} \frac{l_i(\mu)}{i!} \mod l, \tag{14}$$
$$(i = 1, 2, \ldots, l-2).$$

Der letzte Exponent u_{l-1} ist in (5) angegeben worden.

Der Koeffizient $l_{l-1}(\mu)$ von $\frac{v^{l-1}}{(l-1)!}$ in (13) ist nicht mehr unabhängig von der Wahl von $f(x)$. Es ergibt sich, wie wir noch vorübergehend anmerken wollen, die Beziehung [1]):

$$l_{l-1}(\mu) \equiv \frac{1 - N(\mu)}{l} - \frac{1 - f(1)^{l-1}}{l} \mod l.$$

3. Das *Kummer*sche Kriterium für die l-ten Idealpotenzen läßt sich sehr einfach aus dem Reziprozitätsgesetz ableiten. Ist $\mathfrak{j}$ ein beliebiges Ideal von k, so gilt bekanntlich die Äquivalenz

$$\mathfrak{j}^{Q(s)} \sim 1\,,$$

wo der Exponent der symbolischen Potenz

$$Q(s) = q_0 s^{l-2} + q_1 s^{l-3} + \cdots + q_{l-3} s + q_{l-2}$$

die bekannte Bedeutung hat [2]). Wenn daher $(\omega) = \mathfrak{j}^l$ eine l-te Idealpotenz in einem irregulären Kreiskörper k ist, so wird

$$\omega^{Q(s)} = \varepsilon\, \alpha^l,$$

wo ε eine Einheit von k bedeutet. Setzt man nun

$$\omega \equiv \omega^l \prod_{i=1}^{l-1} \varkappa_i^{a_i}, \quad \varepsilon \equiv \varepsilon^l \prod_{i=1}^{l-1} \varkappa_i^{e_i} \mod \lambda^l,$$

so daß

$$e_t = 0\,, \qquad (t = 3, 5, \ldots, l-2,\ l-1)$$

und

$$\omega^{Q(s)} \equiv \omega^{l\,Q(s)} \prod_{i=1}^{l-1} \varkappa_i^{a_i Q(r^i)} \mod \lambda^l,$$

so erhält man

---

[1]) Vgl. *Hilbert*, Zahlbericht. § 131. Trägt man in (1*) die Werte (14) ein, so erhält man die Formel (82) bei *Hilbert*. a. a. O.

[2]) Vgl. *Hilbert*, a. a. O., § 109.

$$\left.\begin{aligned} a_1 Q(r) &\equiv e_1 \\ a_t Q(r^t) &\equiv e_t, \qquad (t = 2, 4, \ldots, l-3) \\ a_t Q(r^t) &\equiv 0, \qquad (t = 3, 5, \ldots, l-2) \\ a_{l-1} Q(1) &\equiv 0 \end{aligned}\right\} \text{ mod. } l.$$

Anderseits ist bekanntlich

$$\left.\begin{aligned} Q(r) &= \frac{r^{l-1}-1}{l} \\ Q(r^t) &\equiv 0, \qquad (t = 2, 4, \ldots, l-3) \\ Q(r^t) &\equiv c_t B_{\frac{l-t}{2}}, \quad (t = 3, 5, \ldots, l-2) \\ Q(1) &\equiv \frac{(r-1)(l-1)}{2} \end{aligned}\right\} \text{ mod. } l,$$

wobei B_i die *Bernoulli*schen Zahlen und c_t nicht durch l teilbare rationale Zahlen bedeuten. Folglich ist

$$(15) \qquad \left.\begin{aligned} B_{\frac{l-t}{2}}\, a_t &\equiv 0, \qquad (t = 3, 5, \ldots, l-2) \\ a_{l-1} &\equiv 0 \end{aligned}\right\} \text{ mod. } l.$$

Ersetzt man hierin die Exponenten a_t durch die entsprechenden logarithmischen Differentialquotienten nach (14), so erhält man das in Beziehung zum *Fermat*schen Problem oft zitierte *Kummer*sche Kriterium.

Merkwürdig ist es nun, daß dasselbe Kriterium in einer verallgemeinerten Form auf eine ganz andere Weise hergeleitet werden kann. Sind nämlich μ, ν l-te Idealpotenzen oder Einheiten in k, so hat man

$$(16) \qquad \{\mu^{s^n}, \nu\} = 1, \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots, l-2).$$

Setzt man also

$$\mu \equiv \mu^l \prod_{i=1}^{l-1} \varkappa_i^{u_i}, \quad \nu \equiv \nu^l \prod_{i=1}^{l-1} \varkappa_i^{v_i} \quad \text{mod. } \lambda^l,$$

so daß

$$\mu^{s^n} \equiv \mu^{ls^n} \prod_{i=1}^{l-1} \varkappa_i^{u_i r^{in}} \quad \text{mod. } \lambda^l,$$

dann folgt aus (16), (1*)

$$\sum_{i=1}^{l-1} i\, r^{in}\, u_i\, v_{l-1} \equiv 0 \quad \text{mod. } l, \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots, l-2).$$

Da aber die Determinante

$$|\, r^n, r^{2n}, \ldots, r^{in}, \ldots, r^{(l-1)n} \,| \equiv 0 \quad \text{mod. } l,$$

so ergibt sich die bemerkenswerte Beziehung

$$(17) \qquad u_i\, v_{l-i} \equiv 0 \quad \text{mod. } l, \qquad (i = 1, 2, \ldots, l-1).$$

Setzt man noch in (16) $\nu = \mu$, $n = 1$ so folgt [1])

$$(18) \qquad u_i\, u_{l-i} \equiv 0 \quad \text{mod. } l, \qquad (i = 1, 2, \ldots, l-1).$$

Speziell wird das *Kummer*sche Kriterium gewonnen, wenn man setzt

[1]) Herr *Mirimanoff* gewinnt für die l-te Idealpotenz der speziellen Form $x + \xi y$ eine Beziehung, die sich inhaltlich mit (18) deckt, vgl. dieses Journal 128, S. 67, Formel (43).

$$v = \frac{1-\zeta^r}{1-\zeta},$$

wobei

$$\left.\begin{aligned} v_1 &\equiv \frac{r-1}{2}, \quad & v_t &\equiv 0, & &(t = 3, 5, \ldots, l-2) \\ v_{l-1} &\equiv 0, & v_t &\equiv (-1)^{\frac{t}{2}-1}\frac{1-r^t}{t\cdot t!}B_{\frac{t}{2}}, & &(t = 2, 4, \ldots, l-3) \end{aligned}\right\} \text{ mod. } l,$$

was nach (17) ergibt

$$\left.\begin{aligned} B_{\frac{l-t}{2}}\, u_t &\equiv 0, \quad (t = 3, 5, \ldots, l-2) \\ u_{l-1} &\equiv 0 \end{aligned}\right\} \text{ mod. } l,$$

genau wie in (15).

4. Wenn der Kreiskörper k irregulär, d. h. wenn die Klassenzahl durch l teilbar ist, so herrscht zwischen den Einheiten und den l-ten Idealpotenzen von k eine einfache Beziehung, die wohl ein gewisses Interesse verdient.

Zunächst seien die folgenden leicht zu beweisenden Sätze angeführt:

(1) Ist μ eine Zahl von k, e der kleinste positive Exponent, von der Art, daß μ^{se-a} bei geeignetem a die l-te Potenz einer Zahl von k wird, (so daß notwendig e in $l-1$ aufgeht), dann ist der Körper $K = k(\sqrt[l]{\mu})$ relativ normal in bezug auf den Unterkörper e-ten Grades von k; dann und nur dann ist er relativ *Abel*sch in bezug auf diesen Unterkörper, wenn $a \equiv r^e \bmod. l$ ausfällt.

(2) Ist $K = k(\sqrt[l]{\mu})$ nicht absolut normal, und ist $f(s)$ das ganzzahlige Polynom niedrigsten Grades in s von der Art, daß $\mu^{f(s)}$ die l-te Potenz einer Zahl von k wird, dann ist die Anzahl der von einander verschiedenen mit K konjugierten Körper gleich dem Grade n von $f(s)$. Der aus diesen zusammengesetzte Körper l^n-ten Grades über k läßt sich aus n absolut normalen Körpern zusammensetzen.

In der Tat ist nach Voraussetzung $f(s)$ notwendig Teiler von $s^{l-1}-1 \bmod. l$, also von der Form $f(s) \equiv \prod_{i=1}^{n}(s-a_i) \bmod. l$, wo die $a_i \bmod. l$ inkongruent sind. Setzt man dann $f_i(s) \equiv \frac{f(s)}{s-a_i} \bmod. l$, $\mu_i = \mu^{f_i(s)}$, dann sind die in Frage stehenden Normalkörper durch $k(\sqrt[l]{\mu_i})$ gegeben.

Dies vorausgeschickt, betrachten wir zunächst den Fall, wo die Klassenzahl des reellen Unterkörpers k_0 vom $\frac{l-1}{2}$-ten Grade von k nicht durch l teilbar ist, und wo sich die Sache übersichtlicher verhält. Ist ω eine l-te Idealpotenz, dann folgt nach der Voraussetzung, daß $\omega\bar{\omega} = \varepsilon\, a^l$, wo $\bar{\omega}$ die zu ω konjugiert-komplexe Zahl, ε eine reelle Einheit und a eine Zahl von k_0 bedeutet. Indem wir ω mit einer geeigneten Einheit multiplizieren (z. B. mit $\varepsilon^{-\frac{l+1}{2}}$) und a geeignet wählen (dann $\frac{a}{\varepsilon}$ für a), können wir annehmen:

$$\omega\bar{\omega} = a^l.$$

Da dann nach Satz (1) $k(\sqrt[l]{\omega})$ relativ *Abel*sch in bezug auf k_0 ist, so folgt, daß ω nicht primär sein kann, weil sonst ein relativ-zyklischer unverzweigter Oberkörper l-ten Grades zu k_0 existierte, was durch die Voraussetzung ausgeschlossen ist. Unter der gegenwärtigen Voraussetzung folgt also, weil mit ω auch $\bar{\omega}$ und somit das obige ε primär ist, $\omega\varepsilon^{-\frac{l+1}{2}} = \gamma^l$ mit γ aus k für jedes singulär-primäre ω; es sind demnach *alle singulär-primären Zahlen durch reelle Einheiten gegeben* (also sogar hyperprimär). Ist t der Rang der Klassengruppe, $l^* = \frac{l-3}{2}$ die Anzahl der Grundeinheiten von k, so folgt daraus $t \leqq l^*$.

Die Einheiten ε und die l-ten Idealpotenzen ω von k bezeichnen wir durchgehend mit η, so daß es insgesamt (die Einheitswurzel ζ mitgerechnet) $\frac{l-1}{2}$ unabhängige, nicht-primäre η gibt, wovon t die l-ten Idealpotenzen ω sind. Diese Zahlen η können wir ohne Schaden der Allgemeinheit $\equiv 1$ mod. λ annehmen. Ist dabei $\eta - 1$ genau durch λ^a teilbar, dann heiße η für den Augenblick vom Index a und sei mit $\eta^{(a)}$ bezeichnet. Einfachheitshalber wollen wir überdies $\eta^{(a)}$ gemäß Satz (2) so normiert annehmen, daß $(\eta^{(a)})^{s-n}$ die l-te Potenz einer Zahl von k wird, wo notwendig $n \equiv r^a$ mod. l. Die $\frac{l-1}{2}$ unabhängigen nicht-primären η müssen dann lauter voneinander verschiedene Indizes haben; für zwei Zahlen η, η' mit gleichem Index gibt es ja einen Exponent e derart, daß $\eta'\eta^e$ von einem höheren Index ist. Für ein $\omega^{(a)}$ und ein $\varepsilon^{(b)}$ gilt nun

$$\{\omega^{(a)}, \varepsilon^{(b)}\} = 1,$$

so daß nach § 1 $a + b \equiv\!|\!\equiv 0$ (mod. l). Wenn es also ein $\omega^{(a)}$ gibt, dann fehlt $\varepsilon^{(l-a)}$ mit dem komplementären Index $l - a$, und umgekehrt wenn es ein $\varepsilon^{(b)}$ gibt, so fehlt $\omega^{(l-b)}$. Die t ungeraden Indizes a von $\omega^{(a)}$[1]) und die $\frac{l-3}{2} - t$ geraden Indizes b von reellen $\varepsilon^{(b)}$ sind so mit einander verbunden, daß niemals $a + b = l$ ausfällt; (gegenüber der Einheit ζ mit dem Index 1 fehlt die Idealpotenz $\omega^{(l-1)}$ mit dem Index $l - 1$, vgl. (15): $a_{l-1} = 0$).

Diese merkwürdige Tatsache läßt sich durch die Theorie des allgemeinen Klassenkörpers in einer sehr durchsichtigen Weise erklären. In der Tat, wenn es ein $\varepsilon^{(b)}$ gibt, so heißt dies, daß der Rang der Klassengruppe von k nach dem Modul λ^{b+1} derselbe bleibt wie nach λ^b, oder was dasselbe besagt, es kann λ^{b+1} nicht Führer eines Klassenkörpers zu einer Idealgruppe von k sein. Daher kann es in k keine Zahl η mit dem Index $l - b$ geben; denn für den Körper $k(\sqrt[l]{\eta^{(l-b)}})$ ist der Führer gleich λ^{b+1}. Wenn dagegen ein $\varepsilon^{(b)}$ fehlt, so erfährt der Rang der Klassengruppe ein Zuwachs um 1, wenn der Modul von λ^b zu λ^{b+1} übergeht, was notwendig die Existenz eines $\eta^{(l-b)}$ mit dem komplementären Index $l - b$ nach sich zieht.

Bemerkung. *Kummer* hat in seiner Abhandlung von 1857[2]) beim zweiten

[1]) Wir nehmen $\omega^{(a)}$ so normiert an, daß $\omega^{(a)}\bar{\omega}^{(a)} = \alpha^l$ ist (vgl. S. 235 unten), woraus leicht folgt, daß a ungerade sein muß.

[2]) Einige Sätze über die aus den Wurzeln der Gleichung $\alpha^\lambda = 1$ gebildeten komplexen Zahlen . . ., Abh. der K. Akademie d. Wissensch. Berlin 1857.

Fall des *Fermat*schen Satzes neben der Voraussetzung, daß die Klassenzahl von k nur durch die erste Potenz von l teilbar sei, noch eine zweite eingeführt, die in unserer Schreibweise so lautet: die Einheiten, deren Indizes größer als $2l-1$ sind, sollen l-te Potenzen sein, eine Voraussetzung, die, man könnte sagen, ausdrücklich dazu gemacht ist, um ihm bei dem springenden Punkt seines Beweises zu Hilfe zu kommen. Fehlte eine Einheit vom Index $l-1+b$ $(b<l-1)$, dann müßte wie oben, dem Modul λ^{l+b} zugehörend, ein relativ-zyklischer Klassenkörper vom l^2-ten Grade über k existieren, welcher einen aus $\sqrt[l]{\omega^{(l-b)}}$ entspringenden Klassenkörper l-ten Grades als Unterkörper enthält. Man kann sich die Frage stellen, ob nicht diese Eventualität die Existenz einer Klasse l^2-ten Grades in k bedingt. Wäre diese Frage zu bejahen, so könnte man die *Kummer*sche Zusatzbedingung einfach hinfallen lassen; hierüber zu entscheiden bin ich gegenwärtig nicht imstande.

5. Ähnliche aber kompliziertere Beziehungen bestehen zwischen den Zahlen η, falls die Klassenzahl von k_0 durch l teilbar ist. Seien t und t_0 der Rang der Klassengruppe bzw. von k und k_0. Ferner seien $\Omega_1, \ldots, \Omega_{t_0}$ die unabhängigen l-ten Idealpotenzen von k_0; diese bleiben offenbar auch in k unabhängig. Die übrigen $t-t_0$ unabhängigen Idealpotenzen von k teilen wir in zwei Sorten von je t_1 und t_0' ein, je nachdem sie so normiert werden können, daß $\omega\bar{\omega}=\alpha^l$ wird oder nicht. Sei nun C eine Klasse von der Ordnung l^e in k_0; wie aus der Theorie der allgemeinen Klassenkörper folgt, zerspaltet sich dieselbe in zwei Unterklassen mod. $A=\lambda\bar{\lambda}$, wovon eine der dem relativ-quadratischen Körper k/k_0 zugeordneten Idealgruppe angehört. Demnach gibt es in C stets Primideale $\mathfrak{P}$, die in k/k_0 in zwei verschiedene Primfaktoren zerfallen: $\mathfrak{P}=\mathfrak{p}\bar{\mathfrak{p}}$. Da die Äquivalenz $\mathfrak{p}^h\sim 1$ in k die andere $\mathfrak{P}^h\sim 1$ in k_0 nach sich zieht, so folgt, daß, wenn die aus $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{p}$ entspringenden l-ten Idealpotenzen bzw. mit Ω und ω bezeichnet werden, nach geeigneter Normierung

$$\omega\bar{\omega}=\Omega \quad \text{oder} \quad \omega\bar{\omega}=\alpha^l\ (=\Omega^{l^{e'}}),$$

letzteres wenn die Klasse von $\mathfrak{P}$ in k_0 von einer niedrigeren Ordnung ist als die Klasse von $\mathfrak{p}$ in k. Dieser zweite Fall tritt natürlich auch dann ein, wenn ein Primideal $\mathfrak{P}$ in k_0, welches einer Klasse mit einer zu l primen Ordnung angehört, in k/k_0 in zwei verschiedene Primfaktoren zerfällt. Hieraus folgt, wie man sich leicht überzeugt, daß die t unabhängigen l-ten Idealpotenzen durch

$$\begin{aligned}
&\omega_i', \quad i=1,2,\ldots,t_0': && \omega'\bar{\omega}' \neq \alpha^l,\\
&\Omega_i, \quad i=1,2,\ldots,t_0: && \Omega=\bar{\Omega},\\
&\omega_i, \quad i=1,2,\ldots,t_1: && \omega\bar{\omega}=\alpha^l
\end{aligned}$$

gegeben werden, wo

$$\begin{aligned}
&t=t_1+t_0+t_0',\\
&t_1\geqq t_0',\quad t_0\geqq t_0'.
\end{aligned} \tag{19}$$

Die t_0 unabhängigen Klassenkörper l-ten Grades über k_0 entspringen aus den l-ten Wurzeln der primären unter den Zahlen ω_i (Satz (1)), deren Anzahl mit t_1^+ bezeichnet werde, so daß

$$t_0 = t_1^+ . \tag{20}$$

Ferner ist der Rang der Klassengruppe mod. λ^{l+1} in k_0 gleich $t_0^+ + r^+ + 1$ [1]). Die zugehörigen Klassenkörper entspringen aber aus $\sqrt[l]{\zeta}$ und den l-ten Wurzeln der t_1 Zahlen ω_1, so daß

$$t_1^+ + r^+ + 1 = t_1 + 1 . \tag{21}$$

Ebenso gilt für die Gesamtzahl der unabhängigen Klassenkörper l-ten Grades über k

$$t = t_1 + t_0 + t_0' = t_1^+ + t_1^+ + t_0'^+ + r^+ ,$$

woraus, indem man (20) und (21) berücksichtigt,

$$t_0' = t_0'^+ ,$$

d. h. *die t_0' Zahlen ω' sind sämtlich primär.*

Das Ergebnis ist im folgenden Schema zusammengefaßt:

l-te Idealpotenzen und Einheiten		Gesamtanzahl	Nicht-primär	Primär
ω'	$(\omega'\overline{\omega}' \equiv \alpha^l)$	t_0'	0	t_0'
Ω	$(\Omega = \overline{\Omega})$	t_0	$t_0 - t_0^+$	t_0^+
ω	$(\omega\overline{\omega}' = \alpha^l)$	t_1	$t_1 - t_0$	t_0
ζ	$(\zeta^l = 1)$	1	1	0
ε	$(\varepsilon = \overline{\varepsilon})$	r	r^-	$t - t_0^+$
Total		$t + r + 1$	$r + 1$	t

Da $t_1 - t_0$ die Anzahl der nicht primären unter den Zahlen ω_i angibt, so ist

$$t_1 \geqq t_0 ,$$

folglich

$$t_1 \geqq t_0 \geqq t_0' .$$

Zwischen den Rangzahlen t und t_0 der Klassengruppe von k und k_0 besteht daher nach (19) jedenfalls die Beziehung

$$t \geqq 2t_0 .$$

Schließlich sei noch bemerkt, daß betreffend die Indizes der Zahlen ω_i einerseits, Ω und ε andererseits ähnliche Beziehungen gelten, wie im vorhin behandelten Falle $t_0 = 0$.

Tokio, September 1926.

---

[1]) Mit dem angesetzten $\pm$ wird die Anzahl der primären bezw. der nicht-primären unter den betreffenden Zahlen η angedeutet. Ferner wird, abweichend vom Vorhergehenden, mit r die Anzahl der Grundeinheiten von k bezeichnet.

HERRN OSKAR BOLZA ZUR VOLLENDUNG SEINES SIEBZIGSTEN LEBENSJAHRES AM 12. MAI 1927.

Über abstrakt definierte Transmutationssysteme oder Mischgruppen.

Von *Alfred Loewy* in Freiburg i. B.

Die folgenden Untersuchungen wollen eine Erweiterung des abstrakt definierten Gruppenbegriffs geben. Auf die hier eingeführte Mischgruppe wird man durch die Gruppentheorie bei der *Galois*schen Zerlegung einer Gruppe nach einer in ihr enthaltenen beliebigen Untergruppe geführt, wenn man die bei dieser Zerlegung sich ergebenden Komplexe als Elemente auffaßt. — Hervorgegangen sind die folgenden abstrakten Betrachtungen, die ich bereits im Wintersemester 1925/26 in einer Vorlesung vorgetragen habe, aus meiner Beschäftigung mit der *Galois*schen Gleichungstheorie. So haben auch für diese, ebenso wie für die Körpertheorie, die hier mitgeteilten Ergebnisse ihre Bedeutung, worauf ich in der Fortführung meines in der Anmerkung zitierten Aufsatzes zurückkommen werde [1]). Ist $(\boldsymbol{P}; \varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_k)$ eine endliche algebraische Erweiterung des Körpers $\boldsymbol{P}$, so gehört zu dem Körper $(\boldsymbol{P}; \varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_k)$ eine Mischgruppe, und diese ist, wenn isomorphe Mischgruppen als nicht verschieden gelten, eindeutig bestimmt. Sie ergibt sich als Quotientenmischgruppe aus der *Galois*schen Gruppe des *Galois*schen Oberkörpers über $(\boldsymbol{P}; \varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_k)$.

Der Inhalt des hier vorliegenden Aufsatzes wird aus der Überschrift der Paragraphen ersichtlich:

§ 1. Definition des abstrakten Transmutationssystems oder der Mischgruppe.
§ 2. Isomorphismus zweier Mischgruppen.
§ 3. Die durch die Untergruppen des Kerns einer Mischgruppe bestimmten Quotientenmischgruppen.
§ 4. Homomorphismus zweier Mischgruppen.
§ 5. Darstellung einer Mischgruppe als Transmutationssystem und als Quotientenmischgruppe einer Gruppe.

[1]) *A. Loewy*, Neue elementare Begründung und Erweiterung der *Galois*schen Theorie. Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften. Jahrgang 1925, 7. Abhandlung. Eine Fortsetzung ist inzwischen erschienen. Ebenda, Jahrgang 1927, 1. Abhandlung.

§ 1. Definition des abstrakten Transmutationssystems oder der Mischgruppe.

Unter einem *abstrakten Transmutationssystem* $\mathfrak{T}$ oder, wie ich kurz sage, unter einer *Mischgruppe* $\mathfrak{T}$ verstehe ich ein System von zwei Gattungen $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ von Elementen, wobei $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ keine Elemente gemeinsam haben und den folgenden Postulaten genügen:

1. *Postulat der Komponierbarkeit und Abgeschlossenheit.*

a) Irgend zwei Elemente G_i und G_k aus $\mathfrak{G}$, die im besondern auch gleich sein können, sollen stets komponierbar sein und dabei als Produkt G_iG_k ein Element aus $\mathfrak{G}$ ergeben.

b) Jedes Element H aus $\mathfrak{H}$ soll als rechtshändiger Faktor mit jedem Element G aus $\mathfrak{G}$ komponierbar sein und dabei stets ein Element aus $\mathfrak{H}$ ergeben.

2. *Postulat des Einheitselements in* $\mathfrak{G}$.

In $\mathfrak{G}$ soll stets wenigstens ein Element E_1 vorhanden sein, so daß für jedes Element G aus $\mathfrak{G}$ das Produkt $GE_1 = G$ wird. E_1 heißt rechtshändiges Einheitselement für $\mathfrak{G}$.

3. *Postulat des reziproken Elements.*

a) Ist G irgendein in $\mathfrak{G}$ befindliches Element, so soll $\mathfrak{G}$ stets auch mindestens ein Element G' enthalten, daß $GG' = E_1$ wird, wobei E_1 das unter 2. eingeführte Einheitselement bedeutet.

b) Für jedes Element H aus $\mathfrak{H}$ soll stets mindestens ein Element H' existieren, daß sich HH' bilden läßt und $HH' = E_1$ wird. H' heißt *rechtshändiges inverses Element* von H und wird mit H^{-1} bezeichnet, so daß $H' = H^{-1}$ und $HH' = HH^{-1} = E_1$ ist [1]).

4. *Assoziatives Postulat.*

Sind A, B, C irgend drei Elemente aus $\mathfrak{T}$ oder nach dem Postulat 3. b) zu den Elementen von $\mathfrak{T}$ zugehörige rechtshändige inverse Elemente, so soll die Existenz der Produkte BC und $A(BC)$ stets auch diejenige der Produkte AB und $(AB)C$ und umgekehrt nach sich ziehen und $A(BC) = (AB)C$ sein, wofür wir ABC schreiben.

5. *Postulat der Eindeutigkeit.*

Die Gleichungen $T_i X = T_k$ und $Y T_i^{-1} = T_k^{-1}$ sollen außer der sich aus unseren Postulaten ergebenden Lösung ($X = T_i^{-1} T_k$ beziehungsweise $Y = T_k^{-1} T_i$) keine weitere besitzen.

6. *Postulat des maximalen Charakters von* $\mathfrak{G}$ *innerhalb* $\mathfrak{T}$.

Es soll unmöglich sein, das System $\mathfrak{G}$ durch Hinzunahme von Elementen aus $\mathfrak{H}$ zu einem System $\mathfrak{G}^*$ derart zu erweitern, daß sich die Mischgruppe $\mathfrak{T}$ in zwei elementfremde Systeme $\mathfrak{G}^*$ und $\mathfrak{H}^*$ zerlegen läßt und dabei auch noch alle angegebenen Postulate 1. bis 5. bestehen bleiben, wenn in ihnen gleichzeitig $\mathfrak{G}$ durch $\mathfrak{G}^*$ und $\mathfrak{H}$ durch $\mathfrak{H}^*$ ersetzt wird.

---

[1]) Wir bemerken noch ausdrücklich, daß die zu den Elementen H von $\mathfrak{H}$ zugehörigen rechtshändigen inversen Elemente H^{-1} nicht der Mischgruppe $\mathfrak{T}$ anzugehören brauchen.

Hat man eine Mischgruppe $\mathfrak{T} = \mathfrak{G} + \mathfrak{H}$, so nennen wir $\mathfrak{G}$ den *Kern* und $\mathfrak{H}$ die *Schale* von $\mathfrak{T}$. Aus den Postulaten 1. a), 2., 3. a) und 4. folgt, daß die *Elemente des Kerns* $\mathfrak{G}$ *eine Gruppe* bilden[1]). Demnach enthält $\mathfrak{G}$ im besondern nur ein einziges Einheitselement E_1, das für die Elemente von $\mathfrak{G}$ nicht nur rechtshändiges, sondern auch linkshändiges Einheitselement ist. Weiter existiert nach den vier genannten Postulaten für jedes Element G aus $\mathfrak{G}$ stets ein eindeutig bestimmtes inverses Element G^{-1}, das $\mathfrak{G}$ angehört und mit G vertauschbar ist, also $GG^{-1} = G^{-1}G = E_1$. Schließlich zieht jede der zwei Gleichungen $GG_i = GG_k$ oder $G_iG = G_kG$, wenn G, G_i und G_k irgend drei Elemente aus $\mathfrak{G}$ bedeuten, die Relation $G_i = G_k$ nach sich.

Das sechste Postulat besagt, daß der Kern $\mathfrak{G}$ eine *größte* innerhalb einer Mischgruppe $\mathfrak{T}$ enthaltene Gruppe ist. In dem besonderen Fall, daß die Schale $\mathfrak{H}$ von $\mathfrak{T}$ leer von Elementen ist, hat man $\mathfrak{T} = \mathfrak{G}$, und der Begriff der Mischgruppe fällt mit dem der Gruppe zusammen.

Wir leiten nunmehr einige Sätze für eine Mischgruppe $\mathfrak{T}$ ab.

α) Für jedes Element T der Mischgruppe $\mathfrak{T}$ ist $E_1T = T$. Außer $Z = E_1$ gibt es in $\mathfrak{T}$ kein Element, das der Gleichung $ZZ = Z$ genügt.

Aus $TT^{-1} = E_1 = E_1E_1 = E_1(TT^{-1}) = (E_1T)T^{-1}$ folgt, daß die Gleichung $YT^{-1} = E_1$ die zwei Lösungen $Y = T$ und $Y = E_1T$ besitzt. Mithin muß nach dem Postulat 5. $T = E_1T$ sein. Zum Beweis des zweiten Teiles unseres Satzes betrachten wir ein Element Z aus $\mathfrak{T}$, für das sich ZZ bilden lasse und gleich Z sei. Aus $ZZ = Z$ folgt, daß $(ZZ)Z^{-1} = ZZ^{-1} = E_1$ und auf Grund des assoziativen Postulats 4. $Z(ZZ^{-1}) = E_1$ oder $ZE_1 = E_1$ ist. Diese Gleichung kann aber auf Grund von Postulat 5. nur die einzige Lösung $Z = E_1$ besitzen.

β) Eine Mischgruppe $\mathfrak{T}$ enthält nur einen einzigen Kern $\mathfrak{G}$.

Angenommen, unsere Mischgruppe $\mathfrak{T}$ enthalte neben $\mathfrak{G}$ noch einen von $\mathfrak{G}$ verschiedenen Kern Γ. Dann bilde man sich, wenn $G_i, G_k, G_l, \ldots, G_s$ eine beliebige endliche Anzahl von Elementen aus $\mathfrak{G}$, $\Gamma_i, \Gamma_k, \Gamma_l, \ldots, \Gamma_s$ eine solche aus Γ bedeuten, das Produkt $\Pi = G_i\Gamma_iG_k\Gamma_kG_l\Gamma_l \cdots G_s\Gamma_s$. Da $\mathfrak{G}$ und Γ Kerne von $\mathfrak{T}$ sein sollen, ist die Bildung dieses Produktes nach unseren Postulaten stets möglich und führt auch nur zu Elementen aus $\mathfrak{T}$. Die Elemente Π aus $\mathfrak{T}$ haben ersichtlich Gruppeneigenschaft. Zunächst ist das Produkt zweier Elemente von der Form Π wieder von dieser Form. Weiter ist $E_1 = E_1E_1$ von unserer Produktform Π; denn man kann $G_i = E_1$ und $\Gamma_i = E_1$ wählen, da ja auch Γ als Gruppe nach dem unter α) bewiesenen Resultat E_1 zur Einheit haben muß. Betrachtet man ferner das zu $\Pi = G_i\Gamma_iG_k\Gamma_k \cdots G_s\Gamma_s$ inverse Element $\Pi^{-1} = \Gamma_s^{-1}G_s^{-1} \cdots \Gamma_k^{-1}G_k^{-1}\Gamma_i^{-1}G_i^{-1}$ $= E_1\Gamma_s^{-1}G_s^{-1} \cdots \Gamma_k^{-1}G_k^{-1}\Gamma_i^{-1}G_i^{-1}E_1$, so hat auch dieses, da $E_1, G_s^{-1}, \ldots, G_k^{-1}, G_i^{-1}$ Elemente der Gruppe $\mathfrak{G}$, weiter $\Gamma_s^{-1}, \ldots, \Gamma_k^{-1}, \Gamma_i^{-1}, E_1$ solche der Gruppe Γ sind, das Aussehen unserer Produkte Π. Für die Komposition der Produkte Π gilt, da es sich um Elemente aus $\mathfrak{T}$ handelt, nach Postulat 4. das assoziative Gesetz. Mithin ist für die Produkte Π die Gruppeneigenschaft festgestellt. Die Produkte Π ent-

[1]) Vgl. etwa mein Lehrbuch der Algebra, erster Teil, Grundlagen der Arithmetik, Leipzig 1915, S. 25.

halten alle Elemente von $\mathfrak{G}$ in sich, wie die Wahl $\Pi = G_i \Gamma_i$ mit $\Gamma_i = E_1$ zeigt. Da sich wegen der sowohl für $\mathfrak{G}$ als auch für Γ vorausgesetzten Kerneigenschaften die Produkte Π als linkshändige Faktoren mit allen Elementen von $\mathfrak{T}$ komponieren lassen, ist durch die Existenz eines zweiten Kernes Γ im Widerspruch zu Postulat 6. die Erweiterungsmöglichkeit des Kerns $\mathfrak{G}$ zu dem System der Produktelemente Π vorhanden. Hiermit ist dargetan, daß es neben $\mathfrak{G}$ in $\mathfrak{T}$ keinen weiteren Kern gibt.

γ) *Der Komplex $\mathfrak{G}T$, der durch rechtshändige Komposition des Kerns $\mathfrak{G}$ von $\mathfrak{T}$ mit einem festen Element T von $\mathfrak{T}$ erhalten wird, umfaßt lauter untereinander verschiedene Elemente von $\mathfrak{T}$.*

Angenommen, für irgend zwei untereinander verschiedene Elemente G_i und G_k wäre $G_i T = G_k T$, so würde aus $G_i = G_i E_1 = G_i(TT^{-1}) = (G_i T)T^{-1} = (G_k T)T^{-1} = G_k(TT^{-1}) = G_k E_1 = G_k$ im Widerspruch zu unserer Voraussetzung die Gleichheit von G_i und G_k folgen.

δ) *Sind H_i und H_k zwei Elemente von $\mathfrak{H}$, so haben die Komplexe $\mathfrak{G}H_i$ und $\mathfrak{G}H_k$ entweder alle Elemente oder kein einziges Element gemeinsam.*

Besteht nämlich für irgend zwei Elemente G_l und G_m aus dem Kerne $\mathfrak{G}$ von $\mathfrak{T}$ die Gleichung $G_l H_i = G_m H_k$, so folgt aus ihr, da $H_k = E_1 H_k = (G_m^{-1} G_m) H_k = G_m^{-1}(G_m H_k)$ ist, daß $H_k = G_m^{-1}(G_l H_i) = (G_m^{-1} G_l) H_i$ sein muß. Mithin sind die zwei Komplexe $\mathfrak{G}H_i$ und $\mathfrak{G}H_k = \mathfrak{G}(G_m^{-1} G_l) H_i = \mathfrak{G}H_i$ identisch.

ε) *Jede Mischgruppe $\mathfrak{T}$ läßt eine Galoissche Zerlegung nach ihrem Kern $\mathfrak{G}$ zu:*

$$\mathfrak{T} = \mathfrak{G} + \mathfrak{G}H_2 + \mathfrak{G}H_3 + \cdots,$$

so daß von den rechts stehenden Komplexen $\mathfrak{G}H_i$ und $\mathfrak{G}H_k$ niemals zwei ein Element gemeinsam haben und sich die Elemente von $\mathfrak{G}H_i$ und $\mathfrak{G}H_k$ einander eindeutig umkehrbar zuordnungsfähig erweisen.

Zum Beweise ordne man den Elementen T von $\mathfrak{T}$ die Komplexe $\mathfrak{G}T$ zu. Von diesen Komplexen, die zu je zweien entweder identisch oder elementfremd sind, behalte man nur die untereinander verschiedenen bei. Alsdann befindet sich jedes Element von $\mathfrak{T}$ in einem und nur einem dieser Komplexe, und zwar die Elemente von $\mathfrak{G}$ in dem Kern $\mathfrak{G}$ von $\mathfrak{T}$ und ein Element H_i aus $\mathfrak{T}$ in dem Komplex $\mathfrak{G}H_i$, der auch das Element $E_1 H_i = H_i$ enthält. Sind H_i und H_k irgend zwei Elemente aus $\mathfrak{T}$, so gehören sie dann und nur dann demselben Komplex $\mathfrak{G}H_i = \mathfrak{G}H_k$ an, wenn es zwei Kernelemente G_i und G_k gibt, so daß $G_i H_i = G_k H_k$, also $H_k = G_k^{-1} G_i H_i$ oder $H_k = G H_i$ ist, wobei G_i, G_k und G Elemente aus $\mathfrak{G}$ bedeuten.

Da der Komplex $\mathfrak{G}H_i$ nach dem Satz γ lauter untereinander verschiedene Elemente umfaßt, lassen sich zwei verschiedenen Elementen G_l und G_m aus $\mathfrak{G}$ die ebenfalls untereinander verschiedenen Elemente $G_l H_i$ und $G_m H_i$ aus $\mathfrak{G}H_i$ beziehungsweise $G_l H_k$ und $G_m H_k$ aus $\mathfrak{G}H_k$ zuordnen, was die eindeutig umkehrbare Zuordnungsfähigkeit der Elemente der Komplexe $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}H_i$ und $\mathfrak{G}H_k$ aufeinander beweist. Mithin sind alle Aussagen des Satzes ε) dargetan. Die für die *Galois*sche Zerlegung von $\mathfrak{T}$ nach seinem Kern $\mathfrak{G}$ gewählte Schreibart: $\mathfrak{T} = \mathfrak{G} + \mathfrak{G}H_2 + \mathfrak{G}H_3 + \cdots$ soll, wie noch bemerkt sei, keine Abzählbarkeit im Sinne der Mengenlehre bedeuten.

ζ) Ist T irgendein Element der Mischgruppe $\mathfrak{T}$, so ist das zu T rechtshändige inverse Element T^{-1} als linkshändiger Faktor mit sämtlichen Elementen von $\mathfrak{T}$ komponierbar, und $T^{-1}\mathfrak{T}$ ist eine Mischgruppe, die $T^{-1}\mathfrak{G}T$ zum Kern besitzt.

Aus $E_1 = E_1E_1 = (TT^{-1})E_1$ folgt auf Grund des assoziativen Postulats $E_1 = T(T^{-1}E_1)$. Hiermit ist die Existenz von $T^{-1}E_1$ erwiesen und gezeigt, daß $X = T^{-1}E_1$ Lösung der Gleichung $TX = E_1$ ist. Diese Gleichung wird aber auch durch $X = T^{-1}$ befriedigt. Nach Postulat 5. ist demnach $T^{-1}E_1 = T^{-1}$. Bedeuten nunmehr G und H irgend zwei Elemente aus $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$, so ist $E_1 = (G(HH^{-1}))G^{-1}$ oder auf Grund des Postulats 4. $E_1 = ((GH)H^{-1})G^{-1}$. Da GH Element aus $\mathfrak{T}$ ist und $(GH)H^{-1} = G(HH^{-1}) = GE_1 = G$ existiert, kann man nochmals das assoziative Postulat 4. anwenden und erhält $E_1 = (GH)(H^{-1}G^{-1})$; demnach ist $H^{-1}G^{-1}$ existent und rechtshändiges inverses Element von GH. Ist weiter T ein beliebiges Element aus $\mathfrak{T}$, so ist, wie bereits bewiesen, $T^{-1} = T^{-1}E_1$ und infolgedessen $T^{-1} = T^{-1}((GH)(H^{-1}G^{-1}))$; wendet man auf diese Gleichung das assoziative Postulat an — dies ist statthaft, da GH und $H^{-1}G^{-1}$ Elemente aus $\mathfrak{T}$ bezw. rechtshändige inverse solcher Elemente sind —, so erhält man $T^{-1} = (T^{-1}(GH))H^{-1}G^{-1}$. Hiermit ist die Existenz von $T^{-1}(GH)$ sichergestellt. Nach dem Satz ε) hat jedes Element von $\mathfrak{T}$ die Form GH oder G; folglich ist die Möglichkeit der Bildung des Systems $T^{-1}\mathfrak{T}$ gezeigt.

Wir führen jetzt den Nachweis, daß $T^{-1}\mathfrak{T}$ eine Mischgruppe mit dem Kern $T^{-1}\mathfrak{G}T$ ist. Zunächst existiert $T^{-1}\mathfrak{G}T$; denn nach Postulat 1. kann man den Komplex $\mathfrak{G}T$ bilden und erhält auf diese Weise nur Elemente aus $\mathfrak{T}$, und aus $\mathfrak{G}T$ läßt sich wegen der soeben bewiesenen Existenz von $T^{-1}\mathfrak{T}$ der Komplex $T^{-1}(\mathfrak{G}T) = T^{-1}\mathfrak{G}T$ herleiten, dessen Elemente $T^{-1}\mathfrak{T}$ angehören. Die Relation $(T^{-1}\mathfrak{G}T)(T^{-1}\mathfrak{G}T) = T^{-1}\mathfrak{G}E_1\mathfrak{G}T = T^{-1}\mathfrak{G}\mathfrak{G}T = T^{-1}\mathfrak{G}T$ beweist, daß die Elemente von $T^{-1}\mathfrak{G}T$ untereinander komponierbar sind und daß die Produktbildung aus ihrem Kreise nicht herausführt. Weiter enthält $T^{-1}\mathfrak{G}T$ das Element $T^{-1}E_1T = T^{-1}T$; dieses ist für alle Elemente von $T^{-1}\mathfrak{G}T$ sowohl rechts- als auch linkshändiges Einheitselement; denn man hat, wenn G irgendein Element aus $\mathfrak{G}$ bedeutet, $T^{-1}GT(T^{-1}T) = T^{-1}G(TT^{-1})T = T^{-1}GE_1T = T^{-1}GT$ und $(T^{-1}T)T^{-1}GT = T^{-1}GT$. Für jedes Element $T^{-1}GT$ aus $T^{-1}\mathfrak{G}T$ ist das Element $T^{-1}G^{-1}T$, das ebenfalls $T^{-1}\mathfrak{G}T$ angehört, in bezug auf $T^{-1}T$ rechtshändiges inverses Element; denn man hat $(T^{-1}GT)(T^{-1}G^{-1}T) = T^{-1}(GTT^{-1}G^{-1})T = T^{-1}T$. Da das Postulat 4. schließlich auch noch die Gültigkeit des assoziativen Gesetzes für jedes Element von $T^{-1}\mathfrak{G}T$ besagt, erfüllt $T^{-1}\mathfrak{G}T$ die an den Kern von $T^{-1}\mathfrak{T}$ zu stellenden Gruppenpostulate und ist eine Gruppe mit dem Einheitselement $T^{-1}T$.

Ist $T^{-1}T_i$ ein beliebiges Element aus $T^{-1}\mathfrak{T}$, so kann man dieses als rechtshändigen Faktor mit jedem Element $T^{-1}GT$ von $T^{-1}\mathfrak{G}T$ komponieren und erhält ein

Element aus $T^{-1}\mathfrak{T}$. Tatsächlich ist $(T^{-1}GT)(T^{-1}T_i) = T^{-1}G(TT^{-1})T_i = T^{-1}(GT_i)$; dies ist ein Element aus $T^{-1}\mathfrak{T}$.

Da sich zu jedem Element $T^{-1}T_i$ aus $T^{-1}\mathfrak{T}$ auch das Element $T_i^{-1}T$ bilden läßt, das dem System $T_i^{-1}\mathfrak{T}$ angehört, und $(T^{-1}T_i)(T_i^{-1}T) = T^{-1}E_1T = T^{-1}T$ ist, gilt für das System $T^{-1}\mathfrak{T}$ auch das Postulat 3. vom rechtshändigen inversen Element. Da $T^{-1}\mathfrak{T}$ nur Produkte von Elementen von $\mathfrak{T}$ selbst und von rechtshändig inversen Elementen der Elemente aus $\mathfrak{T}$ enthält und für $\mathfrak{T}$ das assoziative Postulat 4. gilt, trifft es auch für $T^{-1}\mathfrak{T}$ zu.

Das Postulat 5. verlangt die Betrachtung der Gleichungen $T^{-1}T_iX = T^{-1}T_k$ und $YT_i^{-1}T = T_k^{-1}T$, wobei T_i und T_k beliebige Elemente aus $\mathfrak{T}$ bedeuten. Aus ihnen folgt durch linkshändige Multiplikation mit T bzw. rechtshändige mit T^{-1} das Bestehen der Gleichungen $T_iX = T_k$ bzw. $YT_i^{-1} = T_k^{-1}$, die nach Postulat 5. nur die einzige Lösung $X = T_i^{-1}T_k = T_i^{-1}TT^{-1}T_k = (T^{-1}T_i)^{-1}(T^{-1}T_k)$ bzw. $Y = T_k^{-1}T_i = (T^{-1}T_k)^{-1}(T^{-1}T_i)$ zulassen. Es ist nur noch nachzuweisen, daß für $T^{-1}\mathfrak{T}$ auch noch das Postulat 6. erfüllt ist, also $T^{-1}\mathfrak{G}T$ den Kern von $T^{-1}\mathfrak{T}$ erschöpft. Angenommen, es gibt außer den Elementen von $T^{-1}\mathfrak{G}T$ in $T^{-1}\mathfrak{T}$ noch wenigstens ein weiteres Element $T^{-1}T_q$, das dem Kern von $T^{-1}\mathfrak{T}$ angehört. Dann befindet sich im Kern von $\mathfrak{T} = (TT^{-1})\mathfrak{T} = T(T^{-1}\mathfrak{T})$ das Element $T(T^{-1}T_q)T^{-1} = T_qT^{-1}$. Man hat also $T_qT^{-1} = G$, wobei G Element aus $\mathfrak{G}$ ist. Mithin wird $G^{-1}(T_qT^{-1}) = E_1$ oder $(G^{-1}T_q)T^{-1} = E_1$. Hieraus folgt auf Grund des Eindeutigkeitspostulats, daß $G^{-1}T_q = T$ oder $T_q = GT$ ist. Die letzte Gleichung besagt aber im Widerspruch zu unserer Annahme, daß $T^{-1}T_q = T^{-1}GT$ zu $T^{-1}\mathfrak{G}T$ gehört; mithin ist nachgewiesen, daß $T^{-1}\mathfrak{G}T$ tatsächlich den Kern von $\mathfrak{T}$ erschöpft.

§ 2. Isomorphismus zweier Mischgruppen.

Zwei Mischgruppen $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{T}^*$ sollen isomorph heißen, falls sich ihre Elemente einander eindeutig umkehrbar so zuordnen lassen, daß, falls T_i und T_i^* sowie T_k und T_k^* zwei Paare entsprechender Elemente bedeuten, auch die Produkte T_iT_k und $T_i^*T_k^*$, sofern sie auf Grund der Postulate 1. *bis* 6. *existieren* [1]), *stets gleichzeitig existieren oder nicht existieren und im ersten Fall einander entsprechen.*

$\mathfrak{G}$ sei der Kern von $\mathfrak{T}$; den Komplex derjenigen Elemente von $\mathfrak{T}^*$, die den Elementen von $\mathfrak{G}$ entsprechen, bezeichnen wir mit Γ^*. Sind dann G_i und G_k zwei Elemente aus $\mathfrak{G}$, G_i^* und G_k^* die ihnen zugeordneten aus Γ^*, entspricht infolgedessen dem Produkt G_iG_k das Produkt $G_i^*G_k^*$, so gehört dieses zu Γ^*, da sich G_iG_k wegen der Gruppeneigenschaft von $\mathfrak{G}$ in $\mathfrak{G}$ befindet. Entsprechen sich weiter das Einheitselement E_1 von $\mathfrak{G}$ und das Element E_1^* von $\mathfrak{T}^*$, so gehört E_1^* nach der Bildung von Γ^* zu Γ^* und aus $E_1E_1 = E_1$ folgt $E_1^*E_1^* = E_1^*$, womit nach α) des § 1 erwiesen ist, daß E_1^* Einheitselement von $\mathfrak{T}^*$ ist. Entspricht weiter dem

[1]) Die Produkte $T_i\,T_k$ und $T_i^*\,T_k^*$ sind demnach dann und nur dann existent, wenn die linkshändigen Faktoren $T_i\,T_i^*$ Kernelemente aus $\mathfrak{T}$ bezw. $\mathfrak{T}^*$ sind.

zu G inversen Element G^{-1} das Element X^* aus $\mathfrak{T}^*$, so ergibt sich aus $GG^{-1} = E_1$ wegen der isomorphen Zuordnung, daß $G^*X^* = E_1^*$ sein muß, d. h. $X^* = (G^*)^{-1}$. Da G^{-1} wegen der Gruppeneigenschaft von $\mathfrak{G}$ zu $\mathfrak{G}$ gehört, befindet sich $X^* = (G^*)^{-1}$ in Γ^*. Die Elemente von Γ^* erfüllen demnach die Gruppenpostulate, die für den Kern $\mathfrak{G}^*$ von $\mathfrak{T}^*$ unerläßliche Bedingung sind. Aus der Umkehrbarkeit der isomorphen Beziehung folgt, daß auch die Elemente des Kernes $\mathfrak{G}^*$ von $\mathfrak{T}^*$ nur Elementen aus dem Kern $\mathfrak{G}$ von $\mathfrak{T}$ entsprechen. Hiernach muß Γ^* den Kern $\mathfrak{G}^*$ von $\mathfrak{T}^*$ erschöpfen; denn sonst hätte ja $\mathfrak{G}^*$ noch Elemente, deren zugeordnete sich nicht im Kern $\mathfrak{G}$ von $\mathfrak{T}$ befinden würden.

Sind H_i und H_k irgend zwei Elemente aus der Schale $\mathfrak{H}$ von $\mathfrak{T}$, so müssen ihnen zum Zweck der isomorphen Beziehung, da sich die Kerne $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}^*$ von $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{T}^*$ eindeutig entsprechen, Elemente H_i^* und H_k^* aus der Schale $\mathfrak{H}^*$ von $\mathfrak{T}^*$ zugeordnet werden. Infolge des Isomorphismus entsprechen dann den im Komplex $\mathfrak{G}H_i$ befindlichen Elementen diejenigen des Komplexes $\mathfrak{G}^*H_i^*$ und den in $\mathfrak{G}H_k$ enthaltenen Elementen diejenigen von $\mathfrak{G}^*H_k^*$. Je nachdem die Komplexe $\mathfrak{G}H_i$ und $\mathfrak{G}H_k$ elementfremd oder identisch sind (vergl. Satz δ) in § 1), trifft das nämliche für die ihnen zugeordneten Komplexe $\mathfrak{G}^*H_i^*$ und $\mathfrak{G}^*H_k^*$ zu; denn eine Gleichung $G_lH_i = G_mH_k$ zwischen den Elementen von $\mathfrak{G}H_i$ und $\mathfrak{G}H_k$ zieht infolge des Isomorphismus die Gleichung $G_l^*H_i^* = G_m^*H_k^*$ zwischen den entsprechenden Elementen aus $\mathfrak{G}^*H_i^*$ und $\mathfrak{G}^*H_k^*$ nach sich. Für den Isomorphismus zweier Mischgruppen $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{T}^*$ ist demnach außer dem Isomorphismus ihrer Kerne $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}^*$ nur noch notwendig, daß sich die bei den *Galois*schen Zerlegungen

$$\mathfrak{T} = \mathfrak{G} + \mathfrak{G}H_2 + \mathfrak{G}H_3 + \cdots \quad \text{und}$$
$$\mathfrak{T}^* = \mathfrak{G}^* + \mathfrak{G}^*H_2^* + \mathfrak{G}^*H_3^* + \cdots$$

von $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{T}^*$ nach ihren Kernen $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}^*$ ergebenden Komplexe eindeutig umkehrbar zuordnungsfähig erweisen. Trifft dies zu und ordnet man die Komplexe $\mathfrak{G}H_2, \mathfrak{G}H_3, \cdots$ und $\mathfrak{G}^*H_2^*, \mathfrak{G}^*H_3^*, \ldots$ irgendwie einander eindeutig umkehrbar zu, so kann man zur Gewinnung der isomorphen Beziehung je einem beliebig ausgewählten Element aus je einem der Komplexe $\mathfrak{G}H_2, \mathfrak{G}H_3, \ldots$ ein den entsprechenden Komplexen $\mathfrak{G}^*H_2^*, \mathfrak{G}^*H_3^*, \ldots$ willkürlich entnommenes Element zuordnen. Hiermit hat man den gewünschten Isomorphismus zwischen $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{T}^*$, und es gilt der

Satz 1: *Als notwendig und hinreichend dafür, daß zwei Mischgruppen $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{T}^*$ isomorph sind, erweisen sich der Isomorphismus ihrer Kerne $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}^*$ und die Möglichkeit der eindeutig umkehrbaren Beziehung der Komplexe, die sich bei der Galoisschen Zerlegung*

$$\mathfrak{T} = \mathfrak{G} + \mathfrak{G}H_2 + \mathfrak{G}H_3 + \cdots \quad \text{und}$$
$$\mathfrak{T}^* = \mathfrak{G}^* + \mathfrak{G}^*H_2^* + \mathfrak{G}^*H_3^* + \cdots$$

von $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{T}^*$ nach $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}^*$ ergeben.

Aus dem soeben bewiesenen Theorem folgt der

Satz 2: *Ist $\mathfrak{T}$ eine Mischgruppe, T ein beliebiges Element aus $\mathfrak{T}$, so ist die Mischgruppe $T^{-1}\mathfrak{T}$ stets zu $\mathfrak{T}$ isomorph.*

Ist

$$\mathfrak{T} = \mathfrak{G} + \mathfrak{G}H_2 + \mathfrak{G}H_3 + \cdots$$

die *Galois*sche Zerlegung von $\mathfrak{T}$ nach seinem Kern $\mathfrak{G}$ und T das Element $T = GH_i$ aus $\mathfrak{T}$, so hat man

$$T^{-1}\mathfrak{T} = T^{-1}\mathfrak{G}T + T^{-1}\mathfrak{G} + T^{-1}\mathfrak{G}H_2 + \cdots + T^{-1}\mathfrak{G}H_k + \cdots + T^{-1}\mathfrak{G}H_{i+1} + \cdots [1]).$$

Die Gruppen $\mathfrak{G}$ und $T^{-1}\mathfrak{G}T$, die Kerne von $\mathfrak{T}$ und $T^{-1}\mathfrak{T}$, lassen sich isomorph aufeinander beziehen, indem man den Elementen G_l von $\mathfrak{G}$ die Elemente $T^{-1}G_lT$ von $T^{-1}\mathfrak{G}T$ zuordnet.

Weiter ist

$$T^{-1}\mathfrak{T} = T^{-1}\mathfrak{G}T + (T^{-1}\mathfrak{G}T)T^{-1}E_1 + (T^{-1}\mathfrak{G}T)T^{-1}H_2 + \cdots + (T^{-1}\mathfrak{G}T)T^{-1}H_k + \cdots + (T^{-1}\mathfrak{G}T)T^{-1}H_{i+1} + \cdots [1])$$

die *Galois*sche Zerlegung von $T^{-1}\mathfrak{T}$ nach $T^{-1}\mathfrak{G}T$, und die Komplexe $T^{-1}\mathfrak{G}$, $T^{-1}\mathfrak{G}H_2, \ldots, T^{-1}\mathfrak{G}H_k, \ldots, T^{-1}\mathfrak{G}H_{i+1}, \ldots$ dieser Zerlegung lassen sich eineindeutig den Komplexen $\mathfrak{G}H_2$, $\mathfrak{G}H_3, \ldots, \mathfrak{G}H_i$, $\mathfrak{G}H_{i+1}, \ldots$ der *Galois*schen Zerlegung von $\mathfrak{T}$ nach $\mathfrak{G}$ zuordnen. Hiermit ist der Isomorphismus von $\mathfrak{T}$ und $T^{-1}\mathfrak{T}$ nach dem vorigen Satz gezeigt.

§ 3. Die durch die Untergruppen des Kerns einer Mischgruppe bestimmten Quotientenmischgruppen.

Jede im Kern $\mathfrak{G}$ einer Mischgruppe $\mathfrak{T}$ enthaltene Untergruppe $\mathfrak{U}$ bestimmt eine neue Mischgruppe, die wir als die *Quotientenmischgruppe* $||\mathfrak{T}|\mathfrak{U}||$ bezeichnen. Zu ihrer Herleitung betrachten wir alle in der Gruppe $\mathfrak{G}$ enthaltenen Elemente N_i, die mit $\mathfrak{U}$ vertauschbar sind, für die also die Gleichung $N_i\mathfrak{U} = \mathfrak{U}N_i$ zutrifft. Diese Elemente bilden eine Gruppe; denn man hat $E_1\mathfrak{U} = \mathfrak{U}E_1$, weiter folgt durch links- und rechtshändige Multiplikation von $N_i\mathfrak{U} = \mathfrak{U}N_i$ mit N_i^{-1}, daß $\mathfrak{U}N_i^{-1} = N_i^{-1}\mathfrak{U}$ ist, und schließlich zieht die Vertauschbarkeit von den zwei Elementen N_i und N_k mit $\mathfrak{U}$ die Gleichung $N_iN_k\mathfrak{U} = N_i\mathfrak{U}N_k = \mathfrak{U}N_iN_k$ nach sich. Die Gruppe der im Kern $\mathfrak{G}$ befindlichen, mit $\mathfrak{U}$ vertauschbaren Elemente nennt man den *Normalisator von* $\mathfrak{U}$; er sei mit $\mathfrak{N}$ bezeichnet. Da $\mathfrak{N}$ Untergruppe von $\mathfrak{G}$ ist, kann man durch Zerlegung von $\mathfrak{G}$ nach $\mathfrak{N}$ die *Galois*sche Zerlegung von $\mathfrak{T}$ nach $\mathfrak{G}$ in eine solche von $\mathfrak{T}$ nach $\mathfrak{N}$ fortsetzen. Es sei

$$\mathfrak{T} = \mathfrak{N} + \mathfrak{N}P_2 + \mathfrak{N}P_3 + \cdots \tag{1}$$

die *Galois*sche Zerlegung der Mischgruppe $\mathfrak{T}$ nach der in ihrem Kern befindlichen Untergruppe $\mathfrak{N}$, es bedeuten also $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{N}P_2$, $\mathfrak{N}P_3$, ... untereinander elementfremde Komplexe aus $\mathfrak{T}$.

Weiter sei die *Galois*sche Zerlegung von $\mathfrak{N}$ nach der in $\mathfrak{N}$ befindlichen Untergruppe $\mathfrak{U}$ vorgenommen und ergebe

$$\mathfrak{N} = \mathfrak{U} + \mathfrak{U}N_2 + \mathfrak{U}N_3 + \cdots, \tag{2}$$

wobei $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{U}N_2$, $\mathfrak{U}N_3$, ... untereinander elementfremde Komplexe aus $\mathfrak{N}$ sind.

[1]) Hierbei ist $k < i$; denn H_i ist bereits voraufgenommen, während k, i irgendwelche finite oder auch transfinite Ordinalzahlen darstellen.

Aus (1) und (2) erhält man die *Galois*sche Zerlegung von $\mathfrak{T}$ nach der Gruppe $\mathfrak{U}$ in folgender Form:

$$\begin{aligned}(3)\qquad \mathfrak{T} = \mathfrak{U} &+ \mathfrak{U}N_2 + \mathfrak{U}N_3 + \cdots \\ &+ \mathfrak{U}P_2 + \mathfrak{U}N_2P_2 + \mathfrak{U}N_3P_2 + \cdots \\ &+ \mathfrak{U}P_3 + \mathfrak{U}N_2P_3 + \mathfrak{U}N_3P_3 + \cdots \\ &+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{aligned}$$

Unter $\| \mathfrak{T} \mid \mathfrak{U} \|$ *soll das aus den auf der rechten Seite von* (3) *stehenden Komplexen als Elementen gebildete System mit den Verknüpfungsregeln*

$$\mathfrak{U}N_i \cdot \mathfrak{U}N_k = \mathfrak{U}\mathfrak{U} \cdot N_iN_k = \mathfrak{U}N_iN_k \quad \text{und}$$
$$\mathfrak{U}N_i \cdot \mathfrak{U}N_kP_j = \mathfrak{U}N_iN_kP_j$$

angesehen werden. In dem speziellen Fall, daß $\mathfrak{T}$ die Gruppe $\mathfrak{N}$ ist, es sich also um eine Gruppe $\mathfrak{N}$ und eine ihrer invarianten Untergruppen $\mathfrak{U}$ handelt, ist $\| \mathfrak{N} \mid \mathfrak{U} \|$ als *Quotientengruppe* $\mathfrak{N} \mid \mathfrak{U}$ in der Literatur wohlbekannt [1]). Die Elemente von $\mathfrak{N} \mid \mathfrak{U}$ sind die in der ersten Zeile auf der rechten Seite von (3) stehenden Komplexe, die bei ihrer Komposition Gruppeneigenschaft besitzen. Die Komplexe jeder weiteren Zeile der Zerlegung (3) lassen sich nach der aufgestellten Verknüpfungsregel als rechtshändige Faktoren mit den Komplexen der ersten Zeile komponieren. Ferner ist es möglich, wenn $\mathfrak{U}T$ irgendeinen Komplex auf der rechten Seite von (3) bedeutet, $T^{-1}\mathfrak{U}$ zu bilden, und man hat als Produkt $\mathfrak{U}T \cdot T^{-1}\mathfrak{U} = \mathfrak{U}E_1\mathfrak{U} = \mathfrak{U}\mathfrak{U} = \mathfrak{U}$ das Einheitselement von $\mathfrak{N} \mid \mathfrak{U}$ und $\| \mathfrak{T} \mid \mathfrak{U} \|$. Die Gleichungen $\mathfrak{U}T_iX = \mathfrak{U}T_k$ und $YT_i^{-1}\mathfrak{U} = T_k^{-1}\mathfrak{U}$ werden nur durch $X = (T_i^{-1}\mathfrak{U})\mathfrak{U}T_k$ und $Y = (T_k^{-1}\mathfrak{U})(\mathfrak{U}T_i)$ befriedigt, und bei unseren Verknüpfungsregeln kann $\mathfrak{N} \mid \mathfrak{U}$ zu keiner innerhalb $\| \mathfrak{T} \mid \mathfrak{U} \|$ befindlichen größeren Gruppe erweitert werden. Mithin folgt, daß $\| \mathfrak{T} \mid \mathfrak{U} \|$ alle sechs an eine Mischgruppe mit dem Kern $\mathfrak{N} \mid \mathfrak{U}$ zu stellenden Postulate erfüllt. Wir erhalten demnach den

Satz: *Jede Quotientenmischgruppe* $\| \mathfrak{T} \mid \mathfrak{U} \|$ *ist eine unseren Postulaten genügende Mischgruppe mit dem Kern* $\mathfrak{N} \mid \mathfrak{U}$, *wobei* $\mathfrak{N}$ *der Normalisator von* $\mathfrak{U}$ *innerhalb des Kerns* $\mathfrak{G}$ *von* $\mathfrak{T}$ *ist.*

Im besonderen bilden also auch die bei der *Galois*schen Zerlegung einer Gruppe nach einer ihrer Untergruppen auftretenden Komplexe (die von *H. Weber* [2]) sogenannten Nebengruppen) eine Mischgruppe.

§ 4. Homomorphismus zweier Mischgruppen.

Der Begriff des Isomorphismus zweier Mischgruppen läßt sich auf folgende Weise zu dem des Homomorphismus erweitern:

Zwei Mischgruppen $\mathfrak{T}$ *und* $\mathfrak{T}^*$ *sollen homomorph heißen, wenn man ihre Elemente in Klassen einteilen kann:*

$$\mathfrak{T} = \mathfrak{K}_1 + \mathfrak{K}_2 + \mathfrak{K}_3 + \cdots$$
$$\mathfrak{T}^* = \mathfrak{K}_1^* + \mathfrak{K}_2^* + \mathfrak{K}_3^* + \cdots,$$

[1]) Diese Faktor- oder Quotientengruppe $\mathfrak{N} \mid \mathfrak{U}$ ist von *C. Jordan,* Bulletin de la société math. de France 1, 46 (1873) entdeckt und von *O. Hölder*, Math. Annalen 34, 33 (1889) wiedergefunden worden.

[2]) *H. Weber*, Lehrbuch der Algebra, Bd. II., 2. Aufl. Braunschweig (1899), S. 9.

so daß die Klassen $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \ldots$ *untereinander elementfremd sind, das gleiche für die Klassen* $\mathfrak{K}_1^*, \mathfrak{K}_2^*, \ldots$ *zutrifft und die Elementeklassen von* $\mathfrak{T}$ *und* $\mathfrak{T}^*$ *sich einander in folgender eindeutig umkehrbarer Weise entsprechen: Sind* T_i *und* T_i^* *bzw.* T_k *und* T_k^* *irgendwelche Elemente aus den zugeordneten Klassen* $\mathfrak{K}_i$ *und* $\mathfrak{K}_i^*$ *bzw.* $\mathfrak{K}_k$ *und* $\mathfrak{K}_k^*$, *so sollen die Produkte* T_iT_k *und* $T_i^*T_k^*$, *sofern sie auf Grund der Postulate* 1. *bis* 6. *existieren*[1]), *stets gleichzeitig existieren oder nicht existieren und im Falle der Existenz sich in zugeordneten Elementeklassen* $\mathfrak{K}_l$ *und* $\mathfrak{K}_l^*$ *von* $\mathfrak{T}$ *bzw. von* $\mathfrak{T}^*$ *befinden. Weiter*[2]) *sollen die Einheitselemente* E_1 *und* E_1^* *zugeordneten Klassen von* $\mathfrak{T}$ *und* $\mathfrak{T}^*$ *angehören. Schließlich soll, wenn* T_i *und* T_k *irgend zwei Elemente aus gleicher Elementeklasse von* $\mathfrak{T}$ *sind, stets auch das Produkt* $T_iT_k^{-1}$ *existieren und der Elementeklasse von* $\mathfrak{T}$ *angehören, in der sich* E_1 *befindet; analog soll, wenn* T_i^* *und* T_k^* *irgend zwei Elemente aus gleicher Elementeklasse von* $\mathfrak{T}^*$ *sind, auch das Produkt* $T_i^*T_k^{*-1}$ *existieren und der Elementeklasse von* $\mathfrak{T}^*$ *angehören, in der sich* E_1^* *befindet.*

Wir beweisen:

Sind $\mathfrak{T}$ *und* $\mathfrak{T}^*$ *zwei homomorphe Mischgruppen, so besitzen ihre Kerne die Untergruppen* $\mathfrak{G}_{E_1^*}$ *und* $\mathfrak{G}_{E_1}^*$, *deren Elemente dem Einheitselement* E_1^* *von* $\mathfrak{T}^*$ *bzw.* E_1 *von* $\mathfrak{T}$ *entsprechen, und die Quotientenmischgruppen* $\|\mathfrak{T}|\mathfrak{G}_{E_1^*}\|$ *und* $\|\mathfrak{T}^*|\mathfrak{G}_{E_1}^*\|$ *sind isomorph. Faßt man daher bei der Galoisschen Zerlegung von* $\mathfrak{T}$ *nach* $\mathfrak{G}_{E_1^*}$ *und von* $\mathfrak{T}^*$ *nach* $\mathfrak{G}_{E_1}^*$:

$$\mathfrak{T} = \mathfrak{G}_{E_1^*} + \mathfrak{G}_{E_1^*}T_2 + \mathfrak{G}_{E_1^*}T_3 + \cdots \quad \textit{und}$$

$$\mathfrak{T}^* = \mathfrak{G}_{E_1}^* + \mathfrak{G}_{E_1}^*T_2^* + \mathfrak{G}_{E_1}^*T_3^* + \cdots$$

die Komplexe als Elemente auf, so ist der Homomorphismus der Mischgruppen auf den Isomorphismus reduziert.

Wir beginnen mit der Betrachtung der Elementeklasse von $\mathfrak{T}^*$, die dem Einheitselement E_1 von $\mathfrak{T}$ entspricht. Sind T_i^* und T_k^* irgend zwei Elemente aus der fraglichen Elementeklasse, so ist wegen $E_1E_1 = E_1$ auch $T_i^*T_k^*$ existent und entspricht E_1. Weiter befindet sich nach der Definition des Homomorphismus unter den E_1 zugeordneten Elementen auch das Element E_1^*. Ferner ist infolge der Definition des Homomorphismus, wenn E_1^* und T_i^* gleicher Elementeklasse angehören, auch $E_1^*T_i^{*-1}$ existent und derselben Elementeklasse wie E_1 angehörig. Da $E_1^*T_i^{*-1}$ gleich einem Element T^* aus $\mathfrak{T}^*$ ist, folgt nach Postulat 5. aus $E_1^*T_i^{*-1} = T^* = E_1^*T^*$, daß $T_i^{*-1} = T^*$, also $E_1^*T_i^{*-1} = T_i^{*-1}$ wird. Die E_1 entsprechenden Elemente von $\mathfrak{T}^*$ erfüllen demnach die vier Gruppenpostulate und bilden eine Gruppe, die mit $\mathfrak{G}_{E_1}^*$ bezeichnet sei. Wegen der Symmetrie der für den Homomorphismus aufgestellten Bedingungen bilden auch die E_1^* in $\mathfrak{T}$ zugeordneten Elemente eine Gruppe, die mit $\mathfrak{G}_{E_1^*}$ bezeichnet sei.

---

[1]) Vergl. Anmerkung 1) auf Seite 244.

[2]) Eine solche Zusatzbedingung ist bereits für die Definition des Homomorphismus bei Gruppen mit unendlich vielen Elementen erforderlich. Vgl. *L. E. Dickson*, On semi-groups and the general isomorphism between infinite groups, Trans. of the American Math. Soc. 6, 205 (1905) sowie meinen Aufsatz, Über homomorphe Gruppen und die Einwirkung von Adjunktionen auf die Rationalitätsgruppe linearer homogener Differentialgleichungen in der Festschrift für Heinrich Weber, Leipzig und Berlin 1912, S. 198.

Man führe nunmehr die *Galois*sche Zerlegung von $\mathfrak{T}^*$ nach $\mathfrak{G}^*_{E_1}$ aus, wodurch man erhält:

$$(1) \qquad \mathfrak{T}^* = \mathfrak{G}^*_{E_1} + \mathfrak{G}^*_{E_1} T^*_2 + \mathfrak{G}^*_{E_1} T^*_3 + \cdots .$$

Zwei Elemente aus verschiedenen Klassen dieser *Galois*schen Zerlegung von $\mathfrak{T}^*$ nach $\mathfrak{G}^*_{E_1}$ können auch bei der Klasseneinteilung für die homomorphe Beziehung niemals der gleichen Klasse angehören. Angenommen, es seien T^*_i und T^*_k zwei Elemente aus $\mathfrak{T}^*$, die aus gleicher Klasse der homomorphen Einteilung stammen; dann ist auf Grund der Definition des Homomorphismus $T^*_i T^{*-1}_k = G^*$, wobei G^* aus $\mathfrak{G}^*_{E_1}$ ist; denn $\mathfrak{G}^*_{E_1}$ war die Klasse der E_1 entsprechenden Elemente von $\mathfrak{T}^*$. Aus $T^*_i T^{*-1}_k = G^*$ ergibt sich $G^{*-1} T^*_i T^{*-1}_k = E^*_1$ oder $G^{*-1} T^*_i = T^*_k$, d. h. $T^*_i = G^* T^*_k$. Elemente derselben Klasse der homomorphen Einteilung von $\mathfrak{T}^*$ gehören also auch derselben Klasse der *Galois*schen Zerlegung von $\mathfrak{T}^*$ nach $\mathfrak{G}^*_{E_1}$ an. Um noch nachzuweisen, daß die homomorphe Einteilung von $\mathfrak{T}^*$ mit der *Galois*schen Zerlegung (1) von $\mathfrak{T}^*$ nach $\mathfrak{G}^*_{E_1}$ vollkommen übereinstimmt, betrachten wir ein einem Element T^*_i von $\mathfrak{T}^*$ entsprechendes Element T_i von $\mathfrak{T}$. Dann entsprechen sich wegen der Zuordnung von $\mathfrak{G}^*_{E_1}$ und $\mathfrak{G}_{E^*_1}$ die Komplexe $\mathfrak{G}^*_{E_1} T^*_i$ und $\mathfrak{G}_{E^*_1} T_i$. Mit der Elementeklasse $\mathfrak{G}_{E^*_1} T_i$ sind auch alle $\mathfrak{G}^*_{E_1} T$ zugeordneten Elemente erschöpft. Ist nämlich noch T_k aus $\mathfrak{T}$ ein dem Komplex $\mathfrak{G}^*_{E_1} T^*_i$ zugeordnetes Element, so muß, da sich T_i in $\mathfrak{G}_{E^*_1} T_i$ befindet, $T_i T_k^{-1}$ zu $\mathfrak{G}_{E^*_1}$ gehören, weil T_i und T_k der gleichen Elementeklasse von $\mathfrak{T}$ angehören. Aus $T_i T_k^{-1} = G$, wo G aus $\mathfrak{G}_{E^*_1}$ stammt, folgt aber $G^{-1} T_i T_k^{-1} = E_1$ oder $G^{-1} T_i = T_k$, d. h. T_k gehört dem Komplex $\mathfrak{G}_{E^*_1} T_i$ an. Die Komplexe $\mathfrak{G}_{E^*_1}$, $\mathfrak{G}_{E^*_1} T_2$, $\mathfrak{G}_{E^*_1} T_3$, ... entsprechen daher eindeutig den Komplexen $\mathfrak{G}^*_{E_1}$, $\mathfrak{G}^*_{E_1} T^*_2$, $\mathfrak{G}^*_{E_1} T^*_3$, ... Die zuerst genannten Komplexe haben daher auch keine Elemente gemeinsam und erschöpfen $\mathfrak{T}$. Folglich hat man in ihnen die *Galois*sche Zerlegung von $\mathfrak{T}$ nach $\mathfrak{G}_{E^*_1}$ vor sich. Jetzt bleibt nur noch zu bemerken, daß, wenn N_i mit $\mathfrak{G}_{E^*_1}$ vertauschbar ist, aus $N_i \mathfrak{G}_{E^*_1} = \mathfrak{G}_{E^*_1} N_i$ wegen des Homomorphismus für zugeordnete Elemente $N^*_i \mathfrak{G}^*_{E_1} = G^*_{E_1} N^*_i$ folgt. Hieraus ergibt sich der Isomorphismus der Kerne $\mathfrak{N} \,|\, \mathfrak{G}_{E^*_1}$ und $\mathfrak{N}^* \,|\, \mathfrak{G}^*_{E_1}$ von $\| \mathfrak{T} \,|\, \mathfrak{G}_{E^*_1} \|$ und von $\| \mathfrak{T}^* \,|\, \mathfrak{G}^*_{E_1} \|$; dabei bedeuten $\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{N}^*$ die Normalisatoren von $\mathfrak{G}_{E^*_1}$ und $\mathfrak{G}^*_{E_1}$ in $\mathfrak{T}$ bzw. in $\mathfrak{T}^*$.

Auf Grund dieser Betrachtungen kann man auch noch den folgenden Satz als Verallgemeinerung des Satzes 1 in § 2 formulieren:

Notwendig und hinreichend für den Homomorphismus zweier Transmutationssysteme $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{T}^*$ ist die Existenz zweier Untergruppen $\mathfrak{G}_{E^*_1}$ und $\mathfrak{G}^*_{E_1}$ mit den Normalisatoren $\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{N}^*$, so daß die Quotientengruppen $\mathfrak{N} \,|\, \mathfrak{G}_{E^*_1}$ und $\mathfrak{N}^* \,|\, \mathfrak{G}^*_{E_1}$ isomorphe Gruppen sind und daß ferner die sich bei der Galoisschen Zerlegung von $\mathfrak{T}$ nach $\mathfrak{N}$ und von $\mathfrak{T}^*$ nach $\mathfrak{N}^*$ ergebenden Komplexe eindeutig umkehrbar aufeinander bezogen werden können.

Zum Beweise dieses Satzes ist wohl nur noch zu bemerken, daß die eindeutig umkehrbare Zuordnungsfähigkeit der Komplexe, die sich bei der *Galois*schen Zerlegung von $\mathfrak{T}$ nach $\mathfrak{N}$ und bei derjenigen von $\mathfrak{T}^*$ nach $\mathfrak{N}^*$ ergeben, wegen des Isomorphismus der Gruppen $\mathfrak{N} \,|\, \mathfrak{G}_{E^*_1}$ und $\mathfrak{N}^* \,|\, \mathfrak{G}^*_{E_1}$ auch die eindeutig umkehrbare Zuordnungsfähigkeit der Komplexe bei der *Galois*schen Zerlegung von $\mathfrak{T}$ nach $\mathfrak{G}_{E^*_1}$ und der von $\mathfrak{T}^*$ nach $\mathfrak{G}^*_{E_1}$ zur Folge hat.

§ 5. Darstellung einer Mischgruppe als Transmutationssystem und als Quotientenmischgruppe einer Gruppe.

Sind $\varrho_1, \varrho_2, \ldots$ irgend welche untereinander verschiedene Größen und bedeutet $\begin{pmatrix} \varrho_1 & \varrho_2 & \varrho_3 & \cdots \\ \varrho_1^* & \varrho_2^* & \varrho_3^* & \cdots \end{pmatrix}$ ihre Ersetzung durch ebenfalls untereinander verschiedene Größen $\varrho_1^*, \varrho_2^*, \varrho_3^*, \ldots$, so bezeichne ich eine Gesamtheit solcher Ersetzungen als ein *Transmutationssystem* für die Größen $\varrho_1, \varrho_2, \ldots$, die einzelne Ersetzung als eine *Transmutation*, wenn sich für die dem System angehörigen Transmutationen als Elemente eine Komposition definieren läßt, bei der die für eine Mischgruppe aufgestellten sechs Postulate des § 1 erfüllt sind. Ein Transmutationssystem der Größen $\varrho_1, \varrho_2, \ldots$, wobei der Kern eine Permutationsgruppe ist, erhält man auf folgende Weise: $\mathfrak{G}$ sei eine Permutationsgruppe der Größen $\varrho_1, \varrho_2, \ldots$, bestehe also aus Elementen $G_a = \begin{pmatrix} \varrho_1 & \varrho_2 & \varrho_3 & \cdots \\ \varrho_{a_1} & \varrho_{a_2} & \varrho_{a_3} & \cdots \end{pmatrix}$, $G_b = \begin{pmatrix} \varrho_1 & \varrho_2 & \varrho_3 & \cdots \\ \varrho_{b_1} & \varrho_{b_2} & \varrho_{b_3} & \cdots \end{pmatrix}$, wobei durch die untereinanderstehenden Symbole von Zähler und Nenner eine eineindeutige Zuordnung der Größen $\varrho_1, \varrho_2, \ldots$ auf sich selbst vermittelt werden soll; dabei besitze das in $\mathfrak{G}$ enthaltene System von Permutationen Gruppeneigenschaft, wenn die Komposition der Elemente von $\mathfrak{G}$ in üblicher Weise erklärt wird, so daß das Produkt

$$G_a G_b = \begin{pmatrix} \varrho_1 & \varrho_2 & \varrho_3 & \cdots \\ \varrho_{a_1} & \varrho_{a_2} & \varrho_{a_3} & \cdots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varrho_1 & \varrho_2 & \cdots \\ \varrho_{b_1} & \varrho_{b_2} & \cdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varrho_1 & \varrho_2 & \cdots \\ \varrho_{a_1} & \varrho_{a_2} & \cdots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varrho_{a_1} & \varrho_{a_2} & \cdots \\ \varrho_{ba_1} & \varrho_{ba_2} & \cdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varrho_1 & \varrho_2 & \varrho_3 & \cdots \\ \varrho_{ba_1} & \varrho_{ba_2} & \varrho_{ba_3} & \cdots \end{pmatrix}$$

ist. Bedeutet weiter $H_i = \begin{pmatrix} \varrho_1 & \varrho_2 & \cdots \\ \varrho_{1i} & \varrho_{2i} & \cdots \end{pmatrix}$ eine Ersetzung der Größen $\varrho_1, \varrho_2, \ldots$ durch irgendwelche andere [1]) untereinander verschiedene $\varrho_{1i}, \varrho_{2i}, \ldots$, so soll unter dem Produkt

$$G_a H_i = \begin{pmatrix} \varrho_1 & \varrho_2 & \cdots \\ \varrho_{a_1} & \varrho_{a_2} & \cdots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varrho_1 & \varrho_2 & \cdots \\ \varrho_{1i} & \varrho_{2i} & \cdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varrho_1 & \varrho_2 & \cdots \\ \varrho_{a_1} & \varrho_{a_2} & \cdots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varrho_{a_1} & \varrho_{a_2} & \cdots \\ \varrho_{a_1 i} & \varrho_{a_2 i} & \cdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varrho_1 & \varrho_2 & \varrho_3 & \cdots \\ \varrho_{a_1 i} & \varrho_{a_2 i} & \varrho_{a_3 i} & \cdots \end{pmatrix}$$

und unter $\mathfrak{G}H_i$ das Elementensystem verstanden werden, das sich ergibt, wenn G_a alle in der Gruppe $\mathfrak{G}$ enthaltenen Elemente durchläuft. Alsdann bilden alle in

$$\mathfrak{G} + \mathfrak{G}H_2 + \mathfrak{G}H_3 + \cdots$$

enthaltenen Elemente offenbar ein Transmutationssystem mit dem Kern $\mathfrak{G}$.

Wir beweisen nunmehr den

Satz 1. *Jede beliebige Mischgruppe $\mathfrak{T}$ ist isomorph mit einem Transmutationssystem $\mathfrak{T}^*$, bei dem die zu ersetzenden Symbole die Elemente $G_1, G_2, \ldots$ aus dem Kern $\mathfrak{G}$ von $\mathfrak{T}$ sind. Zur Gewinnung der isomorphen Beziehung wird dem Element T aus $\mathfrak{T}$ die Transmutation $T^* = \begin{pmatrix} G_1 & G_2 & G_3 & \cdots \\ G_1 T & G_2 T & G_3 T & \cdots \end{pmatrix}$ zugeordnet. Alsdann entsprechen*

[1]) Die Systeme $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \ldots$ und $\varrho_{1i}, \varrho_{2i}, \varrho_{3i}, \ldots$ sollen keine gemeinsamen Größen besitzen, und das Gleiche soll auch für irgend zwei Größensysteme $\varrho_{1i}, \varrho_{2i}, \ldots$ und $\varrho_{1k}, \varrho_{2k}, \ldots$ mit verschiedenen Indizes i und k $(i, k = 2, 3, \ldots, i \neq k)$ stattfinden.

den Elementen G_i des Kerns $\mathfrak{G}$ von $\mathfrak{T}$ die Permutationen $\begin{pmatrix} G_1 & G_2 & G_3 & \cdots \\ G_1 G_i & G_2 G_i & G_3 G_i & \cdots \end{pmatrix}$, *die eine Permutationsgruppe darstellen und den Kern von $\mathfrak{T}^*$ bilden.*

Sind G_i und G_k Elemente des Kerns $\mathfrak{G}$ von $\mathfrak{T}$, so sind die ihnen zugeordneten Transmutationen $G_i^* = \begin{pmatrix} G_1 & G_2 & G_3 & \cdots \\ G_1 G_i & G_2 G_i & G_3 G_i & \cdots \end{pmatrix}$ und $G_k^* = \begin{pmatrix} G_1 & G_2 & G_3 & \cdots \\ G_1 G_k & G_2 G_k & G_3 G_k & \cdots \end{pmatrix}$ wegen der Gruppeneigenschaft von $\mathfrak{G}$ Permutationen, und es ergibt sich ihr Produkt $G_i^* G_k^* = \begin{pmatrix} G_1 & G_2 & G_3 & \cdots \\ G_1 G_i G_k & G_2 G_i G_k & G_3 G_i G_k & \cdots \end{pmatrix}$ als die $G_i G_k$ entsprechende Transmutation aus $\mathfrak{T}^*$. Ist T ein beliebiges Element aus $\mathfrak{T}$ und wird ihm $T^* = \begin{pmatrix} G_1 & G_2 & G_3 & \cdots \\ G_1 T & G_2 T & G_3 T & \cdots \end{pmatrix}$ zugeordnet, so läßt sich T^* als rechtshändiger Faktor allen Elementen G_i^* beisetzen, und man findet als Produkt

$$G_i^* T^* = \begin{pmatrix} G_1 & G_2 & G_3 & \cdots \\ G_1 G_i & G_2 G_i & G_3 G_i & \cdots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} G_1 & G_2 & G_3 & \cdots \\ G_1 T & G_2 T & G_3 T & \cdots \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} G_1 & G_2 & G_3 & \cdots \\ G_1 G_i & G_2 G_i & G_3 G_i & \cdots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} G_1 G_i & G_2 G_i & G_3 G_i & \cdots \\ G_1 G_i T & G_2 G_i T & G_3 G_i T & \cdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_1 & G_2 & G_3 & \cdots \\ G_1 G_i T & G_2 G_i T & G_3 G_i T & \cdots \end{pmatrix}$$

diejenige Transmutation aus $\mathfrak{T}^*$, die dem Produkt $G_i T$ von $\mathfrak{T}$ entspricht. Da sich nur die Permutationen G_i^* beliebig gleichzeitig als rechtshändige und als linkshändige Faktoren komponieren lassen, erschöpfen die den Elementen G_i von $\mathfrak{G}$ entsprechenden Permutationen G_i^* den Kern $\mathfrak{G}^*$ von $\mathfrak{T}^*$. Es gilt weiter der

Satz 2. *Jede Mischgruppe $\mathfrak{T}$ ist auch isomorph mit einem Transmutationssystem $\mathfrak{T}^*$, zu dem man gelangt, indem man jedem Element T aus $\mathfrak{T}$ die Transmutation* $T^* = \begin{pmatrix} G_1 & G_2 & G_3 & \cdots \\ T^{-1} G_1 & T^{-1} G_2 & T^{-1} G_3 & \cdots \end{pmatrix}$ *zuordnet. Dem Kern $\mathfrak{G}$ von $\mathfrak{T}$ entsprechen dann die Permutationen* $\begin{pmatrix} G_1 & G_2 & G_3 & \cdots \\ G_i^{-1} G_1 & G_i^{-1} G_2 & G_i^{-1} G_3 & \cdots \end{pmatrix}$, *die, wenn G_i alle Elemente von $\mathfrak{G}$ durchläuft, eine Permutationsgruppe, und zwar den Kern von $\mathfrak{T}^*$ bilden.*

Sind G_i und G_k zwei Elemente aus $\mathfrak{G}$, $G_i^* = \begin{pmatrix} G_1 & G_2 & G_3 & \cdots \\ G_i^{-1} G_1 & G_i^{-1} G_2 & G_i^{-1} G_3 & \cdots \end{pmatrix}$ und $G_k^* = \begin{pmatrix} G_1 & G_2 & G_3 & \cdots \\ G_k^{-1} G_1 & G_k^{-1} G_2 & G_k^{-1} G_3 & \cdots \end{pmatrix}$ die ihnen zugeordneten Transmutationen aus $\mathfrak{T}^*$, so ergibt sich als Produkt $G_i^* G_k^* = \begin{pmatrix} G_1 & G_2 & G_3 & \cdots \\ G_k^{-1} G_i^{-1} G_1 & G_k^{-1} G_i^{-1} G_2 & G_k^{-1} G_i^{-1} G_3 & \cdots \end{pmatrix}$, also die $G_i G_k$ entsprechende Transmutation aus $\mathfrak{T}^*$. Ist T ein beliebiges Element aus $\mathfrak{T}$ und $T^* = \begin{pmatrix} G_1 & G_2 & G_3 & \cdots \\ T^{-1} G_1 & T^{-1} G_2 & T^{-1} G_3 & \cdots \end{pmatrix}$ das ihm in $\mathfrak{T}^*$ zugeordnete Element, so kann man das Produkt

$$G_i^* T^* = \begin{pmatrix} G_1 & G_2 & G_3 & \cdots \\ G_i^{-1} G_1 & G_i^{-1} G_2 & G_i^{-1} G_3 & \cdots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} G_1 & G_2 & G_3 & \cdots \\ T^{-1} G_1 & T^{-1} G_2 & T^{-1} G_3 & \cdots \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} G_1 & G_2 & G_3 & \cdots \\ G_i^{-1} G_1 & G_i^{-1} G_2 & G_i^{-1} G_3 & \cdots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} G_i^{-1} G_1 & G_i^{-1} G_2 & \cdots \\ T^{-1} G_i^{-1} G_1 & T^{-1} G_i^{-1} G_2 & \cdots \end{pmatrix}$$

$= \begin{pmatrix} G_1 & G_2 & G_3 & \cdots \\ T^{-1} G_i^{-1} G_1 & T^{-1} G_i^{-1} G_2 & T^{-1} G_i^{-1} G_3 & \cdots \end{pmatrix}$ bilden, und dieses entspricht dem

Element G_iT aus $\mathfrak{T}$. Transmutationen T^*, die keine Permutationen sind, lassen sich nur als rechtshändige Faktoren bei der Komposition verwenden, so daß der Kern von $\mathfrak{T}^*$ nur aus den Permutationen G_i^* besteht, die den Elementen G_i des Kerns $\mathfrak{G}$ von $\mathfrak{T}$ zugeordnet sind.

Die Sätze 1 und 2 sind die Ausdehnung der bekannten *Cayley*schen Resultate [1]) über die Darstellbarkeit jeder abstrakt definierten Gruppe auf Mischgruppen.

Da jede Mischgruppe $\mathfrak{T}$ auch stets zu der Mischgruppe $T^{-1}\mathfrak{T}$ mit dem Kern $T^{-1}\mathfrak{G}T$ isomorph ist, wobei T irgendein Element aus $\mathfrak{T}$ bedeutet, folgt:

Jede Mischgruppe $\mathfrak{T}$ läßt sich durch ein isomorphes Transmutationssystem darstellen, bei dem die zu ersetzenden Symbole die Elemente der Gruppe $T^{-1}\mathfrak{G}T$, des Kerns von $T^{-1}\mathfrak{T}$ sind.

Wir beweisen noch für endliche Mischgruppen, d. h. solche mit einer endlichen Anzahl von Elementen, den wichtigen

Satz 3. *Zu jeder endlichen Mischgruppe $\mathfrak{T}$, die nicht mit dem speziellen Transmutationssystem $\binom{\varrho_1}{\varrho_1}, \binom{\varrho_1}{\varrho_2}$ von zwei Elementen isomorph ist* [2]), *läßt sich eine Permutationsgruppe $\mathfrak{P}^*$ finden, so daß $\mathfrak{T}$ isomorph zu der Quotientenmischgruppe $||\mathfrak{P}^* \mid \mathfrak{G}_{E_1}^*||$* [3]) *ist, wobei $\mathfrak{G}_{E_1}^*$ eine Untergruppe von $\mathfrak{P}^*$ bedeutet, die der Identität von $\mathfrak{T}$ entspricht* [4]).

Die Mischgruppe $\mathfrak{T}$ sei von der Form

$$\mathfrak{T} = \mathfrak{G} + \mathfrak{G}H_2 + \cdots + \mathfrak{G}H_s,$$

wobei der Kern $\mathfrak{G}$ von $\mathfrak{T}$ nur die endliche Anzahl von g Elementen, $\mathfrak{T}$ also insgesamt gs Elemente umfaßt. Eine Darstellung von $\mathfrak{T}$ sei gegeben durch die g Permutationen $\begin{pmatrix}\varrho_1 & \varrho_2 & \cdots & \varrho_g\\ \varrho_{a_1} & \varrho_{a_2} & \cdots & \varrho_{a_g}\end{pmatrix}$, die dem Kern $\mathfrak{G}$ isomorph sind, und aus den als rechtshändige Faktoren auftretenden Transmutationen $\begin{pmatrix}\varrho_1 & \varrho_2 & \cdots & \varrho_g\\ \varrho_{1i} & \varrho_{2i} & \cdots & \varrho_{gi}\end{pmatrix}$ $(i = 2, 3, \ldots, s)$. Aus den gs Symbolen $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_g; \varrho_{12}, \varrho_{22}, \ldots, \varrho_{g2}; \ldots; \varrho_{1s}, \varrho_{2s}, \ldots, \varrho_{gs}$ konstruieren wir auf folgende Weise eine Permutationsgruppe $\mathfrak{P}^*$ von $g^s s!$ Permutationen: Aus $\mathfrak{G}$ leiten wir die $s-1$ zu $\mathfrak{G}$ ähnlichen Permutationsgruppen $\begin{pmatrix}\varrho_{1i} & \varrho_{2i} & \cdots & \varrho_{gi}\\ \varrho_1 & \varrho_2 & \cdots & \varrho_g\end{pmatrix}\mathfrak{G}\begin{pmatrix}\varrho_1 & \varrho_2 & \cdots & \varrho_g\\ \varrho_{1i} & \varrho_{2i} & \cdots & \varrho_{gi}\end{pmatrix}$ $(i = 2, 3, \ldots, s)$ ab und schreiben die Permutationen aus jeder dieser s Gruppen in jeder möglichen Weise nebeneinander, wodurch wir zunächst eine Permutationsgruppe von g^s Permutationen in den gs Symbolen $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_g; \varrho_{12}, \varrho_{22}, \ldots, \varrho_{g2}; \ldots; \varrho_{1s}, \varrho_{2s}, \ldots, \varrho_{gs}$ erhalten; bei jeder dieser g^s Permutationen permutieren sich die Symbole jedes der s Systeme $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_g$ beziehungsweise $\varrho_{12}, \varrho_{22}, \ldots, \varrho_{g2}, \ldots$, beziehungsweise $\varrho_{1s}, \varrho_{2s}, \ldots, \varrho_{gs}$ gesondert für sich. Vertauscht man noch in jeder dieser g^s Permutationen die

[1]) Vgl. *A. Cayley.* Am. math. J. 1, 52 (1878), Coll. math. papers 10, 403.

[2]) Diese spezielle Mischgruppe ist, wie man unmittelbar sieht, keiner solchen Darstellung fähig.

[3]) D. h. dem System der Nebengruppen von $\mathfrak{P}^*$ nach $\mathfrak{G}_{E1}^*$.

[4]) Der Beweis dieses Satzes läßt sich, nach einer Bemerkung von Herrn *R. Baer*, ohne wesentliche Änderungen auch auf unendliche Mischgruppen übertragen.

s Systeme auf jede Art und Weise untereinander, so ergibt sich die gewünschte Permutationsgruppe $\mathfrak{P}^*$ der Ordnung $g!s!$ in den gs Symbolen $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_g$; $\varrho_{12}, \varrho_{22}, \ldots, \varrho_{g2}; \ldots; \varrho_{1s}, \varrho_{2s}, \ldots, \varrho_{gs}$. In $\mathfrak{P}^*$ betrachten wir die Untergruppe $\mathfrak{G}^*_{E_1}$, die aus denjenigen Permutationen von $\mathfrak{P}^*$ bestehen soll, die jedes der g Symbole $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_g$ einzeln ungeändert lassen. Weiter sei $\mathfrak{P}^*_{12\ldots g}$ diejenige Untergruppe von $\mathfrak{P}^*$, deren Permutationen die Symbole $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_g$ des ersten Systems nur untereinander vertauschen. Ist $P^*_{12\ldots g}$ eine Permutation aus der Gruppe $\mathfrak{P}^*_{12\ldots g}$, so ist ersichtlich infolge der gegebenen Definitionen $P^*_{12\ldots g}\,\mathfrak{G}^*_{E_1}P^{*-1}_{12\ldots g} = \mathfrak{G}^*_{E_1}$, das heißt $\mathfrak{G}^*_{E_1}$ ist eine invariante Untergruppe von $\mathfrak{P}^*_{12\ldots g}$. Wir behaupten weiter, daß $\mathfrak{P}^*_{12\ldots g}$ die größte Untergruppe von $\mathfrak{P}^*$ ist, in der $\mathfrak{G}^*_{E_1}$ invariant ist. Angenommen in $\mathfrak{P}^*$ existiert eine Permutation $Q = \begin{pmatrix} \varrho_1 & \cdots \\ \varrho_{1i} & \cdots \end{pmatrix}$, bei der ϱ_1 in ϱ_{1i} übergeht, ϱ_{1i} nicht dem ersten System $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_g$ angehört und $Q\,\mathfrak{G}^*_{E_1}Q^{-1} = \mathfrak{G}^*_{E_1}$ ist. Wählt man aus $\mathfrak{G}^*_{E_1}$ eine Permutation $G^* = \begin{pmatrix} \varrho_1\varrho_2\cdots\varrho_g\varrho_{1i}\cdots \\ \varrho_1\varrho_2\cdots\varrho_g\varrho^*\cdots \end{pmatrix}$, bei der ϱ_{1i} in ϱ^* übergeht, so wird $QG^* = \begin{pmatrix} \varrho_1 & \cdots \\ \varrho^* & \cdots \end{pmatrix}$. Damit $QG^*Q^{-1} = \begin{pmatrix} \varrho_1 & \cdots \\ \varrho_1 & \cdots \end{pmatrix}$, also eine $\mathfrak{G}^*_{E_1}$ angehörige Permutation werden soll, muß $Q^{-1} = \begin{pmatrix} \varrho^* & \cdots \\ \varrho_1 & \cdots \end{pmatrix}$, mithin $Q = \begin{pmatrix} \varrho_1 & \cdots \\ \varrho^* & \cdots \end{pmatrix}$, folglich $\varrho^* = \varrho_{1i}$ werden. Ist aber $g \geqq 2$, $s > 1$, so kann man $G^* = \begin{pmatrix} \varrho_1\varrho_2\cdots\varrho_g\varrho_{1i}\cdots \\ \varrho_1\varrho_2\cdots\varrho_g\varrho_{2i}\cdots \end{pmatrix}$ wählen, wie aus der Existenz der Permutation $\begin{pmatrix} \varrho_1 & \cdots \\ \varrho_2 & \cdots \end{pmatrix}$ in dem gegebenen Transmutationssystem $\mathfrak{T}$ folgt. Im Falle $g = 1$, $s \geqq 3$ enthält $\mathfrak{P}^*$, wie sich aus seiner Konstruktion ergibt, die Permutation $\begin{pmatrix} \varrho_1\varrho_{1i}\varrho_{1k}\cdots \\ \varrho_1\varrho_{1k}\varrho_{1i}\cdots \end{pmatrix}$, wobei $\varrho_{1i} \neq \varrho_{1k}$ ist; man wähle diese Permutation für G^*. Diese Wahl, bei der ϱ_{1i} nicht in ϱ_{1i} übergeht, zeigt, daß $Q\,\mathfrak{G}^*_{E_1}Q^{-1}$ nicht gleich $\mathfrak{G}^*_{E_1}$ wird. Ebenso wie es für $g \geqq 2$, $s > 1$ und $g = 1$, $s \geqq 3$ keine mit $\mathfrak{G}^*_{E_1}$ vertauschbare Permutation Q gibt, die ϱ_1 in ein dem ersten System nicht angehöriges Symbol überführt, existiert, wie sich aus der Gleichberechtigung der Symbole des ersten Systems ergibt, in $\mathfrak{P}^*$ keine Permutation, die mit $\mathfrak{G}^*_{E_1}$ vertauschbar ist und eines der Symbole $\varrho_2, \varrho_3, \ldots, \varrho_g$ des ersten Systems in ein diesem System nicht angehöriges Symbol überführt. Der Normalisator, den $\mathfrak{G}^*_{E_1}$ innerhalb von $\mathfrak{P}^*$ besitzt, ist demnach, falls nicht $g = 1$, $s = 2$ ist [1]), durch die Permutationen von $\mathfrak{P}^*_{12\ldots g}$ erschöpft. In diesem trivialen Ausnahmefall besteht das gegebene Transmutationssystem $\mathfrak{T}$ aus den zwei Transmutationen $\begin{pmatrix} \varrho_1 \\ \varrho_1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} \varrho_1 \\ \varrho_2 \end{pmatrix}$. $\mathfrak{P}^*$ wird dann die Gruppe mit den zwei Permutationen $\begin{pmatrix} \varrho_1\varrho_2 \\ \varrho_1\varrho_2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} \varrho_1\varrho_2 \\ \varrho_2\varrho_1 \end{pmatrix}$, $\mathfrak{G}^*_{E_1}$ und $\mathfrak{P}^*_1$ werden die identische Permutation, und

[1]) Der Fall $s = 1, g$ beliebig bedarf keiner Behandlung; denn hierfür ist das Transmutationssystem selbst Gruppe, und unser Satz ist evident.

infolgedessen ist hier $\mathfrak{G}^*_{E_1}$ nicht in $\mathfrak{P}^*_1$, sondern in $\mathfrak{P}^*$ selbst invariant. Schließt man diesen trivialen Fall $g = 1$, $s = 2$ aus, und ordnet jeder Permutation aus $\mathfrak{P}^*$ diejenige Transmutation zu, die sich aus der Permutation ergibt, indem man sich auf die Ersetzungen der Symbole $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_g$ beschränkt und die Ersetzungen der übrigen Symbole $\varrho_{12}, \varrho_{22}, \ldots, \varrho_{g2}; \ldots; \varrho_{1s}\, \varrho_{2s}, \ldots, \varrho_{gs}$ fortläßt, so entspricht den Permutationen der in $\mathfrak{P}^*$ befindlichen Gruppe $\mathfrak{G}^*_{E_1}$ die identische Transmutation $\binom{\varrho_1\ \varrho_2 \cdots \varrho_g}{\varrho_1\ \varrho_2 \cdots \varrho_g}$ von $\mathfrak{T}$ und dem Normalisator $\mathfrak{P}^*_{12\ldots g}$, den $\mathfrak{G}^*_{E_1}$ in $\mathfrak{P}^*$ besitzt, das Transmutationssystem $\binom{\varrho_1\ \varrho_2 \cdots \varrho_g}{\varrho_{a_1}\ \varrho_{a_2} \cdots \varrho_{a_g}}$, das nur aus Permutationen von $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_g$ besteht und den Kern von $\mathfrak{T}$ bildet. Zerlegt man $\mathfrak{P}^*$ nach seiner Untergruppe $\mathfrak{G}^*_{E_1}$, die ersichtlich $g^{s-1} \cdot (s-1)!$ Permutationen enthält, so hat man die *Galois*sche Zerlegung

$$\mathfrak{P}^* = \mathfrak{G}^*_{E_1} + \mathfrak{G}^*_{E_1} P^*_2 + \mathfrak{G}^*_{E_1} P^*_3 + \cdots + \mathfrak{G}^*_{E_1} P^*_{gs}.$$

Die Komplexe dieser Zerlegung entsprechen eineindeutig den Transmutationen von $\mathfrak{T}$.

Sind $\mathfrak{G}^*_{E_1} P^*_i$ und $\mathfrak{G}^*_{E_1} P^*_k$ zwei Komplexe aus $\mathfrak{P}^*$, T_i und T_k die ihnen entsprechenden Transmutationen aus $\mathfrak{T}$, die nach unserer Vorschrift aus den Komplexen dadurch hervorgehen, daß man sich nur auf die Ersetzungen der Symbole $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_g$ des ersten Systems beschränkt, so sind infolge des nachgewiesenen Entsprechens der Transmutationen des Kerns von $\mathfrak{T}$ mit den Permutationen des Normalisators von $\mathfrak{G}^*_{E_1}$ die Produkte $T_i T_k$ und $(\mathfrak{G}^*_{E_1} P^*_i)\,(\mathfrak{G}^*_{E_1} P^*_k) = \mathfrak{G}^*_{E_1} P^*_i P^*_k$ gleichzeitig existent oder nicht existent; im ersten Fall sind infolge ihrer Konstruktion $T_i T_k$ und $\mathfrak{G}^*_{E_1} P^*_i P^*_k$ auch einander zugeordnete Elemente. Hiermit ist gezeigt, daß, abgesehen von $g = 1$, $s = 2$, sich zu jedem endlichen Transmutationssystem $\mathfrak{T}$ eine Permutationsgruppe $\mathfrak{P}^*$ konstruieren läßt, so daß eine ihrer Untergruppen $\mathfrak{G}^*_{E_1}$ eine mit $\mathfrak{T}$ isomorphe Quotientenmischgruppe $\|\mathfrak{P}^* | \mathfrak{G}^*_{E_1}\|$ liefert.

Freiburg i. B., Juli 1926.

Zusatz bei der Korrektur. Inzwischen ist ein Aufsatz des Herrn *H. Brandt*, Über eine Verallgemeinerung des Gruppenbegriffes. Math. Annalen 96, 360 erschienen. Das dort betrachtete Gruppoid ist die Vereinigung einer Mischgruppe $\mathfrak{T}$ mit den zu ihr isomorphen Mischgruppen $T^{-1}\mathfrak{T}$, wobei T alle Elemente von $\mathfrak{T}$ durchläuft.

Ein weiterer Aufsatz von *Friedrich Karl Schmidt* wird in den Sitzungsberichten der Heidelberger Akademie, Jahrgang 1927 in den Beiträgen zur Algebra Nr. 7 unter dem Titel „Über das Brandtsche Gruppoid“ demnächst erscheinen.

März 1927.

Virtuelle Ordnung und unerweiterbare Ordnung.

Von *L. E. J. Brouwer* in Amsterdam.

Zweck der vorliegenden Note ist die virtuelle Ordnung (d. h. die für das Kontinuum bestehende Ordnungsart [1]) mittels einer Unerweiterbarkeitseigenschaft zu charakterisieren.

Eine Spezies P heißt *teilweise geordnet projiziert*, wenn für die Elemente einer Teilspezies der Spezies der Elementepaare (a, b) von P entweder die durch „$a \doteq b$“ oder „*a projektionsgleich b*“ oder „$b \doteq a$“ oder „*b projektionsgleich a*“ ausgedrückte *symmetrische Relation der geordneten Projektion*, oder die durch

„$a < b$“ oder „*a vor b*“ oder „*a links von b*“ oder „$b > a$“ oder „*b nach a*“ oder „*b rechts von a*“

ausgedrückte *asymmetrische Relation der geordneten Projektion* definiert ist, während für diese Relationen, wenn noch die Identität zweier Elemente p und q von P durch die Formel „$p = q$“ zum Ausdruck gebracht wird, folgende „*Axiome der geordneten Projektion*“ erfüllt sind:

1. *Aus* $r = s$ *folgt* $r \doteq s$.
2. *Aus* $r \doteq s$ *und* $s \doteq t$ *folgt* $r \doteq t$.
3. *Aus* $r \doteq u, s \doteq v$ *und* $r < s$ *folgt* $u < v$.
4. *Aus* $r < s$ *und* $s < t$ *folgt* $r < t$.
5. *Die Beziehungen* $r \doteq s$, $r < s$ *und* $r > s$ *schließen einander aus.*

Eine teilweise geordnet projizierte Spezies, für welche die Relation $r \doteq s$ die Relation $r = s$ nach sich zieht, heißt *teilweise geordnet.*

Eine teilweise geordnet projizierte Spezies heißt *virtuell geordnet projiziert*, wenn außer den obigen Axiomen 1—5 noch folgende „*Ergänzungsaxiome der geordneten Projektion*“ erfüllt sind:

6. *Aus der gleichzeitigen Ungereimtheit der Beziehungen* $r < s$ *und* $r > s$ *folgt* $r \doteq s$.
7. *Aus der gleichzeitigen Ungereimtheit der Beziehungen* $r > s$ *und* $r \doteq s$ *folgt* $r < s$.

[1]) Vgl. Mathem. Annnalen 95, S. 453, 467.

Eine virtuell geordnet projizierte Spezies, für welche die Relation $r \leqq s$ die Relation $r = s$ nach sich zieht, heißt *virtuell geordnet* [2]).

Auf Grund der Relationen der geordneten Projektion einer virtuell geordnet projizierten Spezies P erscheint die *Projektionsspezies* von P, d. h. die Spezies der Spezies projektionsgleicher Elemente von P als virtuell geordnete Spezies.

Von einer teilweise geordnet projizierten Spezies P werden wir sagen, daß sie *unerweiterbar geordnet projiziert* ist, wenn jede Relation $p \leqq q$ oder $p < q$ zwischen zwei Elementen von P, welche sich den bestehenden Relationen der geordneten Projektion von P widerspruchsfrei hinzufügen läßt, zu den bestehenden Relationen der geordneten Projektion von P gehört.

Ist eine teilweise geordnet projizierte Spezies sowohl unerweiterbar geordnet projiziert wie teilweise geordnet, dann nennen wir sie *unerweiterbar geordnet.*

Satz 1. *Für eine unerweiterbar geordnet projizierte Spezies P gilt das Ergänzungsaxiom* 6.

Zum Beweise dieses Theorems genügt es, aus der gleichzeitigen Ungereimtheit der Beziehungen $r < s$ und $r > s$ zwischen den Elementen r und s von P die Eigenschaft herzuleiten, daß die Relation $r \leqq s$ sich den bestehenden Relationen der geordneten Projektion von P widerspruchsfrei hinzufügen läßt. Nehmen wir also die Ungereimtheit der Beziehungen $r < s$ und $r > s$ an, und bezeichnen wir mit α die Spezies der bestehenden Relationen der geordneten Projektion von P, mit X die Spezies derjenigen Elemente x von P, für welche nach α entweder $x \leqq r$ oder $x \leqq s$ gilt, mit Y die Spezies derjenigen Elemente y von P, für welche nach α entweder $y < r$ oder $y < s$ gilt, mit Z die Spezies derjenigen Elemente z von P, für welche nach α entweder $z > r$ oder $z > s$ gilt, mit β die Spezies der Relationen $x_\sigma \leqq x_\tau$, $y_\sigma < x_\tau$, $x_\sigma < z_\tau$ und $y_\sigma < z_\tau$, mit γ die Vereinigung von α und β. Alsdann ersehen wir: a) je zwei der Spezies X, Y und Z sind elementefremd; b) aus den Relationen von γ können mittels der Axiome 2, 3 und 4 immer nur wiederum zu γ gehörige Relationen hergeleitet werden, so daß a fortiori aus der Vereinigung von α und der Relation $r \leqq s$ mittels der Axiome 2, 3 und 4 nur zu γ gehörige Relationen hergeleitet werden können; c) (wegen der Ungereimtheit der Beziehungen $r < s$ und $r > s$ in α) ein Element von α und ein Element von β können zusammen nicht gegen Axiom 5 verstoßen, so daß je zwei beliebige Elemente von γ ebensowenig gegen Axiom 5 verstoßen können, m. a. W. das Relationensystem γ ist widerspruchsfrei; und die Relation $r \leqq s$ kann dem Relationensystem α widerspruchsfrei hinzugefügt werden. c. q. f. d.

Satz 2. *Für eine unerweiterbar geordnet projizierte Spezies gilt das Ergänzungsaxiom* 7.

Zum Beweise dieses Theorems genügt es, aus der gleichzeitigen Ungereimtheit der Beziehungen $r \leqq s$ und $r > s$ zwischen den Elementen r und s von P die Eigenschaft herzuleiten, daß die Relation $r < s$ sich den bestehenden Relationen

[2]) Diese Definition stimmt mit der Mathem. Annalen 95, S. 453 gegebenen inhaltlich überein.

der geordneten Projektion von P widerspruchsfrei hinzufügen läßt. Nehmen wir also die Ungereimtheit der Beziehungen $r \leqq s$ und $r > s$ an, und bezeichnen wir mit α die Spezies der bestehenden Relationen der geordneten Projektion von P, mit Y die Spezies derjenigen Elemente y von P, für welche nach α entweder $y \leqq r$ oder $y < r$ gilt, mit Z die Spezies derjenigen Elemente z von P, für welche nach α entweder $z \leqq s$ oder $z > s$ gilt, mit β die Spezies der Relationen $y_\sigma < z_\tau$, mit γ die Vereinigung von α und β. Alsdann ersehen wir: a) es ist ungereimt, daß in α eine Relation $y_\sigma \leqq z_\tau$ oder eine Relation $y_\sigma > z_\tau$ vorkommt; b) aus den Relationen von γ können mittels der Axiome 2, 3 und 4 immer nur wiederum zu γ gehörige Relationen hergeleitet werden, so daß a fortiori aus der Vereinigung von α und der Relation $r < s$ mittels der Axiome 2, 3 und 4 nur zu γ gehörige Relationen hergeleitet werden können; c) ein Element von α und ein Element von β können zusammen nicht gegen Axiom 5 verstoßen, so daß je zwei beliebige Elemente von γ ebensowenig gegen Axiom 5 verstoßen können, m. a. W. das Relationensystem γ ist widerspruchsfrei, und die Relation $r < s$ kann dem Relationensystem α widerspruchsfrei hinzugefügt werden. c. q. f. d.

Satz 3. *Eine virtuell geordnet projizierte Spezies P ist auch unerweiterbar geordnet projiziert.*

Nehmen wir nämlich an, daß dem System α der bestehenden Relationen der geordneten Projektion von P die Relation $r \leqq s$ (bzw. die Relation $r < s$) widerspruchsfrei hinzugefügt werden kann. Alsdann sind im System α sicher die beiden Relationen $r < s$ und $r > s$ (bzw. die beiden Relationen $r > s$ und $r \leqq s$) ungereimt. Mithin ist, weil für die Relationen der geordneten Projektion von P das Ergänzungsaxiom 6 (bzw. das Ergänzungsaxiom 7) gilt, im System α die Relation $r \leqq s$ (bzw. die Relation $r < s$) enthalten. c. q. f. d.

Die Sätze 1, 2 und 3 können wir wie folgt zusammenfassen:

Theorem 1. *Die Begriffe der virtuell geordneten Projektion und der unerweiterbar geordneten Projektion sind äquivalent.*

Aus Theorem 1 folgt unmittelbar:

Theorem 2. *Die Begriffe der virtuellen Ordnung und der unerweiterbaren Ordnung sind äquivalent.*

Walter de Gruyter & Co. Berlin W 10 und Leipzig
Postscheckkonto: Berlin NW 7 Nr. 59533

Komplex-Symbolik. Eine Einführung in die analytische Geometrie mehrdimensionaler Räume. Von Leutnant ROLAND WEITZENBÖCK in Linz a. D. VI, 191 Seiten. 1908. (Samml. Schubert Bd. 57.) Geb. 6.40

Allgemeine Theorie der Raumkurven und Flächen. Von Oberstudienrat Dr. VIKTOR KOMMERELL in Reutlingen und Prof. Dr. KARL KOMMERELL in Stuttgart. I. Teil. Dritte Auflage. Mit 28 Figuren. VIII, 184 Seiten. 1921. (Samml. Schubert Bd. 29.) Geb. 3.—
II. Teil. Dritte Auflage. Mit 13 Figuren. IV, 196 Seiten. 1921. (Samml. Schubert Bd. 44.) Geb. 3.—

Spezielle Flächen und Theorie der Strahlensysteme. Von Oberstudienrat Dr. VIKTOR KOMMERELL in Reutlingen und Prof. Dr. KARL KOMMERELL in Stuttgart. Mit 9 Fig. VI, 171 S. 1911. (Samml. Schubert Bd. 62.) Geb. 7.30

Liniengeometrie mit Anwendungen. Von Professor Dr. KONRAD ZINDLER in Innsbruck. I. Teil. Mit 87 Figuren. VIII, 380 Seiten. 1902. (Samml. Schubert Bd. 34.) Vergriffen
II. Teil. Mit 24 Fig. VII, 252 Seiten. 1906. (Samml. Schubert Bd. 51.) Geb. 9.50

Lehrbuch der darstellenden Geometrie. Von Dr. KARL ROHN, Geh. Rat, weiland Professor an der Universität Leipzig und Dr. ERWIN PAPPERITZ, Geh. Rat, Professor an der Bergakademie in Freiberg i. Sa. Drei Bände. Groß-Oktav. I. Orthogonalprojektion. Vielflache, Perspektivität ebener Figuren, Kurven, Zylinder, Kugel, Kegel, Rotations- und Schraubenflächen. Vierte, erweiterte Auflage. XX, 502 Seiten. Mit 351 Figuren. 1913. Anastatischer Nachdruck. 1921. 16.50, geb. 18.—
II. Axonometrie, Perspektive, Beleuchtung. Vierte, umgearbeitete Auflage. VI, 194 Seiten mit 118 Figuren. 1916. 6.20, geb. 7.20
III. Kegelschnitte, Flächen zweiten Grades, Regel-, abwickelbare und andere Flächen. Flächenkrümmung. Dritte, umgearbeitete Auflage. X, 334 Seiten. Mit 157 Figuren. 1906. Anastatischer Nachdruck. 1921. 10.80, geb. 12.—

Darstellende Geometrie. Von THEODOR SCHMID, o. ö. Professor an der Technischen Hochschule in Wien. I. Teil: Eckige Körper, Kugel, Zylinder, Kegel, Plankurven und Raumkurven mit den zugehörigen Torsen im Normalrißverfahren und in orthogonaler Axonometrie. Dritte Auflage. Mit 170 Figuren. 283 Seiten. 1922. (Samml. Schubert Bd. 65.) Geb. 6.—
II. Teil: Schiefe und zentrale Projektion. Dreh-, Rohr-, Schrauben- und Regelflächen. Geländedarstellung, Kartenprojektion, Nomographie. Zweite Auflage. Mit 163 Figuren. 340 Seiten. 1923. (Samml. Schubert Bd. 66.) Geb. 7.50

Analysis der ebenen Bewegung. Von Dr. MARTIN KRAUSE, Geh. Rat, Professor an der Techn. Hochschule Dresden. Oktav. VII, 216 Seiten. 1920. 3.—

Theorie der Elektrizität und des Magnetismus. Von Professor Dr. J. CLASSEN in Hamburg. II. Teil: Magnetismus und Elektromagnetismus. Mit 53 Figuren. IX, 251 Seiten. 1904. (Samml. Schubert Bd. 32.) Geb. 8.50
I. Teil vergriffen.

Geodäsie. Von Professor Dr. A. GALLE in Potsdam. Mit 96 Figuren. XI, 284 Seiten. 1907. (Samml. Schubert Bd. 23.) Geb. 9.60

Vektoranalysis in ihren Grundzügen und wichtigen physikalischen Anwendungen. Von Dr. ARTHUR HAAS, a. o. Professor an der Universität Wien. Mit 37 Abbildungen im Text. Groß-Oktav. VI, 149 Seiten. 1922. 4.—, geb. 5.—

Zahlentheorie. Von Dr. KURT HENSEL, o. ö. Professor an der Universität Marburg. Groß-Oktav. XII, 356 Seiten. 1913. 10.—, geb. 11.—

Lehrbuch der Analysis. Von Professor Dr. EDOUARD GOURSAT. 1. Band. Nach der zweiten Auflage des französischen Originals übersetzt von Felix James Schwarz. Mit Begleitwort von Dr. GERHARD KOWALEWSKI, a. o. Professor an der Technischen Hochschule Dresden. Mit 53 Figuren. Groß-Oktav. VII, 592 Seiten. 1914. 12.—, geb. 13.50

Einführung in die Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen auf funktionentheoretischer Grundlage. Von Dr. LUDW. SCHLESINGER, o. Professor an der Universität Gießen. Dritte, neubearbeitete Auflage. Groß-Oktav. VIII, 326, Seiten. 1922. 10.—, geb. 11.—

Einführung in die Theorie der algebraischen Funktionen einer Veränderlichen. Von HEINRICH W. E. JUNG, o. ö. Prof. an der Universität Halle-Wittenberg. Mit 35 Abb. im Text. Groß-Oktav. VI, 246 S. 1923. 3.50, geb. 4.—